Valori approssimati delle funzioni

"si abbia una funzione $f(x)$ reale, definita nell'intervallo]a,b[, ed essa ammetta in]a,b[derivate di ogni ordine; si può allora costruire la cosiddetta *serie di Taylor* esprimibile come:

$$T(x,x_0) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \ldots\ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \ldots\ldots$$

Se tale serie risulta convergente in]a,b[e se ha per somma $f(x)$, si dice che la $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 appartenente all'intervallo]a,b[."

il polinomio di Taylor di ordine n

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

il termine complementare n-esimo della formula di Taylor

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

"Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(x)$, indefinitamente derivabile in un intervallo]a,b[cui appartiene x_0 sia sviluppabile ivi in serie di Taylor è che per ogni $x \epsilon$]a,b[il termine complementare $R_n(x)$ della formula di Taylor abbia limite zero quando $n \to \infty$"

Valori approssimati delle funzioni

$$T(x,x_0) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \ldots.. + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \ldots..$$

$$x_0 = 0 \text{ (sviluppo di Mc Laurin)}$$

$$\operatorname{sen}(x) = 0 + x \times 1 - \frac{x^2}{2!} \times 0 - \frac{x^3}{3!} \times 1 + \ldots. = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\ldots.$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. \qquad x \epsilon R$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots. \qquad |\, x \,| \leq \frac{\pi}{2}$$

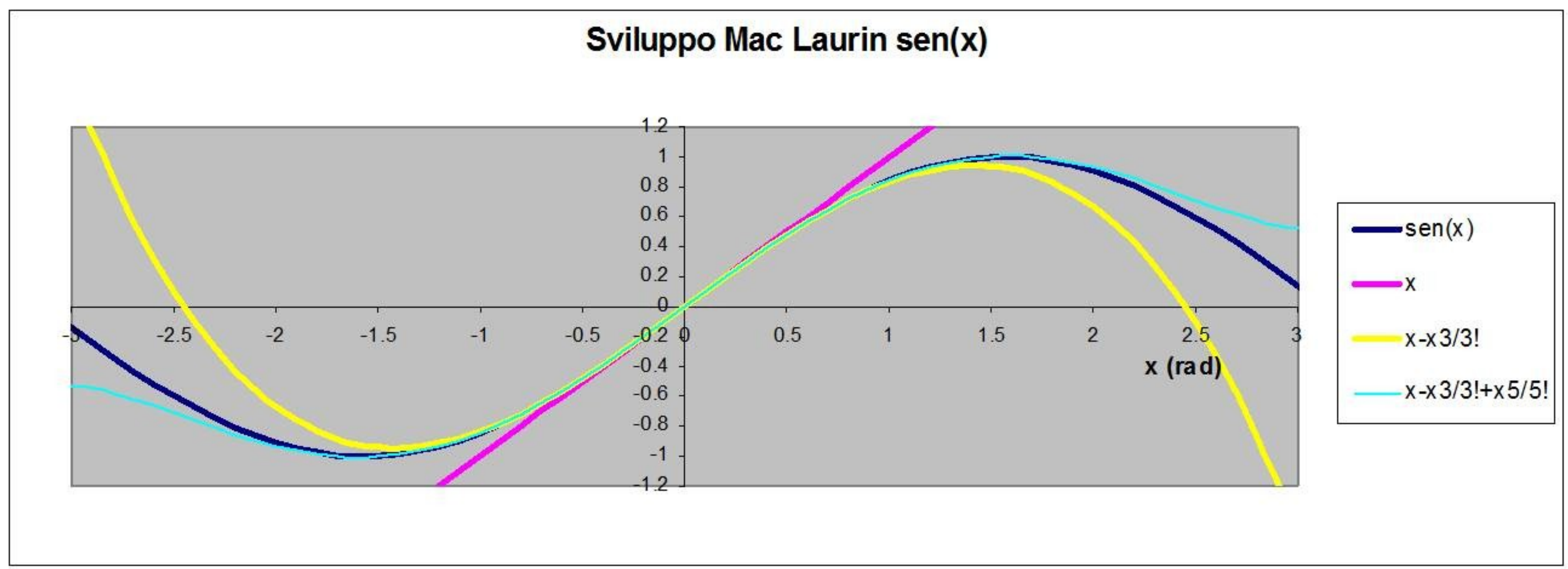
$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x - \frac{n(m-n)}{2m^2}x^2 + \ldots. \qquad |\, x \,| \leq 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots. \qquad |\, x \,| \leq 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots. \qquad x \epsilon R$$

Valori approssimati delle funzioni

$$\mathrm{sen}(x) = 0 + x \times 1 - \frac{x^2}{2!} \times 0 - \frac{x^3}{3!} \times 1 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ....$$



$x(rad)$	$\mathrm{sen}x$	$x - \mathrm{sen}x$	$\frac{x-\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}x}$	$x - \frac{x^3}{3!} - \mathrm{sen}x$	$\frac{x-\frac{x^3}{3!}-\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}x}$
0.01	$0.999983 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-7}$	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$-0.83 \cdot 10^{-12}$	$-0.83 \cdot 10^{-10}$
0.1	$0.99833 \cdot 10^{-1}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$-0.83 \cdot 10^{-7}$	$-0.83 \cdot 10^{-6}$
0.3	$2.955 \cdot 10^{-1}$	$4.48 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$-2.0 \cdot 10^{-5}$	$-0.68 \cdot 10^{-2}$
0.5	$4.794 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$4.29 \cdot 10^{-2}$	$-2.6 \cdot 10^{-4}$	$-0.54 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.6442	$0.558 \cdot 10^{-1}$	$0.866 \cdot 10^{-1}$	$-1.4 \cdot 10^{-3}$	$-2.1 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.7833	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$-4.8 \cdot 10^{-3}$	$-0.62 \cdot 10^{-2}$

Valori approssimati delle funzioni

Esercizi, esercizi, esercizi…………….

Determinare il numero di cifre significative e l'ordine di grandezza dei risultati delle seguenti misure della grandezza fisica y (Δy indica l'incertezza di misura):

y	2.321	$0.176364 \cdot 10^3$	$2.1533 \cdot 10^{-2}$	$0.0427 \cdot 10^3$
Δy	$3 \cdot 10^{-2}$	0.03	$4 \cdot 10^{-5}$	0.2
[$nr\ c.s.$ $\rightarrow$	3	5	4	3]
[odg $\rightarrow$	10^0	10^2	10^{-2}	10]

Determinare, con approssimazione del 1% e del 0.2%, i valori delle seguenti operazioni:

$\frac{8}{7}$; $\frac{26}{9}$; $\sqrt{18}$; $16^{2.5}$; $(\frac{1}{625})^{\frac{1}{4}}$.

[$\frac{8}{7} \rightarrow 1.14$ e 1.143; $\frac{26}{9} \rightarrow 2.89$ e 2.889; $\sqrt{18} \rightarrow 4.24$ e 4.24; $16^{2.5} = 1.02 \cdot 10^3$ e $1.024 \cdot 10^3$; $(\frac{1}{625})^{\frac{1}{4}} = 2.00 \cdot 10^{-1}$ e $2.000 \cdot 10^{-1}$]

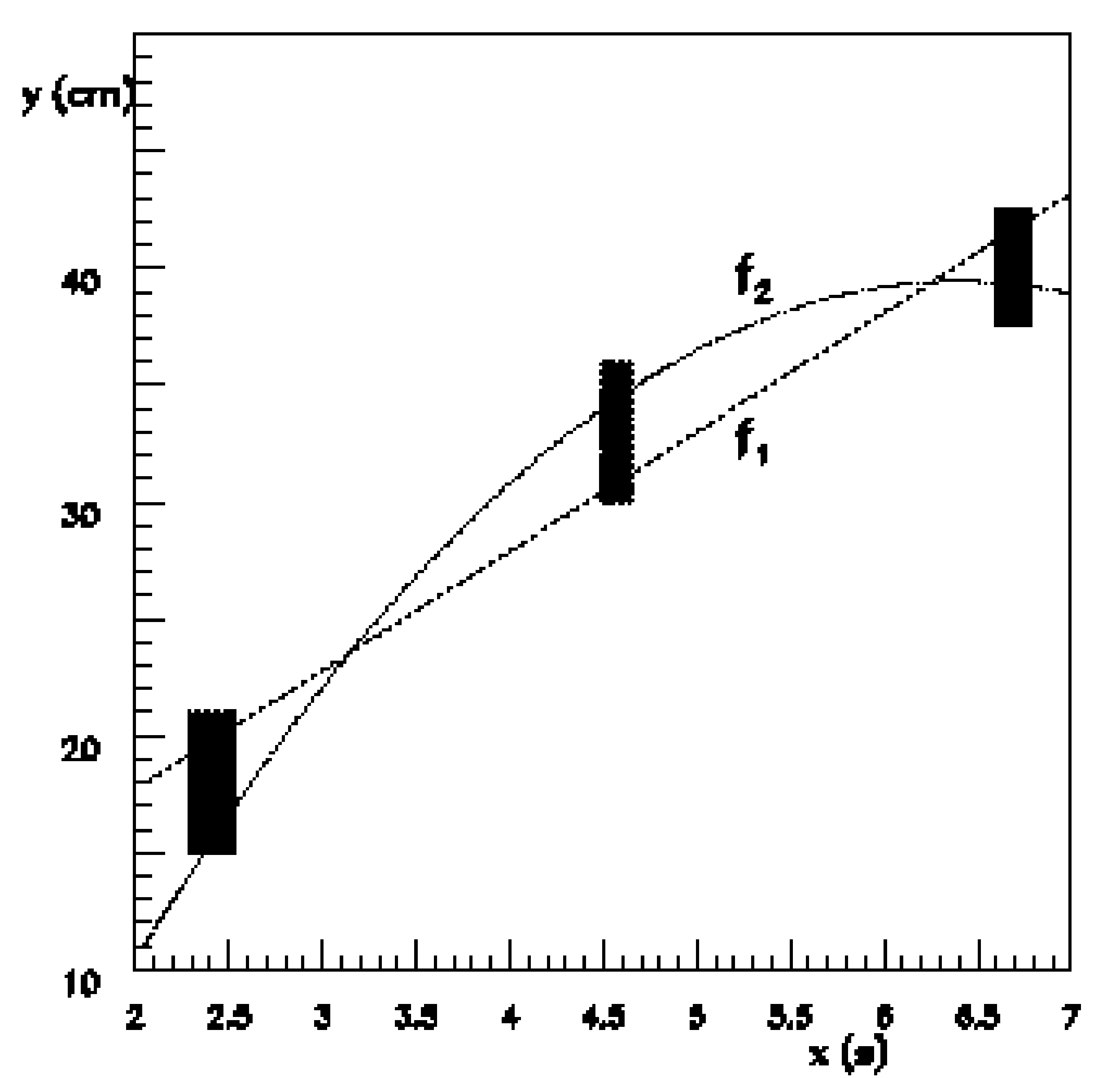
Calcolare i valori delle seguenti funzioni, nei punti indicati, con una approssimazione relativa di 10^{-2}:

sen(x/2) in $x = 0.4^\circ$; $\frac{1}{(8+2x)^2}$ in $x = 4. \cdot 10^{-2}$

$\frac{1}{(1-x)^3}$ in $x = -2. \cdot 10^{-3}$; e^{+x^3} in $x = 0.2$

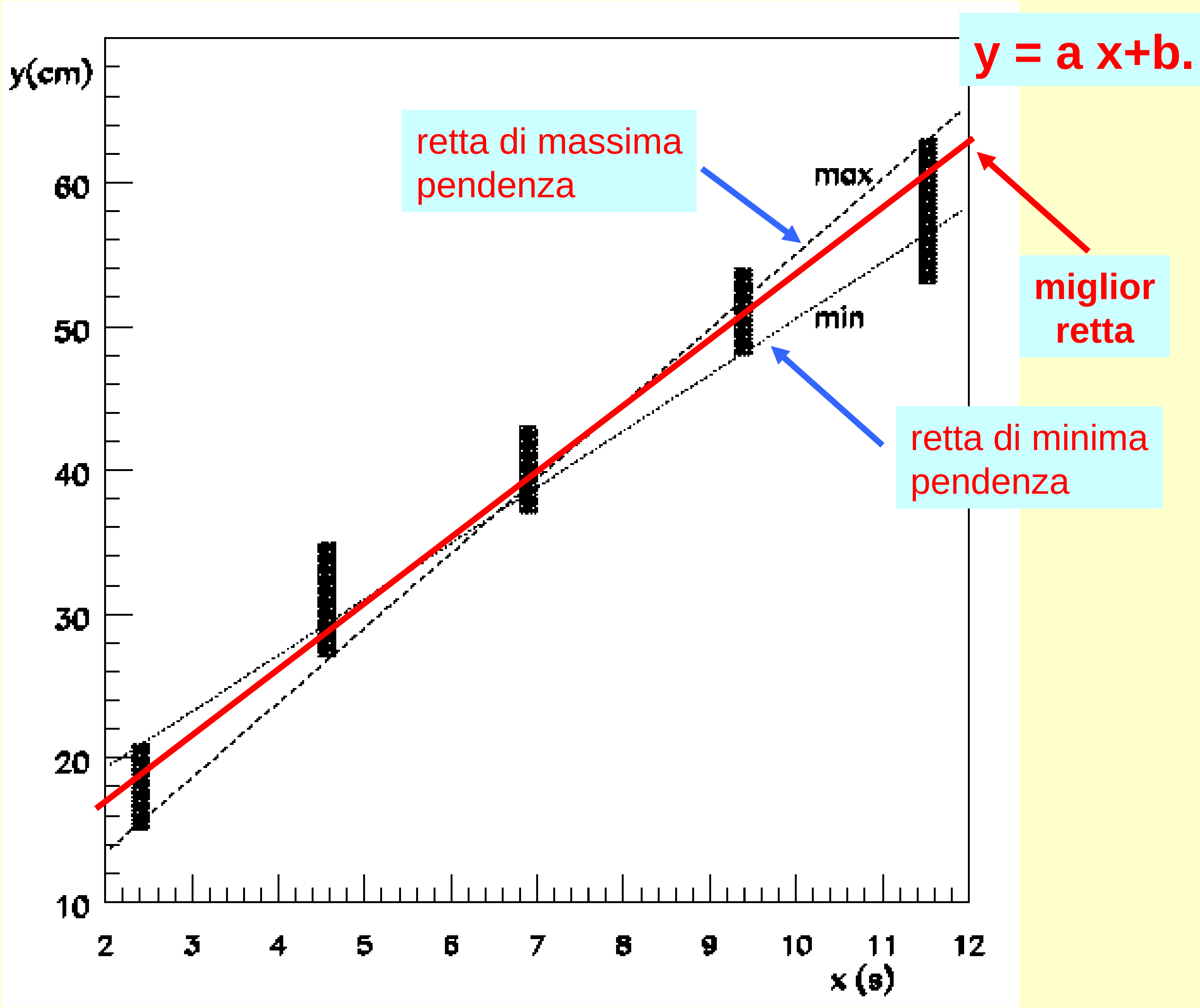
$\left[sen(x/2) \simeq 3.50 \cdot 10^{-3};\ \frac{1}{(8+2x)^2} \simeq 0.0153;\ \frac{1}{(1-x)^3} \simeq 1.00;\ e^{+x^3} \simeq 1.01\right]$

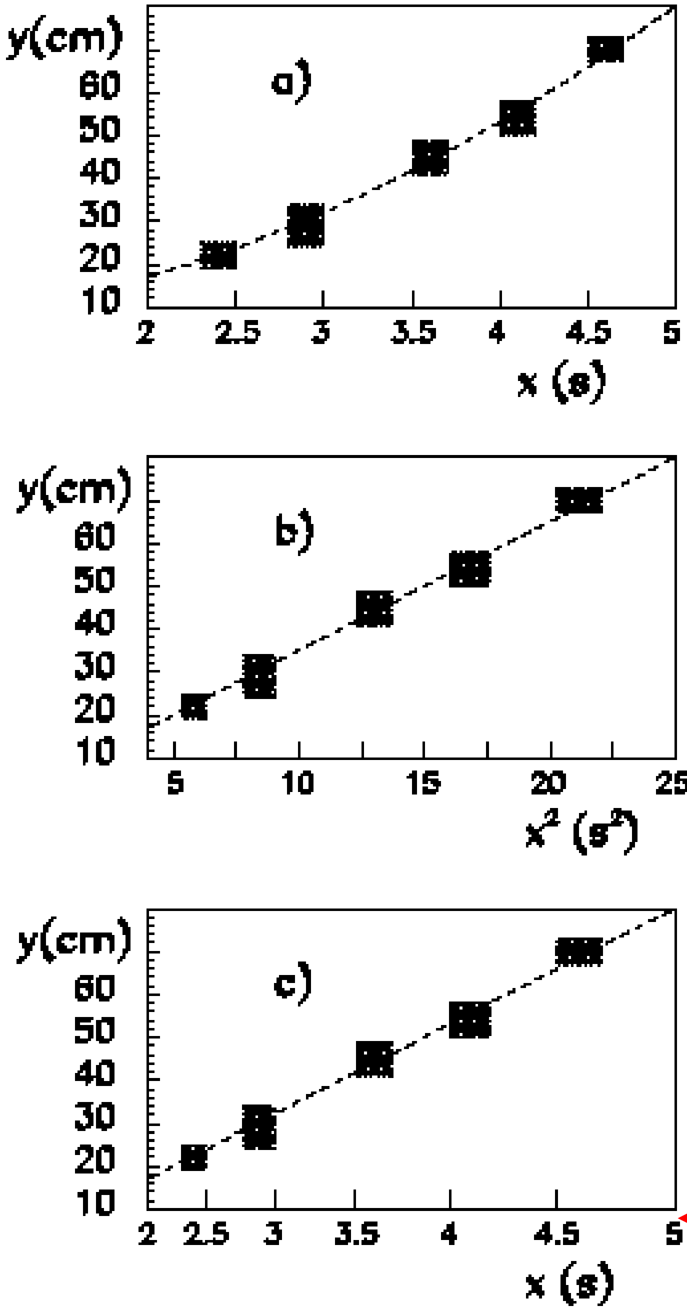
Rappresentazione grafica delle relazioni tra grandezze fisiche



Evidenziare la parte del grafico che contiene i dati sperimentali (mantenendo scale LEGGIBILI!)

Quale è la $y = f(x)$ che meglio si adatta ai dati?


y = a x+b.
retta di massima pendenza
retta di minima pendenza
miglior retta
max
min
y(cm)
x (s)
10
20
30
40
50
60
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12



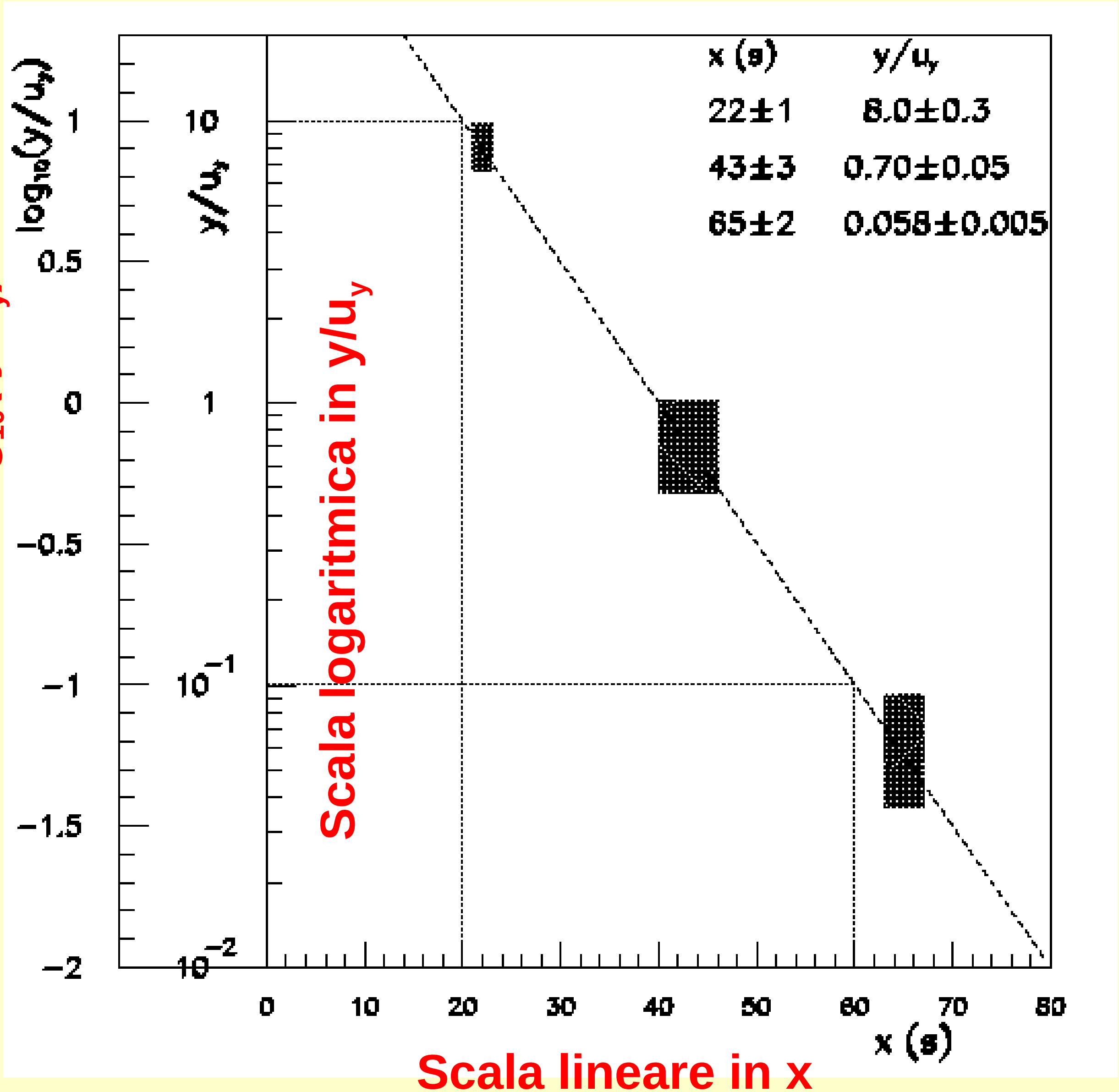
$y = a\,x^2 + b.$

Scala lineare in x^2

Scala quadratica in x

$$y = a \cdot c^{\frac{x}{b}}$$

$$\log_{10}(y/u_y) = \log_{10}\left(\frac{a \cdot c^{\frac{x}{b}}}{u_y}\right) = \log_{10}\left(\frac{a}{u_y}\right) + \log_{10}\left(c^{\frac{x}{b}}\right) = \log_{10}\left(\frac{a}{u_y}\right) + \frac{x}{b}\log_{10}(c)$$



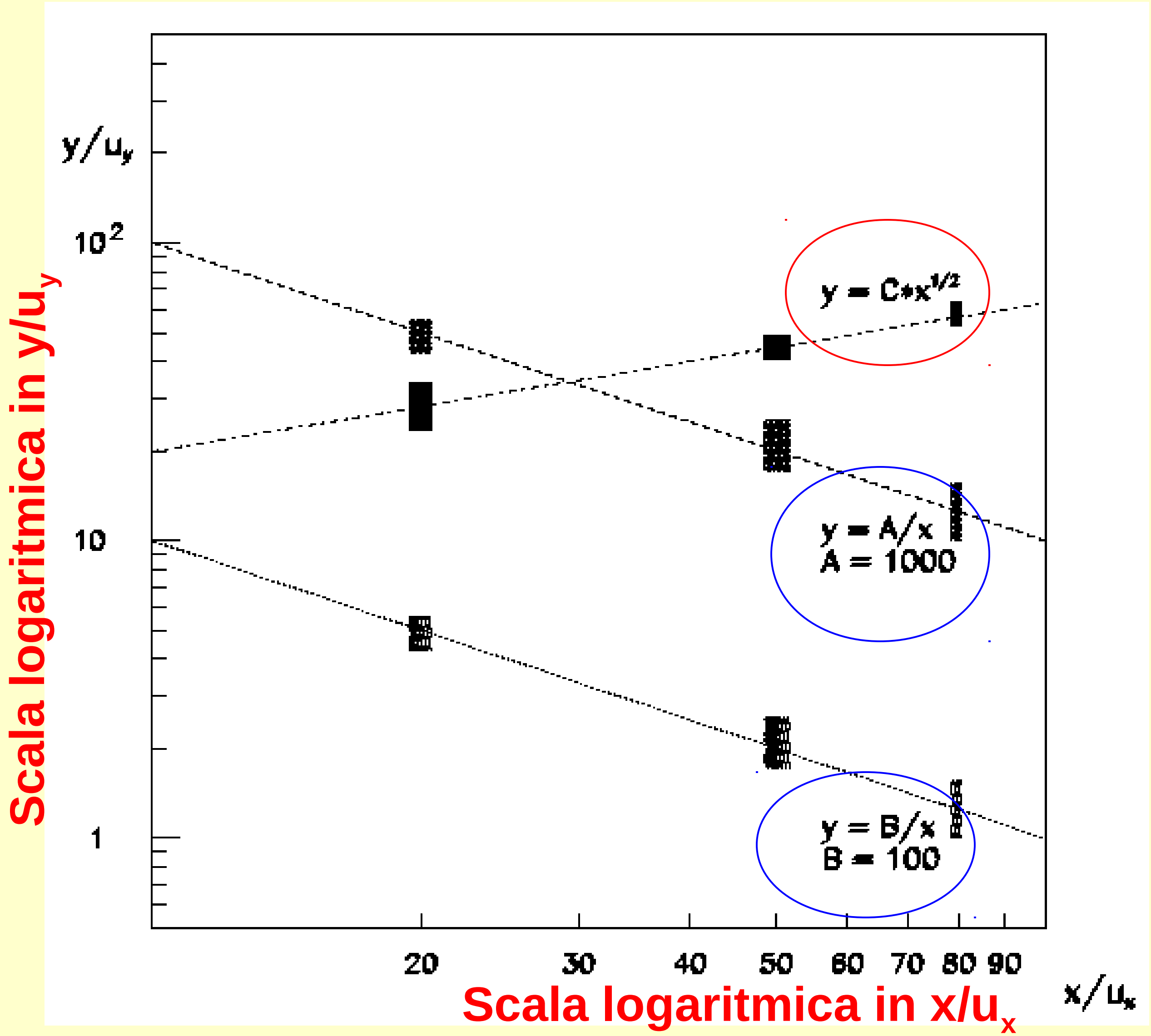
Scala lineare in $\log_{10}(\ y/u_y)$

Scala logaritmica in y/u_y

Scala lineare in x

$$y = a \cdot x^{\frac{b}{u_b}}$$

$$\log_{10}(y/u_y) = \log_{10}\left(\frac{a \cdot x^{\frac{b}{u_b}}}{u_y}\right) = \log_{10}\left(\frac{a \cdot \left(\frac{u_x}{u_x} \cdot x\right)^{\frac{b}{u_b}}}{u_y}\right) = \log_{10}\left(\frac{a \cdot u_x^{\frac{b}{u_b}}}{u_y}\right) + \frac{b}{u_b} \cdot \log_{10}\frac{x}{u_x}$$



Trattazione statistica dei dati

Ipotesi di partenza: contributo degli errori sistematici ridotto a livelli trascurabili rispetto a quello degli errori accidentali

Necessità: raccogliere un gran numero di dati per poterne studiare le caratteristiche
→ campione statistico significativo

Primo problema: organizzare i dati in maniera efficiente
Ex. si siano misurati i seguenti 10 valori x_i (in cm) della lunghezza x

$$11.35,\ 11.33,\ 11.34,\ 11.35,\ 11.36,\ 11.34,\ 11.34,\ 11.36,\ 11.37,\ 11.36$$

Definiamo x_k i valori numerici, diversi tra loro, ottenuti sperimentalmente e n_k il numero di volte che ciascun valore è stato misurato

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
x_k (cm)	11.33	11.34	11.35	11.36	11.37
n_k	1	3	2	3	1

$\boxed{\text{miglior stima della grandezza misurata}}$ → media $\overline{x}$ dei 10 valori misurati

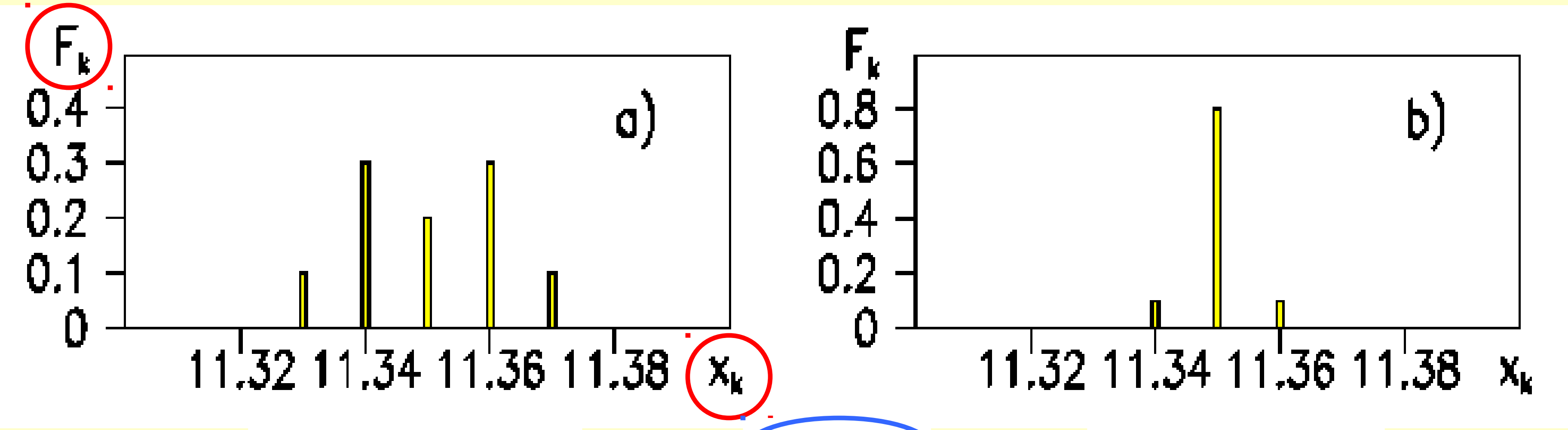
$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 11.35\ cm \rightarrow = \frac{\sum_{k=1}^{5} x_k\, n_k}{N} = \sum_{k=1}^{5} x_k\, F_k \rightarrow F_k = \frac{n_k}{N}$$

$\boxed{\text{“frequenza”}}$

condizione di normalizzazione ← $\sum_{k=1}^{5} F_k = 1$

Trattazione statistica dei dati

Istogramma a barre: caratterizza la distribuzione dei dati



Nostra serie dati → stesso $\bar{x}$ ← Altra serie dati

Necessità di un ulteriore parametro per differenziare le due distribuzioni

$\boxed{x_i - \bar{x} = d_i, \text{ detta deviazione}}$

ma → $$\bar{d} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\bar{x}}{N} = \bar{x} - \frac{\bar{x}\ N}{N} = 0\ cm$$ → **per ambedue le distribuzioni**

mentre $$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

deviazione standard

caso a) $\sigma_x = 0.012\ cm$

caso b) $\sigma_x = 0.004\ cm$