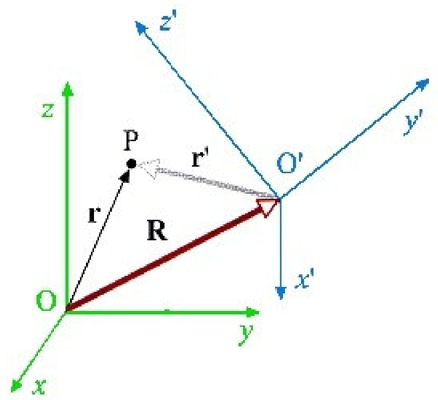
Cinematica dei moti relativi

Carattere relativo del moto --> scelta sistema di riferimento

Cercheremo le leggi di trasformazione “classiche” dei vettori velocità $\bar{v}$ e accelerazione $\bar{a}$ di uno stesso punto materiale tra due sistemi di riferimento in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

Dati due sistemi di riferimento (SdR) **S** e **S'**, indichiamo con $\bar{R}$ il vettore posizione dell'origine O' di S' rispetto all'origine O di S. La posizione di un punto P è individuata in S dal vettore posizione $\bar{r}$ e in S' da $\bar{r}\,'$; potremo scrivere:

$$\bar{r} = (\bar{r} - \bar{R}) + \bar{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \bar{r}\,' + \bar{R}$$



purché valgano le seguenti condizioni:

1) lo spazio sia assoluto --> indipendente da SdR
--> osservatori in S e S' misurano le stesse distanze necessarie per determinare i vettori

2) il tempo sia assoluto --> indipendente da SdR
--> osservatori in S e S' misurano lo stesso intervallo di tempo Δt per determinare la durata di uno stesso fenomeno

--> concetto di contemporaneità necessario per stabilire che le misure sono realizzate allo stesso istante

Nel seguito supporremo sempre che le due precedenti condizioni siano soddisfatte e quindi potremo scrivere

$$\bar{r} = \bar{r}\,' + \bar{R}$$

Derivate di vettori e SdR

Per un generico vettore $\bar{w}$ potremo scrivere in S e S'

$$\bar{w} = w_x \bar{u}_x + w_y \bar{u}_y + w_z \bar{u}_z = w_x' \bar{u}_x' + w_y' \bar{u}_y' + w_z' \bar{u}_z'$$

La derivata rispetto al tempo di w in S è data da

$$(d\bar{w}/dt)_S = (dw_x'/dt)_S \bar{u}_x' + (dw_y'/dt)_S \bar{u}_y' + (dw_z'/dt)_S \bar{u}_z' +$$

$$w_x'(d\bar{u}_x'/dt)_S + w_y'(d\bar{u}_y'/dt)_S + w_z'(d\bar{u}_z'/dt)_S$$

e inoltre sappiamo che

$$(d\bar{u}_x'/dt)_S = \bar{\omega}_1 \times \bar{u}_x' \qquad (d\bar{u}_y'/dt)_S = \bar{\omega}_2 \times \bar{u}_y' \qquad (d\bar{u}_z'/dt)_S = \bar{\omega}_3 \times \bar{u}_z'$$

Per la permanenza nel tempo dell'ortogonalità tra $\bar{u}_x'$, $\bar{u}_y'$ e $\bar{u}_z'$

si ha che $\quad \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}(t)$

dove $\bar{\omega}(t)$ caratterizza il moto rotatorio relativo delle due terne

Per la condizione di tempo assoluto avremo

$$(dw_x'/dt)_S = (dw_x'/dt)_{S'} \qquad \text{e analoghe per y e z}$$

e quindi concludendo otteniamo

$$\mathbf{(d\bar{w} / dt)_S = (d\bar{w} /dt)_{S'} + \bar{\omega} \times \bar{w}}$$

che esprime la variazione nel tempo del vettore $\bar{w}$ come vista nei due SdR

Trasformazione del vettore velocità

Per il vettore velocità nel sistema di riferimento S possiamo scrivere

$\bar{v} = (d\bar{r}/dt)_S = (d\bar{R}/dt)_S + (d\bar{r}\,'/dt)_S = (d\bar{R}/dt)_S + (d\bar{r}\,'/dt)_{S'} + \bar{\omega} \times \bar{r}\,'$

$= (d\bar{R}/dt)_S + \bar{v}\,' + \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R}) = \bar{v}\,' + (d\bar{R}/dt)_S + \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R})$

$= \bar{v}\,' + \bar{v}_t$ --> **legge di trasformazione delle velocità**

con $\bar{v}_t$ velocità di trascinamento ($\bar{v} = \bar{v}_t$ se $\bar{v}\,' = 0$)

La velocità $\bar{v}$ di un generico punto in S è data dalla somma vettoriale della velocità $\bar{v}\,'$ in S' e della velocità $\bar{v}_t$ in S del punto solidale con S' istantaneamente coincidente con il punto mobile

- Applicazioni -

1) $\bar{\omega} = 0$ --> $\bar{v}_t = (d\bar{R}/dt)_S$ identico per tutti i punti in S'
--> S' effettua un moto di “traslazione” rispetto a S
--> i versori in S' si mantengono paralleli a sé stessi

2) $\bar{\omega} \neq 0$ --> $\bar{v}_t$ varia da punto a punto in S'

caso particolare --> se $(d\bar{R}/dt)_S = 0$ allora
$\bar{v}_t = \bar{\omega}(t) \times (\bar{r} - \bar{R})$
ovvero $\bar{v}_t$ rappresenta la velocità di un punto materiale che si muove in S di moto circolare, con velocità angolare $\bar{\omega}(t)$, sulla circonferenza di asse (variabile nel tempo) parallelo a $\bar{\omega}(t)$ e passante per O'
--> S' è in “rotazione” rispetto a S

Trasformazione del vettore accelerazione

Per il vettore accelerazione nel sistema di riferimento S possiamo scrivere [essendo $\bar{v} = \bar{v}' + (d\bar{R}/dt)_S + \bar{\omega} \times \bar{r}'$]

$$\bar{\mathbf{a}} = (d\bar{v}/dt)_S = (d\bar{v}'/dt)_S + (d^2\bar{R}/dt^2)_S + (d\bar{\omega}/dt)_S \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (d\bar{r}'/dt)_S$$

Utilizzando la relazione $(d\bar{v}'/dt)_S = (d\bar{v}'/dt)_{S'} + \bar{\omega} \times \bar{v}' = \bar{a}' + \bar{\omega} \times \bar{v}'$

ricaviamo infine [ricordando che $(d\bar{r}'/dt)_s = (d\bar{r}'/dt)_{S'} + \bar{\omega} \times \bar{r}'$]

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{\omega} \times \bar{v}' + (d^2\bar{R}/dt^2)_S + (d\bar{\omega}/dt)_S \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \bar{v}' + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{r}']$$

$$= \bar{a}' + 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}' + (d^2\bar{R}/dt^2)_S + (d\bar{\omega}/dt)_S \times (\bar{r} - \bar{R}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R})]$$

Da questa otteniamo l'accelerazione di trascinamento $\bar{a}_t$ ponendo $\bar{a}' = 0$ e $\bar{v}' = 0$

$$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} = (d^2\bar{R}/dt^2)_S + (d\bar{\omega}/dt)_S \times (\bar{r} - \bar{R}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R})] =$$

$$= \quad \bar{A} \quad + \quad \bar{\alpha} \quad \times (\bar{r} - \bar{R}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R})]$$

con $\bar{A}$ accelerazione di O' in S e $\bar{\alpha}$ accelerazione angolare di S' rispetto a S

Se poi si definisce l'accelerazione di Coriolis con la relazione

$$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{Co}} = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}'$$

si ottiene infine

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}' + \bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} + \bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{Co}}$$ --> **legge di trasformazione delle accelerazioni**

Trasformazione del vettore accelerazione

$\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}\,' + 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}\,' + (d^2\bar{R}/dt^2)_S + (d\bar{\omega}/dt)_S \times (\bar{r} - \bar{R}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{R})]$

$\quad = \bar{\mathbf{a}}\,' + \bar{\mathbf{a}}_{Co} + \bar{\mathbf{a}}_t$

$\bar{\mathbf{a}}_t = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}} \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{R}}) + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times [\bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{R}})]$

$\bar{\mathbf{a}}_{Co} = 2\,\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{v}}\,'$

Commenti

$\bar{\mathbf{a}}_t$ rappresenta l'accelerazione in S del punto solidale con S' in cui viene a trovarsi il punto materiale mobile(per esso $\bar{a}\,' = 0$ e $\bar{v}\,' = 0 \rightarrow \bar{a}_{Co} = 0$)

$\bar{\mathbf{a}}_{Co}$ per capirne l'importanza consideriamo il semplice caso in cui O = O' e S' ruota con velocità angolare $\bar{\omega}$ costante (antiorario) intorno a $\bar{u}_z = \bar{u}_z'$ ed inoltre P in quiete in S

→ osservatore in S'
vede ruotare P orario ($-\bar{\omega}$), con velocità
$\bar{v}\,' = -\bar{\omega} \times \bar{r}$ e con accelerazione centripeta $\bar{a}\,' = -\omega^2 \bar{r}$

→ osservatore in S

$$\bar{v} = \bar{v}\,' + \bar{v}_t = -\bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{r} = 0$$

$$\bar{a} = \bar{a}\,' + \bar{a}_t + \bar{a}_{Co} = -\omega^2 \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}\,' =$$

$$= -\omega^2 \bar{r} \quad - \omega^2 \bar{r} \qquad + 2\,\omega^2 \bar{r} \quad = 0$$

Moto relativo di traslazione rettilinea

Se $\overline{\omega} = 0 \rightarrow$ moto relativo di S' rispetto a S è caratterizzato dal solo vettore $\overline{v}_t$.
Le relazioni di trasformazione diventano in tal caso

(1) $\overline{v} = \overline{v}' + \overline{v}_t$ $\qquad\qquad$ $\overline{a} = \overline{a}' + \overline{a}_t$ (2)

Se $\overline{v}_t$ = costante in direzione e verso -->
S' in traslazione rettilinea rispetto a S

Se $\overline{v}_t$ rimane costante nel tempo → $\overline{a}_t = 0$ →

→ S' in traslazione rettilinea uniforme rispetto a S

In tali condizioni supponiamo che a t = t' = 0 sia O=O'; avremo

$$\overline{r} = \overline{r}' + \overline{v}_t t' \qquad\qquad \overline{r}' = \overline{r} - \overline{v}_t t$$
$$t = t' \qquad\qquad t' = t$$

Leggi di trasformazione di Galileo
(valide per i “sistemi inerziali” = $\overline{v}_t$ costante nel tempo)

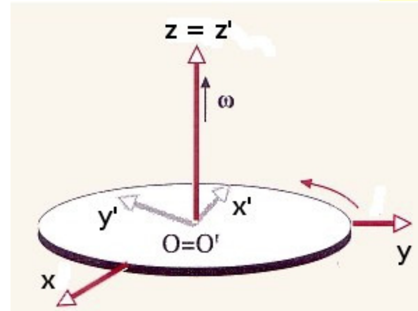
Dalla (1) segue che la velocità di un punto materiale dipende dal sistema di riferimento (“non invariante”) ma sperimentalmente la velocità della luce nel vuoto è indipendente dal SdR.

Conseguenza --> revisione del carattere assoluto dello spazio e del tempo
--> “Leggi di trasformazione di Lorentz” che
- rendono velocità della luce c “invariante”
- coincidono con quelle di Galileo se $|\overline{v}_t| << c$

Dalla (2) segue che nei sistemi inerziali l'accelerazione di un punto materiale non dipende dal sistema di riferimento (“invariante”, importante nella dinamica)

Moto relativo di rotazione

Il moto relativo di S' rispetto ad S è caratterizzato dal solo vettore velocità angolare $\overline{\omega}$ costante e diretto lungo l'asse z di S.



Consideriamo ora un punto materiale P in moto con velocità costante lungo x '

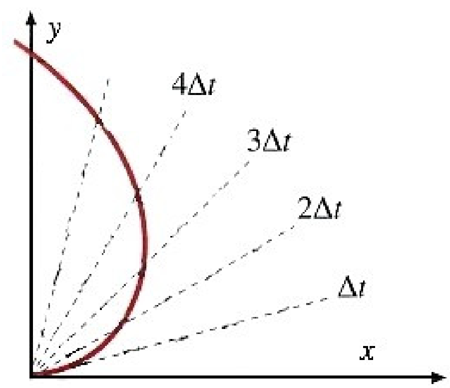
$$\overline{v}\,' = v_0'\,\overline{u}_{x'} = v_0'\,\overline{u}_r$$

Per semplicità scegliamo t = t ' = 0 quando P passa da O = O'

Composizione del moto rettilineo uniforme ($r = v_0'\,t$) e della rotazione uniforme ($\theta = \omega\, t$) dell'asse x '. Eliminando t dalle due relazioni si ottiene

$$r = (v_0'/\,\omega)\,\theta$$

che descrive la traiettoria nel sistema di riferimento di coordinate polari piane (r,θ).



Caratterizzazione in S

- traiettoria curva --> moto accelerato
- velocità di trascinamento

$$\overline{v}_t = \overline{\omega} \times \overline{r} = \overline{\omega} \times (v_0'\,t\,\overline{u}_r) = \omega\, v_0'\,t\,\overline{u}_\theta$$

perpendicolare al vettore $\overline{r}$ e di modulo ($\omega\, r$) e crescente con r (e quindi con t)

infine $\overline{v} = \overline{v}\,' + \overline{v}_t = v_0'\,\overline{u}_r + \omega\, v_0'\,t\,\overline{u}_\theta = \overline{v}_{//} + \overline{v}_\perp$

$\overline{v}_{//}$ è costante, $\overline{v}_\perp$ cresce con t --> $\overline{v} = \overline{v}(t)$ --> $\overline{a} \neq 0$

- accelerazione

$$\overline{a} = \overline{a}\,' + \overline{a}_t + \overline{a}_{Co} = \overline{a}_t + \overline{a}_{Co}$$

con $\overline{a}_t = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = -\omega^2\,\overline{r} = -\omega^2\, v_0'\,t\,\overline{u}_r$

(accelerazione centripeta punto solidale con S')

e $\overline{a}_{Co} = 2\,\overline{\omega} \times \overline{v}\,' = 2\,\omega\, v_0'\,\overline{u}_\theta$

(perpendicolare ad $\overline{a}_t$ e costante)

Esercizi sui moti relativi

1) Un battello fa servizio lungo un tratto rettilineo di fiume tra due stazioni, ubicate sulla stessa sponda del fiume, la cui distanza è d = 30 km. Per percorrere tale distanza il battello impiega un tempo t_1 = 1.0 h quando viaggia nel senso della corrente, mentre impega un tempo t_2 = 2.5 h quando va contro corrente.
Determinare:
a) La velocità v (in modulo) del battello rispetto all'acqua, supponendo che sia la stessa sia all'andata che al ritorno
b) La velocità v_0 dell'acqua del fiume
Sapendo poi la larghezza del fiume, determinare:
c) Il tempo che impiegherebbe il battello ad attraversare il fiume muovendosi perpendicolarmente al suo argine sempre con la solita velocità rispetto all'acqua del fiume.

[R. a) 21.0 km/h, b) 9.0 km/h, c) 95 s]

2) Una barca si muove in direzione Sud-Est con un azimut (angolo rispetto al Nord) di 135° e una velocità di 10 nodi = 10 miglia nautiche / h = 10 * 1.852 km/h = 0.514 m/s.
Nella zona è presente un vento con un azimut di 0° e velocità 20 km/h.
Determinare la direzione indicata dalla banderuola in cima all'albero della barca (corrispondente alla direzione del "vento apparente" percepito dalla barca)

[R. azimut della banderuola = -21.6°]

3) Un punto materiale (pallina) si muove radialmente di moto rettilineo uniforme (v_0 = 1 m/s) su una piattaforma (giostra) rotante con velocità angolare ω = 1 giro/ 24 s.
Determinare, rispetto ad un sistema fisso, le seguenti caratteristiche del moto del punto materiale:
a) traiettoia
b) le componenti del vettore velocità
c) le componenti del vettore accelerazione

[R. a) $r = (v_0/\omega)\,\theta$ b) $\overline{v} = v_0\,\overline{u}_r + \omega\, v_0 t\,\overline{u}_\theta$

c) $\overline{a} = \overline{a}_t + \overline{a}_{Co} = -\omega^2 v_0 t\,\overline{u}_r + 2\,\omega\, v_0\,\overline{u}_\theta$]