Potenze in alternata

Consideriamo un ramo di un circuito elettrico percorso da una corrente i e ai capi del quale sia presente una ddp v. Si definisce “potenza istantanea” W la grandezza

$$W = i * v$$

che corrisponde al lavoro per unità di tempo fatto dal campo elettrico sulle cariche che attraversano la ddp v.

Se il ramo è puramente resistivo e la temperatura è mantenuta costante (ovvero R costante) allora vale

$$W = i^2 R = v^2 /R$$

Correnti alternate

Se il circuito è a costanti concentrate e se si considerano frequenze e dimensioni del circuito per cui valga il regime quasi stazionario, potremo ancora utilizzare la definizione di W ma non potremo utilizzare il formalismo dei numeri complessi in quanto $\mathrm{Re}(\mathbf{A} * \mathbf{B}) \neq \mathrm{Re}(\mathbf{A}) * \mathrm{Re}(\mathbf{B})$

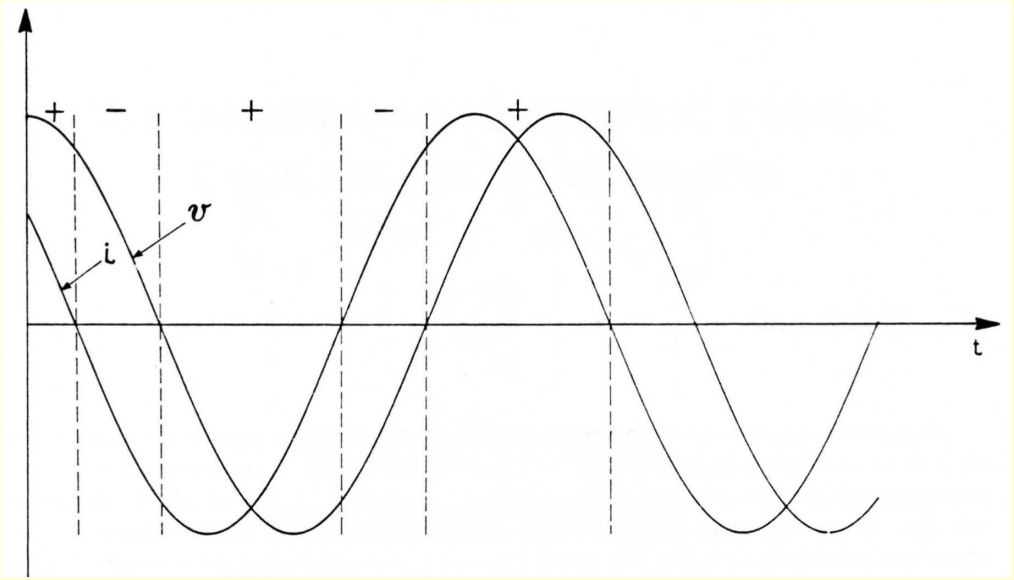
Potenze in alternata

Consideriamo ora un ramo, con impedenza Z = R + j X, al quale sia applicata una ddp V = $v_0\, e^{j\omega t}$ e nel quale scorre una corrente I = $i_0\, e^{j(\omega t + \varphi)}$, con $i_0 = v_0 / |Z|$ e φ = - atan (X/R)

La "potenza istantanea" W sarà allora

$$W = v_0 \cos(\omega t) * i_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

variabile nel tempo e con segni diversi a seconda di t
(potenza positiva → circuito esterno compie lavoro sulle cariche in moto nel ramo,
potenza negativa → circuito esterno riceve energia dall'impedenza).
Se calcoliamo la potenza media su un periodo T otteniamo



$$< W >= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} W dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v_0 i_0 \cos\omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) dt =$$

$$= \frac{v_0 i_0}{2}\cos\varphi = v_{eff} i_{eff} \cos\varphi$$

Potenze in alternata

$$< W > = \frac{v_0 i_0}{2} \cos\varphi = v_{eff} i_{eff} \cos\varphi$$

Per avere <W> = 0 dovrà essere cos φ ("fattore di potenza") = 0 ovvero
$\varphi = \pm \pi / 2 \;\rightarrow\; X/R = \pm \infty \;\rightarrow R = 0$
nessuna dissipazione

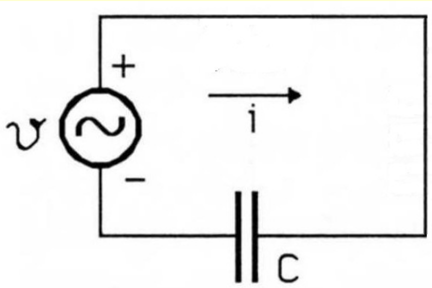
Riscrivendo la potenza media su un periodo nella forma

$$< W > = \frac{v_0 i_0}{2} \cos\varphi = |\mathcal{Z}| \frac{i_0^2}{2} \cos\varphi = i_{eff}^2 R$$

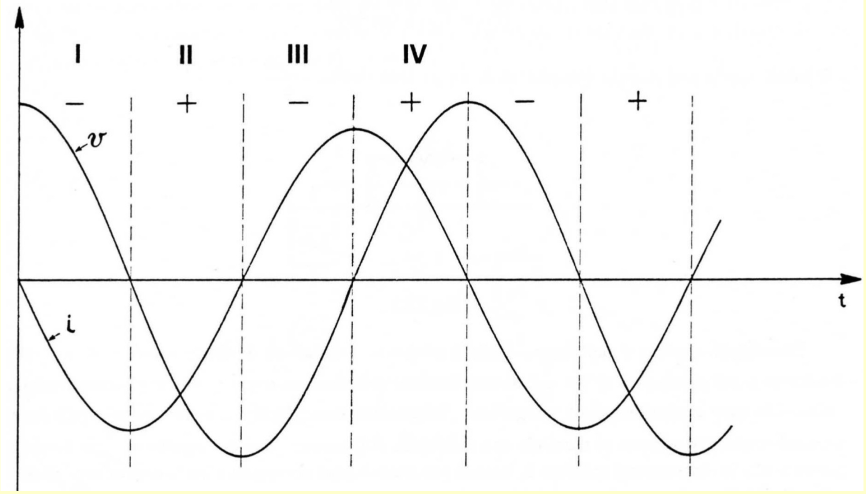
si vede che essa coincide con quella di una corrente continua di intensità pari al valore efficace della corrente alternata che scorra nella sola resistenza R

Potenze in alternata

Consideriamo ora il caso in cui nel ramo sia presente solo un condensatore C. Se a esso viene applicata una ddp $v_0 \cos(\omega t)$, in esso scorre una corrente $i = v_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2) = - v_0 \omega C \,\mathrm{sen}\,(\omega t)$ e il lavoro nelle varie fasi è dato da



$$\begin{cases} \mathcal{L}_I = \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} v \cdot i dt = \dfrac{-v_0^2 C}{2} \,\mathrm{sen}\,^2 \omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = -\dfrac{v_0^2 C}{2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{II} = \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} v \cdot i dt = \dfrac{-v_0^2 C}{2} \,\mathrm{sen}\,^2 \omega t \Big|_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} = \dfrac{v_0^2 C}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{III} = \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} v \cdot i dt = \dfrac{-v_0^2 C}{2} \,\mathrm{sen}\,^2 \omega t \Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} = -\dfrac{v_0^2 C}{2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{IV} = \int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{0} v \cdot i dt = \dfrac{-v_0^2 C}{2} \,\mathrm{sen}\,^2 \omega t \Big|_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{0} = \dfrac{v_0^2 C}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C} \end{cases}$$



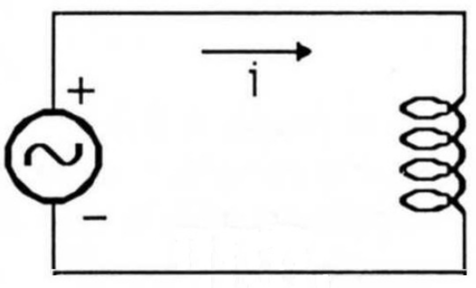
con Q_0 il massimo del valore assoluto della carica accumulata sulle armature. Nella fase I il condensatore (carico) cede energia al circuito esterno, nella fase II è invece il circuito esterno a fornire energia al condensatore che si ricarica e così via.

L'energia istantanea accumulata su C è $W_E = ½\, Q^2(t) / C$ ed essendo $Q(t) = \int_0^t i(t)\, dt = v_0 C \cos \omega t$ si ha $W_E = ½\, (v_0^2 C^2/C) \cos^2 \omega t = v_{eff}^2\, C \cos^2 \omega t$.

Il suo valore medio su un periodo è $\langle W_E \rangle = v_{eff}^2\, C /2$

Potenze in alternata

Nel caso di una induttanza ($Z = j\,\omega\,L$) l'energia accumulata nella bobina sotto forma di campo magnetico è data istante per istante $W_M = i_{eff}^{\,2}\, L \,\mathrm{sen}^2\, \omega\, t$ e il valore medio dell'energia accumulata in un periodo è $\langle W_M \rangle = ½\, i_{eff}^{\,2}\, L$

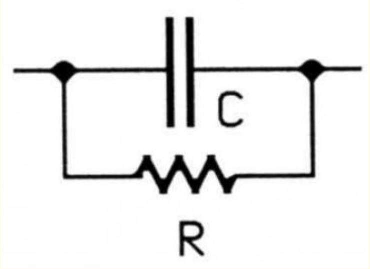


Condensatore reale
Fattore di dissipazione D

$$D = \frac{1}{2\pi}\frac{Energia\ dissipata\ per\ effetto\ Joule\ in\ un\ ciclo}{Energia\ massima\ accumulata\ nel\ condensatore}$$

L'energia dissipata sulla resistenza in parallelo

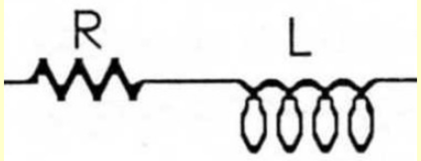
$$E_D = \frac{v_{eff}^2}{R}T = \frac{v_{eff}^2}{R}\frac{2\pi}{\omega}$$



$$D = \frac{1}{2\pi}\frac{v_{eff}^2}{R}\frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{v_{eff}^2 C} = \frac{1}{\omega RC}$$

Induttanza reale
Fattore di merito Q

$$Q = \frac{1}{D} = \frac{2\pi\, i_{eff}^2 L}{i_{eff}^2 R \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega L}{R}$$



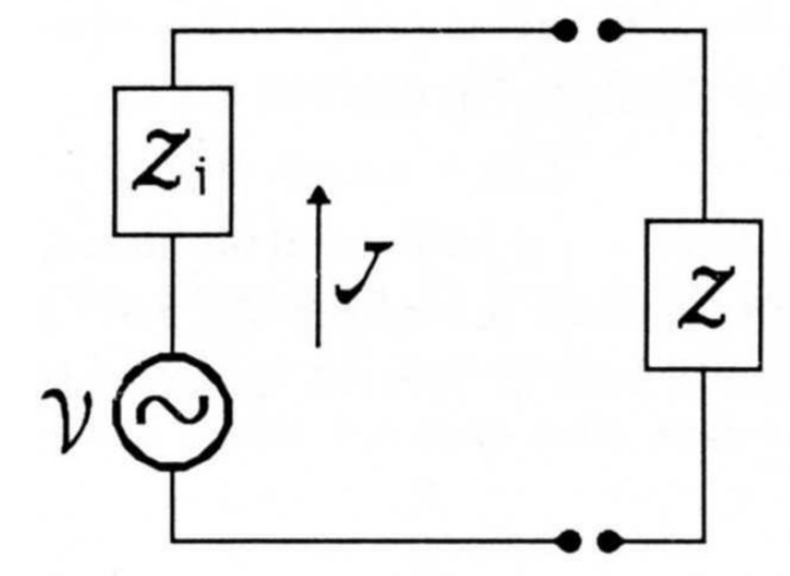
Trasferimento di potenza

Per un generico circuito quale è il carico Z per cui si ha il massimo trasferimento di potenza media dal generatore, caratterizzato da una impedenza interna Z_i , al carico?

Siano $Z_i = R_i + j X_i$ e $Z = R + j X$

La potenza media dissipata sul carico (disponibile per l'utente) è

$$< W_t >= i_{eff}^2 R = \frac{v_{eff}^2}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} R$$



Il massimo trasferimento di potenza si ha quindi quando

$X_i = - X$ e $R = R_i$

Il risultato ottenuto è analogo a quello trovato in continua, che ne è un caso particolare, e conferma che la parte immaginaria dell'impedenza non contribuisce alla potenza media massima utilizzabile.