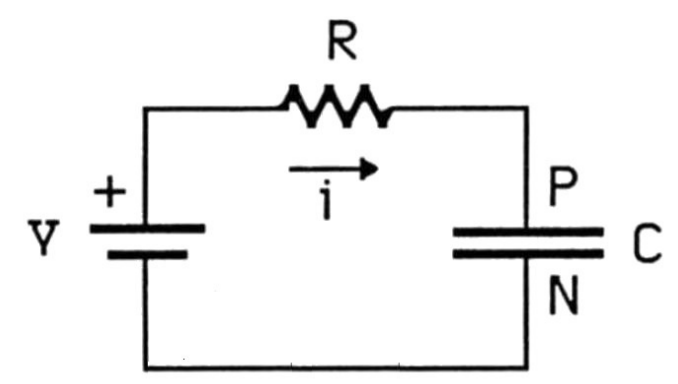
# Energia accumulata in un condensatore




In base alla seconda legge di Kirchhoff istante per istante avremo

$$v(t) = i(t)R + \frac{q(t)}{C}$$

$$v(t)i(t) - i^2(t)R = \frac{q(t)}{C} i(t)$$

potenza istantanea fornita dal generatore

perdita per effetto Joule

potenza accumulata in C sotto forma di campo elettrico

derivata temporale di

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$$

Sappiamo che

$$i(t) = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Sostituendo nella eq. diff. e integrando

$$\int_0^\infty \frac{V^2}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)dt - \int_0^\infty \frac{V^2}{R^2}R\exp\left(-2\frac{t}{RC}\right)dt =$$

$$= \frac{V^2}{R}\left[RC\int_0^\infty \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)dt - \frac{RC}{2}\int_0^\infty \frac{2}{RC}\exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)dt\right] =$$

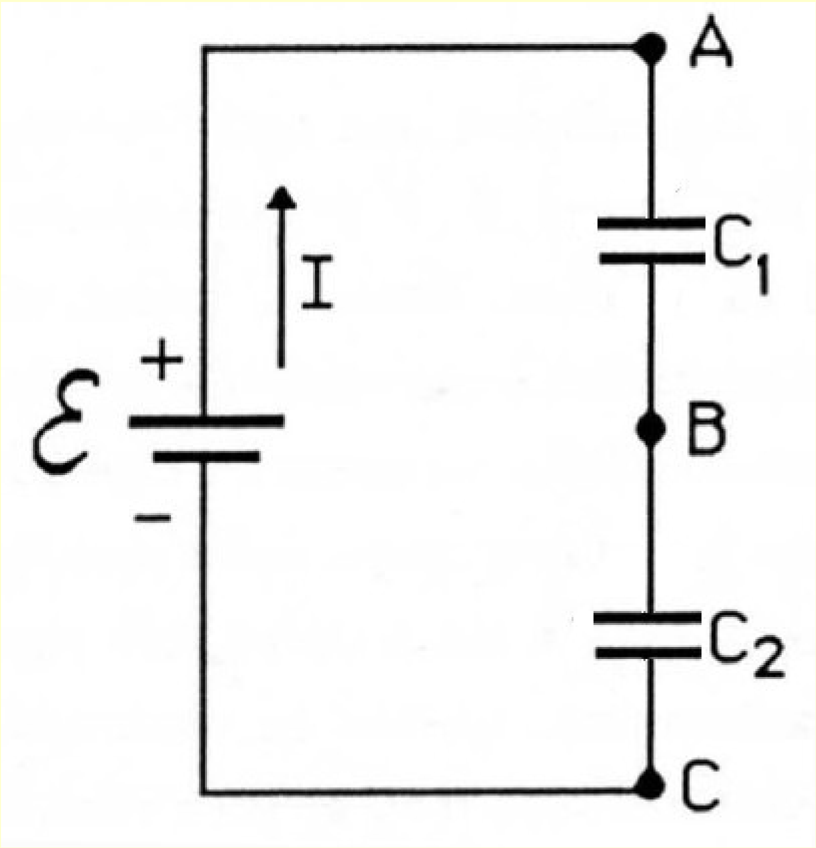
= 1

$CV^2 - CV^2/2 = CV^2/2$

generatore

Joule

# Condensatori in serie

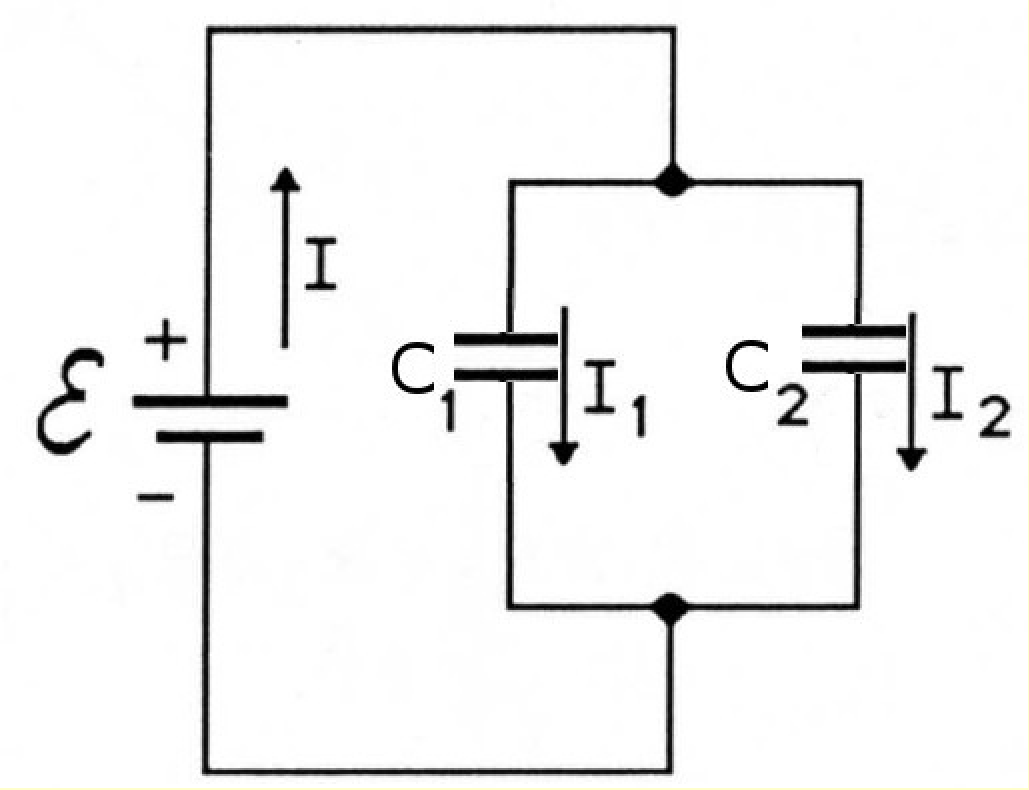



$$\begin{cases} V_A - V_B = q/C_1 \\ V_B - V_C = q/C_2 \end{cases}$$

$$\varepsilon = V_A - V_C = q \cdot \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

# Condensatori in parallelo




$$\varepsilon = \frac{q_1}{C_1}$$

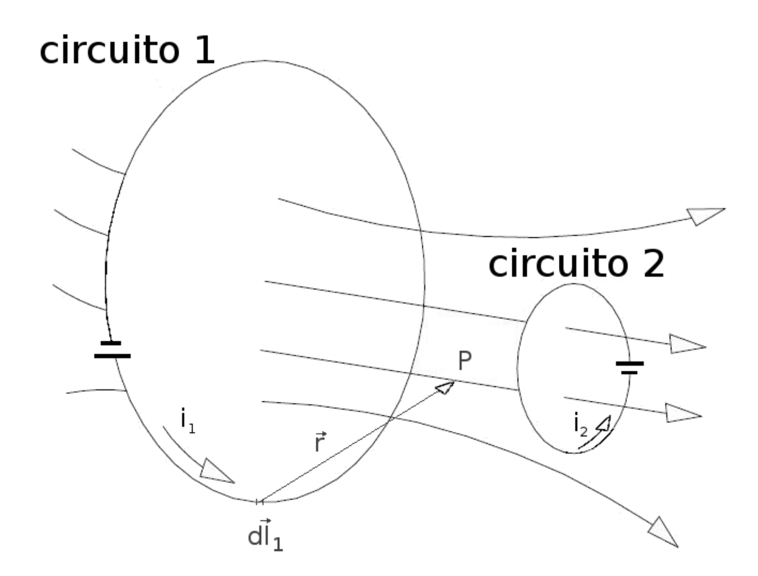
$$\varepsilon = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q = q_1 + q_2 = \varepsilon \cdot \left(C_1 + C_2\right)$$

$$C_T = \frac{q}{\varepsilon} = C_1 + C_2$$

# Auto e Mutua Induzione

Circuito 1
corrente $i_1$ → campo induzione magnetica $\vec{B}_1(P)$
Se il mezzo in cui il circuito è immerso è omogeneo, isotropo e con permeabilità magnetica $\mu_r$ si ha




$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{i_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Tale campo si concatena sia con il circuito 1 che con il 2 dando luogo ai seguenti flussi

$$\begin{cases} \Phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_1 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_1} \left( \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_1 = i_1 L_1 \\ \Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_2 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_2} \left( \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_2 = i_1 L_{12} \end{cases}$$

Coefficiente di autoinduzione

Considerando l'effetto della corrente $i_2$ sul circuito 1 otteniamo

$$\begin{cases} \Phi_{22} = i_2 L_2 \\ \Phi_{21} = i_2 L_{21} \end{cases}$$

Se i due circuiti sono posti in geometria fissa

$$\boxed{M = L_{12} = L_{21}}$$

Coefficiente di mutua induzione

$$\begin{cases} \Phi_{22} = i_2 L_2 \\ \Phi_{21} = i_2 M \end{cases}$$

# Auto e Mutua Induzione

L (sempre positivo) e M si misurano in (valori tipici μH)

$$Henry\ (H) = \frac{Weber}{Ampère} = \frac{Tesla \cdot m^2}{Ampère} = \frac{Volt \cdot secondo}{Ampère}$$

Se $i_1$ e $i_2$ variano nel tempo, anche i flussi variano e si osserveranno delle fem indotte

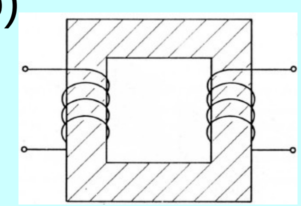
$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{11} + \Phi_{21}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{22} + \Phi_{12}) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Concentrando il coefficiente di auto (e mutua) induzione in una porzione di uno (o due) circuiti si individuano due nuovi elementi fisici: “induttanza” e “mutua induttanza”

In pratica :

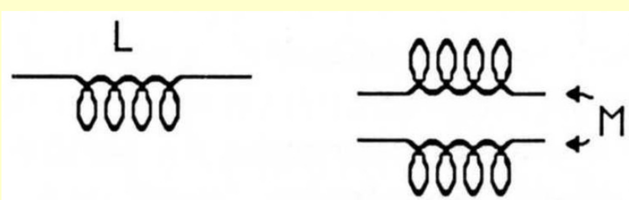
Induttanza (o induttore) → avvolgendo n spire di rame su supporto (ferromagnetico, $\mu_r \simeq 10^2 - 10^5$) si aumenta L di un fattore $n^2$ ( $\mu_r n^2$ )

Mutua induttanza → avvolgendo su uno stesso supporto (ferromagnetico) due avvolgimenti di rame facenti parte di due diverse maglie (ex. Trasformatore)

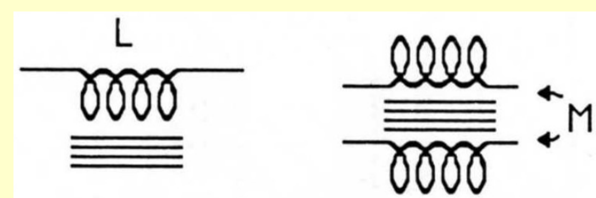


Per essi si usano i simboli circuitali:

$\mu_r = 1$

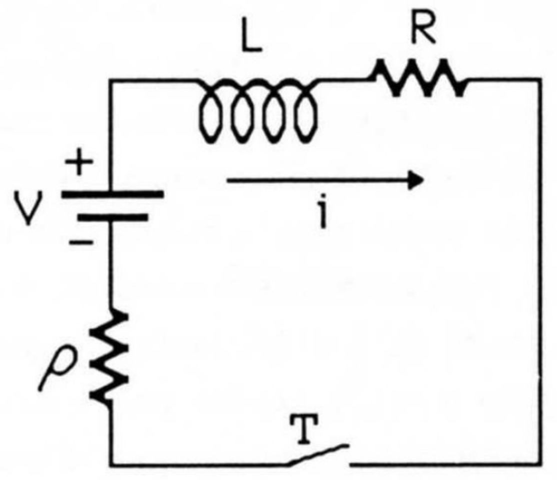



$\mu_r >> 1$



# Induttanze in regime transitorio

Se nel circuito accanto viene chiuso il tasto T a t = 0




$$V - L\frac{di}{dt} = i(R+\rho)$$

ovvero

$$\frac{L}{R+\rho}\frac{di}{dt} + i = \frac{V}{R+\rho}$$

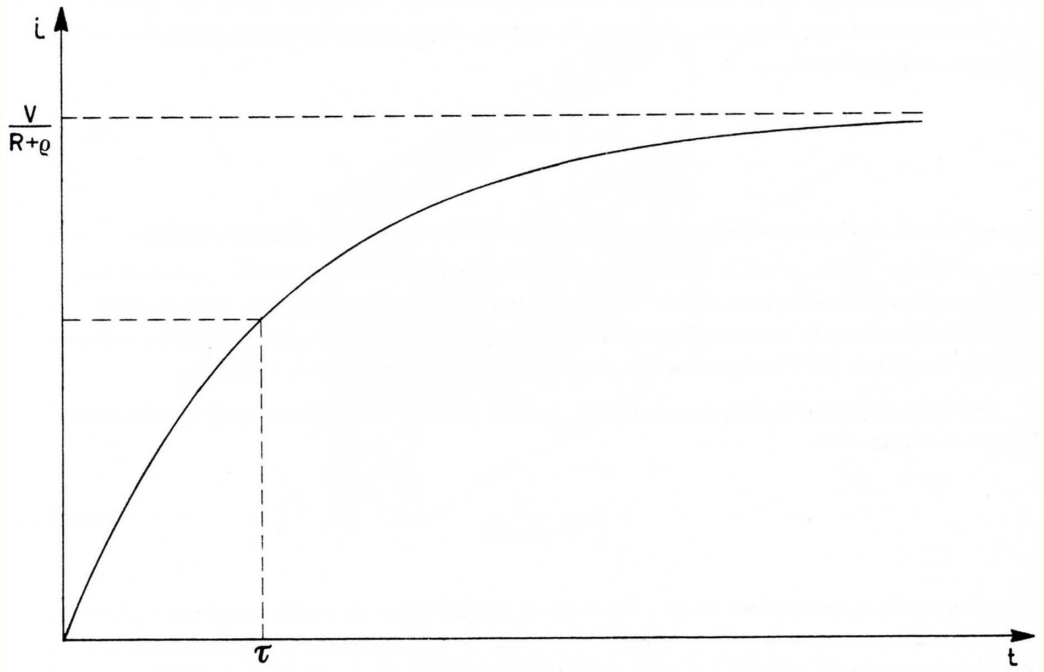
con soluzione

$$i(t) = \frac{V}{R+\rho}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

con

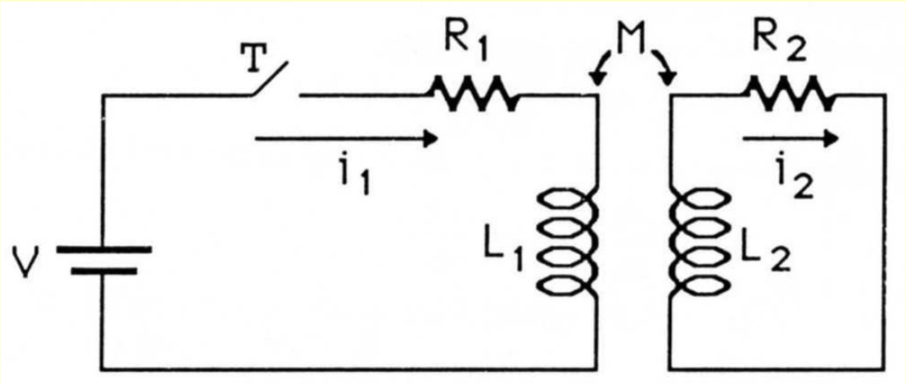
$$\tau = \frac{L}{R+\rho}$$

E se dopo un tempo t >> τ si apre il tasto T che succede?



# Mutue induttanze in regime transitorio

Se nel circuito accanto a t = 0 viene chiuso il tasto T




$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} = V \\ i_2 R_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

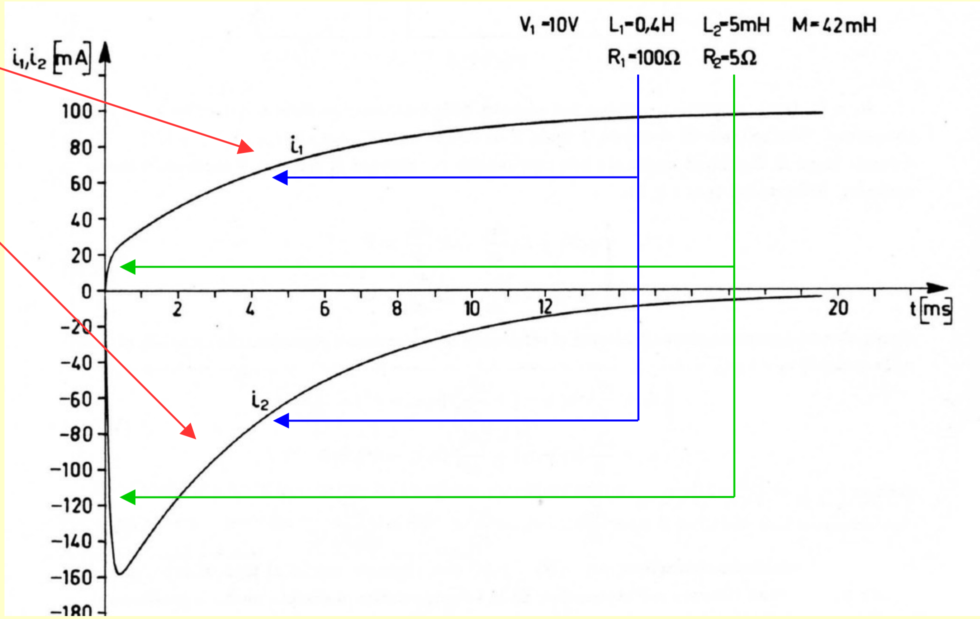
ovvero ........

$$\begin{cases} i_1 + \dfrac{di_1}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \dfrac{d^2 i_1}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = \dfrac{V}{R_1} \\ i_2 + \dfrac{di_2}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \dfrac{d^2 i_2}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = 0 \end{cases}$$

con

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \qquad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \qquad \theta^2 = \frac{M^2}{R_1 R_2}$$

e soluzioni



# Tensioni e correnti alternate

Si definisce “alternata” una tensione, o una corrente, g(t) che vari nel tempo come una funzione periodica, di periodo T, a media nulla

$$\begin{cases} g(t+T) = g(t) \\ \bar{g} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} g(t')dt' = 0 \end{cases}$$

Caso particolare: una fem del tipo

$$\boxed{v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)}$$

con

$v_0$ ”ampiezza” o “valore di picco” (Volt → V)

$\omega = 2\pi / T$ “pulsazione” (rad/s)

$f = \omega / 2\pi = 1 / T$ “frequenza” (Hertz → Hz)

$\alpha$ “fase iniziale” o “angolo di fase” o “sfasamento” (rad)

$\omega t + \alpha$ “fase” (rad)

Si definisce “valore quadratico medio” o “valore efficace” di v

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} v^2(t')dt' = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} v_0^2 \cos^2(\omega t' + \alpha)dt' = \frac{v_0^2}{2}$$

# Tensioni e correnti alternate

Lo studio della risposta di una rete lineare alla fem è particolarmente importante in quanto:

$$v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

1) la distribuzione dell'energia elettrica avviene ovunque tramite una tensione alternata (grazie alla sua facile “trasformabilità”)
2) qualsiasi fem periodica, che soddisfi a requisiti di continuità generalmente soddisfatti, può essere espressa nella forma (sviluppo in serie di Fourier)

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen}(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)\right] \\ a_n = \dfrac{\omega}{\pi} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \operatorname{sen}(n\omega t') dt' \qquad n = 1, 2, \ldots . \\ b_n = \dfrac{\omega}{\pi} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \cos(n\omega t') dt' \qquad n = 0, 1, \ldots . \end{cases}$$

ovvero come somma di contributi ognuno puramente sinusoidale (armo-niche) con frequenza pari a multipli della frequenza fondamentale ω/ 2π

# Tensioni e correnti alternate

Supponiamo di avere una rete lineare "a costanti concentrate", ovvero
1) nelle bobine non ci sia flusso di campo magnetico disperso
2) fra le armature dei condensatori si abbia induzione completa
3) siano presenti resistori
ed inoltre
4) le dimensioni della rete siano << cT con c velocità della luce e T = 2π/ω periodo della tensione alternata $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$ applicata da un generatore di fem in un ramo della rete
5) i tempi di ridistribuzione ($10^{-18}$ s) delle cariche superficiali che assicurano i campi elettrici nella rete siano trascurabili rispetto a T

In tali ipotesi siamo in un caso quasi stazionario e varranno le relazioni

$$div\,\vec{j} = 0$$

I legge di Kirchhoff

In un qualunque nodo

$$\sum_k i_k = 0$$

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = 0$$

II legge di Kirchhoff

Integrale esteso a curva chiusa esterna al circuito

In ogni ramo potremo scrivere:

$$i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$$