Chapter 6

Equazioni e disequazioni irrazionali.

6.1 Equazioni irrazionali riconducibili ad equazioni di primo e secondo grado.

Definizione Un' equazione ad una incognita si dice **irrazionale** quando l' incognita figura nel radicando di qualche radicale contenuto nell' equazione.

Esempio Sono ad esempio irrazionali le seguenti equazioni:

$$\sqrt{2x+3} - 7x - 5 = 9$$

$$\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}} + 3x = 4$$

Non sono invece irrazionali, pur contenendo dei radicali, le equazioni:

$$\sqrt{5}x^2 - 3x + \sqrt{8} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3a+b} + bx}{\sqrt{a} + 5x} = 4 + x^2$$

perchè l' incognita x non figura nei radicandi dei radicali contenuti nelle equazioni.

Per vedere come si deve procedere per risolvere, nel campo dei numeri reali, le equazioni irrazionali, almeno nei casi più comuni, consideriamo dapprima i seguenti:

Esempio Risolvere la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt{x+2} = 5 \tag{6.1}$$

Si vede facilmente che questa equazione ammette una sola radice data da:

$$x = 23$$

se ora eleviamo ambo i membri della (6.1) al quadrato, otteniamo la seguente equazione razionale di primo grado:

$$x + 2 = 25$$

che, risolta, dà:

$$x = 23$$

Si vede quindi che, in questo caso, elevando al quadrato ambo i membri della (6.1) , si è ottenuta un' quazione equivalente alla data.

Esempio Risolvere l' equazione irrazionale:

$$\sqrt{8-7x} = 4x - 3 \tag{6.2}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (6.2), si ottiene l' equazione razionale di secondo grado:

$$8 - 7x = (4x-3)^2 \tag{6.3}$$

che ammette le due radici: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{16}$.

Ora si verifica direttamente che l' equazione (6.2) è soddisfatta da $x_1 = 1$, non però da $x_2 = \frac{1}{16}$, e possiamo perciò dire che le equazioni (6.2) e (6.3) non sono equivalenti.

6.2 Continuazione.

Dagli esempi svolti si è visto che elevando al quadrato ambo i membri di un' equazione, si può ottenere un' equazione non equivalente alla data.

Precisamente si può dimostrare il seguente:

Teorema Elevando all' ennesima potenza, con n intero maggiore di uno, ambo i membri di un' equazione, si ottiene un' altra equazione che ha tutte le eventuali soluzioni della data, ma che, in generale, ammette anche altre soluzioni.

Dal teorema enunciato segue che ogni qualvolta, per risolvere un' equazione, si è costretti ad elevare ambo i membri a potenza, si introducono, in generale, soluzioni **estranee** all' equazione di partenza e che è necessario, quindi, individuare ed eliminare le soluzioni estranee, per esempio con una verifica diretta.

Nelle equazioni irrazionali, la *verifica è parte integrante* della risoluzione; essa ha lo scopo non tanto di rassicurarci sugli eventuali errori, ma serve, soprattutto, ad eliminare le eventuali soluzioni estranee all' equazione di partenza, che si sono introdotte con l' elevamento a potenza. Porteremo ora alcuni esempi per far vedere come si procede per risolvere equazioni irrazionali riconducibili a equazioni razioanli di 1° e 2° grado.

6.3 Vari tipi di equazioni irrazionali.

-1° Caso.- *L' equazione sia intera e contenga un solo radicale.*

In questo caso si isola il radicale, cioè si fa in modo che il radicale venga a comparire da solo in uno dei due membri dell' equazione, e poi si elevano ambo i membri dell' equazione a una potenza eguale all' indice del radicale.

Esempio Risolvere l' equazione:

$$\sqrt{2x+13}-3x=9$$

Isolando il radicale si ha:

$$\sqrt{2x+13}=3x+9$$

ed elevando ambo i membri al quadrato si ottiene l' equazione razionale di 2° grado:

$$2x + 13 = (3x + 9)^2$$

ossia:

$$9x^2 + 52x + 68 = 0$$

le cui radici sono: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{34}{9}$.
Di queste due radici solo la prima soddisfa l' equazione data, infatti

$$\sqrt{2(-2) + 13} = 3(-2) + 9$$

essendo ambo i membri dell' identità uguali a 3; mentre

$$\sqrt{2\left(-\frac{34}{9}\right) + 13} \neq 3\left(-\frac{34}{9}\right) + 9$$

in quanto il termine a sinistra vale

$$\sqrt{\frac{-68 + 117}{9}} = \frac{7}{3}$$

mentre quello a destra vale

$$-\frac{7}{3}$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$\sqrt[3]{x^3 + 19} - 1 = x$$

Isolando il radicale si ha:

$$\sqrt[3]{x^3 + 19} = x + 1$$

ed elevando ambo i membri al cubo, risulta:

$$x^3 + 19 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

da cui riducendo si ottiene l' equazione:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

che ammette come radici: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Di queste due radici solamente la prima soddisfa l' equazione data, come è facile verificare.

Infatti la soluzione -3 non si accetta in quanto

$$\sqrt[3]{-27+19} = \sqrt[3]{-8}$$

non è definito come radicale aritmetico. Alcuni testi e macchine calcolatrici accettano le radici di indice dispari di numeri negativi, quindi, sotto tale convenzione, la soluzione è accettabile. Qui però accettiamo solo i radicali aritmetici di numeri positivi.

-2° **Caso.**- *L' equazione irrazionale sia intera e contenga due radicali quadratici con altri termini razionali.*

In questo caso si può, o isolare uno dei due radicali ed elevare poi al quadrato ambo i membri dell' equazione, oppure riunire i due radicali in uno stesso membro, trasportando tutti gli altri termini nell' altro membro, ed elevare poi al qudrato. In entrambi i casi si ottiene una equazione contenente un solo radicale quadratico, e perciò ci si riconduce al primo caso trattato.

Esempio Risolvere l' equazione:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3 \tag{6.4}$$

Isolando un radicale si ha:

$$\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$$

ed elevando ambo i membri al quadrato risulta:

$$x - 2 = 9 + x + 1 - 6\sqrt{x+1}$$

ossia:

$$\sqrt{x+1} = 2$$

da cui elevando nuovamente al quadrato:

$$x + 1 = 4$$

che ammette la soluzione $x = 3$, che è anche radice dell' equazione data (6.4).

-3° Caso.- *L' equazione irrazionale sia intera e contenga tre radicali quadratici, insieme, eventualmente, con termini razionali, oppure contenga quattro radicali quadratici.*

In questo caso si lasciano due radicali in un membro e nell' altro si portano tutti gli altri termini. Si elevano al quadrato ambo i membri dell' equazione e con ciò si ottiene una equazione contenente al massimo due radicali quadratici, e perciò si ricade nei casi precedentemente considerati.

Esercizi Risolvere le seguenti equazioni irrazionali:

$3x+\sqrt{6x+10}=35 \qquad [9]$

$x-\sqrt{4-x^2}=1 \qquad \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$

$x+\sqrt{25-x^2}=1 \qquad [-3]$

$x-17=\sqrt{169-x^2} \qquad [impossibile]$

$\sqrt{28+2x}=\sqrt{21+x}+1 \qquad [4]$

$\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}=\sqrt{3x} \qquad \left[\frac{27}{13};3\right]$

6.4 Disequazioni irrazionali

Definizione Una disequazione è *irrazionale* se almeno un radicando contiene l' incognita; ad esempio sono irrazionali le seguenti disequazioni:

$$\sqrt{x^2+4}>x+2; \qquad \sqrt[3]{x-1}\le 2x+4$$

Trattiamo le disequazioni irrazionali contenenti un solo radicale.
Si devono distinguere due tipi di disequazioni irrazionali:
- quelle con indice di radice pari;
- quelle con indice di radice dispari.

Per quanto riguarda le disequazioni con indice di radice pari, interessano soprattutto quelle con indice 2, per cui le tratteremo in modo particolare.

6.4.1 a) Disequazioni irrazionali quadratiche

Si hanno due tipi fondamentali di disequazioni:

$$\sqrt{f(x)}<g(x) \qquad \sqrt{f(x)}>g(x)$$

I tipo

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \tag{6.5}$$

Per risolvere tale disequazione bisogna anzitutto assicurare la realtà del radicale, imponendo

$$f(x) \geq 0$$

Se questa condizione è soddisfatta, il primo membro della (6.5) risulta non negativo e, dovendo essere minore del secondo membro, questo non può essere negativo, cioè si deve imporre:

$$g(x) > 0$$

Si possono allora elevare a quadrato ambo i membri della (6.5), ottenendo la terza condizione:

$$f(x) < [g(x)]^2$$

*La disequazione (*6.5) *è soddisfatta da tutti e soli i valori di x che soddisfano il sistema:*

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

Esempio Risolvere la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt{x^2 - 4} < x + 3$$

Si deve risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \\ x^2 - 4 < (x+2)^2 \end{cases} \quad \textit{cioè}$$

$$\begin{cases} x \leq -2; \qquad x \geq 2 \\ x > -3 \\ x > -\frac{13}{6} \end{cases}$$

La soluzione è (confronta figura 6.1):

$$\left]-\frac{13}{6}, -2\right] \cup [2, +\infty[$$

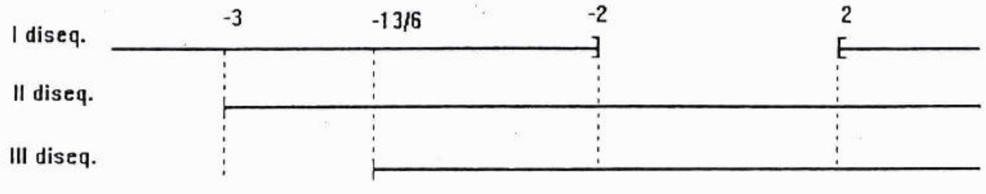

Figure 6.1: soluzioni di $\sqrt{x^2-4} < x+3$

cioè:

$$-\frac{13}{6} < x \leq -2 \qquad \text{oppure} \qquad x \geq 2$$

Esempio Risolvere la disequazione:

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} < 2$$

Si ha il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+3}{x-1} < 4 \end{cases}$$

Non occorre porre la condizione che il secondo membro sia positivo, essendo esso stesso una costante positiva. Risolvendo le disequazioni si ottiene:
1° disequazione: soddisfatta negli intervalli $]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[$
2° disequazione: soddisfatta negli intervalli $]-\infty, 1[\cup]\frac{7}{3}, +\infty[$
Dallo schema di figura 6.2 si ottiene la soluzione:

$$]-\infty, -3] \cup]\frac{7}{3}, +\infty[$$

II tipo

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \tag{6.6}$$

Come nelle disequazioni (6.5) bisogna assicurare la realtà del radicale, imponendo

$$f(x) \geq 0.$$

Per questo tipo di disequazione i valori che verificano il sistema

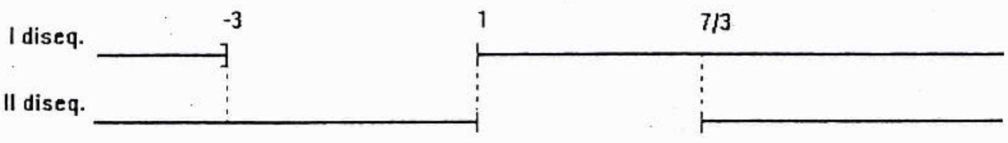

Figure 6.2: soluzioni di $\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} < 2$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x < 0) \end{cases} \tag{6.7}$$

soddisfano la (6.6), la quale però è anche soddisfatta dalle radici di questo secondo sistema

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \tag{6.8}$$

Si noti che la seconda disequazine del sistema (6.8) assicura la realtà della radice a 1° membro della (6.6) perchè le impone di essere maggiore di un quadrato.

La soluzione della disequazione (6.5) è data dall' unione degli intervalli ai quali appartengono i valori che soddisfano il sistema (6.7) o il sistema (6.8) cioè da:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

oppure da:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Esempio Risolvere la disequazione:

$$\sqrt{x^2 - 4} > x + 3$$

Si debbono trovare i valori che risolvono l' uno o l' altro dei due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-4 > (x+3)^2 \end{cases}$$

cioè (rispettivamente):

$$\begin{cases} x \leq -2 \text{ o } x \geq 2 \\ x < -3 \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x < -\frac{13}{6} \end{cases}$$

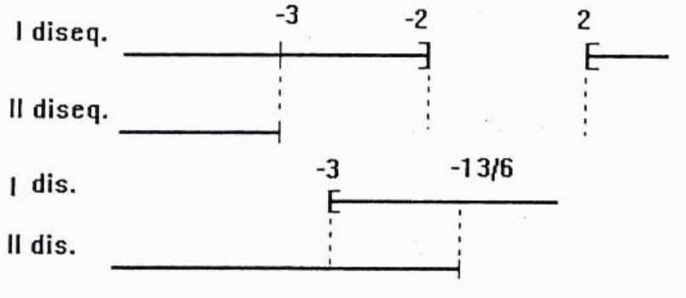

Figure 6.3: soluzioni dei due sistemi

dal grafico di figura 6.3 si ricava che la soluzione è:

$$]-\infty, -3[\cup [-3, -\frac{13}{6}[$$

cioè

$$]-\infty, -\frac{13}{6}[$$

che si può anche esprimere nella forma:

$$x < -\frac{13}{6}$$

Esempio Risolvere la disequazione:

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} > \frac{1}{2}$$

In questa disequazione, essendo il secondo membro una costante positiva, l' equazione irrazionale dà luogo solo al secondo sistema (6.8), che si riduce a:

$$\frac{x}{x-1} > \frac{1}{4}$$

che ha per soluzione:

$$]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$$

6.5 Disequazioni irrazionali con indice dispari.

Le disequazioni irrazionali con indice dispari contenenti un solo radicale sono della forma:

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} \lesseqgtr g(x)$$

Poichè elevando a potenza con esponente dispari $(2n+1)$ il segno si mantiene, si ottiene la disequazione equivalente:

$$f(x) \lesseqgtr [g(x)]^{2n+1}$$

N.B. Qui si considera la convenzione che il radicale algebrico di indice dispari ha significato anche quando il radicando $f(x)$ è negativo.

Esempio Risolvere la disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{8x^3 - 5x + 2} > 2x$$

Elevando al cubo ambo i membri si ottiene:

$$8x^3 - 5x + 2 > 8x^3$$

$$-5x > -2$$

$$x < \frac{2}{5}$$

La soluzione è dunque:

$$\left]-\infty, \frac{2}{5}\right[$$

6.5.1 Esercizi di verifica.

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali:

$\sqrt{x+5} > 3$ $\quad]4, +\infty[$

$\sqrt{x^2-5} \geq 2$ $\quad]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

$\sqrt{2-x} < 3$ $\quad]-7, 2]$

$\sqrt{x-1} < 3-x$ $\quad [1, 2[$

$\sqrt{x-1} > x+1$ $\quad \{\emptyset\}$

$\sqrt[3]{x^3+2x-1} > x$ $\quad]\frac{1}{2}, +\infty[$

$\sqrt[3]{2x^3+2x-4} > x-1$ $\quad]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[$