# Trattazione statistica dei dati

## Propagazione degli errori nel caso di incertezze accidentali e indipendenti tra loro

a) $z = x + A$ con $A$ costante nota

probabilità di ottenere un certo valore $x_i$

$$P_x(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x}\ e^{-\frac{(x_i - X)^2}{2\sigma_x^2}}\ dx$$

probabilità di avere il corrispondente valore $z_i = x_i + A$ di $z$

$$P_z(z_i) = P_x(z_i - A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x}\ e^{-\frac{[(z_i - A) - X]^2}{2\sigma_x^2}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x}\ e^{-\frac{[z_i - (X + A)]^2}{2\sigma_x^2}}\ dz$$

valore vero $Z = X + A$

larghezza $\sigma_x$

b) $z = B\ x$ con $B$ costante nota

probabilità di ottenere un certo valore $z_i = B\ x_i$

$$P_z(z_i) = P_x(z_i / B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x}\ e^{-\frac{[(z_i/B) - X]^2}{2\sigma_x^2}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ B\ \sigma_x}\ e^{-\frac{[z_i - (BX)]^2}{2\ B^2\ \sigma_x^2}}\ dz$$

valore vero $Z = BX$

larghezza $B\sigma_x$

# Trattazione statistica dei dati

## Propagazione degli errori nel caso di incertezze accidentali e indipendenti tra loro

c) $z = x + y$

Per le due grandezze misurate direttamente avremo

$$P_x(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x}\ e^{-\frac{(x_i-X)^2}{2\sigma_x^2}}dx \quad \text{e} \quad P_y(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_y}\ e^{-\frac{(y_i-Y)^2}{2\sigma_y^2}}dy$$

probabilità di ottenere un certo valore $z_i = x_i + y_i$

$$P_z(z_i) = P_x(x_i)\ P_y(y_i) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_x\ \sigma_y}\ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_i-X)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y_i-Y)^2}{\sigma_y^2}\right]}dx\ dy$$

ma

$$\frac{(x_i-X)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y_i-Y)^2}{\sigma_y^2} = \frac{(x_i-X+y_i-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}+\frac{\left[\sigma_y^2\ (x_i-X)\ -\ \sigma_x^2\ (y_i-Y)\right]^2}{\sigma_x^2\ \sigma_y^2\ (\sigma_x^2+\sigma_y^2)} = \frac{(x_i-X+y_i-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}+\alpha^2$$

da cui segue

$$P_z(z_i) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_x\ \sigma_y}\ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_i-X+y_i-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}\ e^{-\frac{\alpha^2}{2}}dx\ dy = \frac{1}{2\pi\ \sigma_x\ \sigma_y}\ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(z_i-X-Y)^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]}\ e^{-\frac{\alpha^2}{2}}dx\ dy$$

**Sommando su tutte le possibili coppie $x_i$, $y_i$ la cui somma vale $z_i$**

$$P_z(z_i) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(z_i-X-Y)^2}{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2}\right]}$$

valore vero $X+Y$

larghezza $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

# Trattazione statistica dei dati

## Propagazione degli errori nel caso di incertezze accidentali e indipendenti tra loro

d) caso generale $z = z(x, y)$

le incertezze relative sulle grandezze misurate direttamente $\sigma_x/\overline{x}$ e $\sigma_y/\overline{y}$ siano molto minori di 1

$$z_i = z(x_i, y_i) = z(X,Y) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{X,Y} (x_i - X) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{X,Y} (y_i - Y)$$

costante $A$

$B$ costante

$B$'costante

variabile distribuita normalmente intorno al valore vero 0 con parametro di larghezza $\sigma_x$. $\sigma_y$

Combinando i tre termini

i valori $z_i$ sono distribuiti normalmente intorno al valore vero $z(X,Y)$

parametro di larghezza

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2_{X,Y} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2_{X,Y} \sigma_y^2}$$

# Trattazione statistica dei dati

## Deviazione standard della media

100 misure della grandezza x — $x_{m1}, \sigma_{x1}$

altre 100 misure → totale (t) 200 misure — $x_{m2}, \sigma_{x2}$ — $x_{tm2} \approx x_{m1}$, $\sigma_{tx2} \approx \sigma_{x1}$

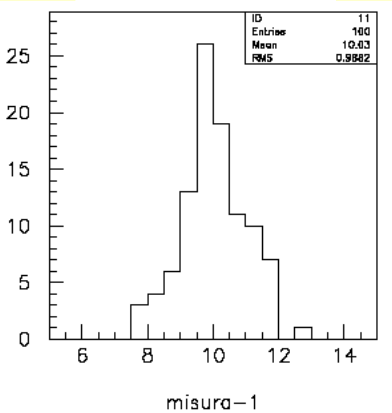
.
.
.

???

altre 100 misure → totale (t) 5000 misure — $x_{m50}, \sigma_{x50}$ — $x_{tm50} \approx x_{m1}$, $\sigma_{tx50} \approx \sigma_{x1}$

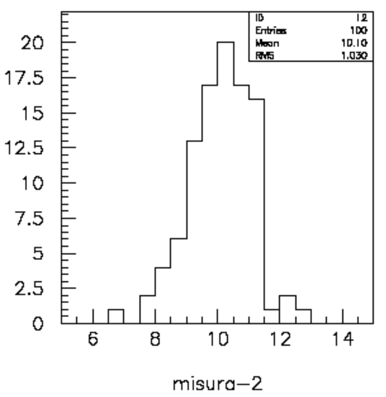
Misura della grandezza x (cm):

**100 misure**




$x_m$ = 10.03 cm
$\sigma_x$ = 0.97 cm

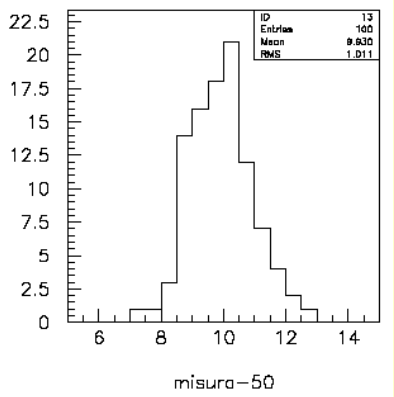
**100 misure**




$x_m$ = 10.10 cm
$\sigma_x$ = 1.03 cm

→ 3 ………… 49 →

**100 misure**

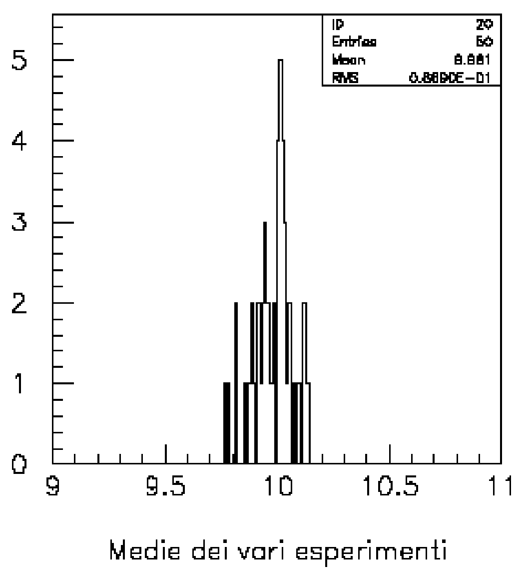



$x_m$ = 9.93 cm
$\sigma_x$ = 1.01 cm

# Trattazione statistica dei dati

## Deviazione standard della media

Distribuzione dei valori medi




**$x_m$ = 9.98 cm**
**$\sigma_{x_m}$ = 0.09 cm**
**≈ 1/10 cm**

la media è distribuita normalmente intorno al valore vero $X$ con

deviazione standard della media

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

**Incertezza con la quale il valor medio misurato stima statisticamente il valore vero**

**risultato della misura** $\overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}$ **Ma attentione!!! (errori sistematici)**

# Trattazione statistica dei dati

## Livello di confidenza

confrontare tra loro due misure di una grandezza $z$

$z_1 \pm \sigma_1 \qquad z_2 \pm \sigma_2$

ad es. (13.1±0.1) g (13.5±0.2) g

La deviazione $\tau$ tra le due misure è anch'essa distribuita normalmente

$$\tau_M = z_1 - z_2 \qquad \text{e} \qquad \sigma_\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$\tau_M$ = -0.4 g

$\sigma_\tau$ = 0.22 g

In generale $\tau_M$ sarà diverso da zero → valore corrispondente all'accordo perfetto

$$t = \mid \tau_M / \sigma_\tau \mid$$

$t$ = 1 .82

$$P(\text{al di fuori di } t\sigma_\tau) = 1 - P(\text{entro } t\sigma_\tau) = 1 - \int_{-t\sigma_\tau}^{+t\sigma_\tau} p(\tau)d\tau$$

dove $p(\tau)$ è la densità di probabilità gaussiana associata alla deviazione $\tau$.

$P(\text{al di fuori di } t\sigma_\tau)$ grande → due misure sono → consistenti tra loro

$P(\text{al di fuori di } t\sigma_\tau)$ piccola → due misure sono → inconsistenti tra loro

*P(1.82 $\sigma_\tau$ )* = 93 %

Il limite di accettabilità detto livello di confidenza convenzionalmente posto al 5%.

# Trattazione statistica dei dati

## Media pesata

$$x_1 \pm \sigma_1 \qquad x_2 \pm \sigma_2 \qquad x_3 \pm \sigma_3$$

tutte le misure siano consistenti tra loro

$$P_x(x_1) \propto \frac{1}{\sigma_1}\, e^{-\frac{(x_1-X)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad P_x(x_2) \propto \frac{1}{\sigma_2}\, e^{-\frac{(x_2-X)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad P_x(x_3) \propto \frac{1}{\sigma_3}\, e^{-\frac{(x_3-X)^2}{2\sigma_3^2}}$$

probabilità di ottenere la terna di misure

$$P_x(x_1,\ x_2,\ x_3) = P_x(x_1)\ P_x(x_2)\ P_x(x_3) \propto \frac{1}{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

con

$$\chi^2 = \left(\frac{x_1 - X}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - X}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - X}{\sigma_3}\right)^2$$

principio di massima verosimiglianza

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial X} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{X_M = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3}{\sigma_3^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}}}$$

**Media pesata** con pesi →

$$w_1 = \frac{1}{\sigma_1^2} \qquad w_2 = \frac{1}{\sigma_2^2} \qquad w_3 = \frac{1}{\sigma_3^2}$$

$$\boxed{\sigma_{X_M} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial X_M}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}}$$

# Trattazione statistica dei dati

## Covarianza nella propagazione degli errori

$z = z(x, y)$ → $N$ misure $(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \ldots,\ x_N,\ y_N)$ → $\overline{x},\ \overline{y}$ e $\sigma_x,\ \sigma_y$

In corrispondenza delle $N$ coppie $x_i,\ y_i$ potremo determinare $N$ valori di $z_i$

incertezze relative nelle misure dirette siano $\ll 1$

$$z_i = z(x_i, y_i) = z(\overline{x},\ \overline{y}) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} (x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} (y_i - \overline{y})$$

$$\overline{z} = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[z(\overline{x},\overline{y}) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} (x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} (y_i - \overline{y})\right] = z(\overline{x},\overline{y})$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \overline{z})^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} (x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} (y_i - \overline{y})\right]^2 =$$
$$= \boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy}}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

covarianza

**Se le misure di x e y sono indipendenti → $\sigma_{xy} \to 0$ per N → ∞**

**Se le misure NON sono indipendenti → $\sigma_{xy} > 0$ ma**

$$\sigma_z \leq \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_y$$