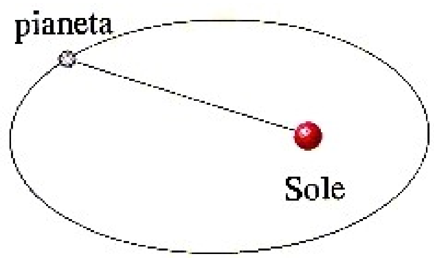
Dinamica in presenza di forze centrali

Leggi di gravitazione
(ricavate sperimentalmente
da Keplero, 1600)



Prima legge: le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi

Seconda legge: il raggio vettore che congiunge il centro del Sole col centro di ogni pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle

Terza legge: I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti del Sistema Solare sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite ellittiche

Basandosi su queste leggi, Newton concluse che la legge di gravitazione poteva essere espressa nella forma

$$\overline{f}_g = -G\,(m_p M_S / r^2)\,\bar{u}_r = -(\alpha / r^2)\,\bar{u}_r$$

con $\bar{u}_r$ versore che individua la posizione di m_p rispetto a M_S (o viceversa) e

$$G = (6.6726 \pm 0.0008) * 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$$

Infatti

1) imponendo $d\bar{q}/dt = \overline{f}_g = -(\alpha / r^2)\bar{u}_r$ e ricordando $\bar{u}_r = -d\bar{u}_\theta/d\theta =$ $= -(d\bar{u}_\theta / dt)(dt/d\theta)$, si ottiene che il vettore $(p/\alpha)\bar{v} - \bar{u}_\theta$ (con $p = |\bar{p}| = |\bar{r} \times \bar{q}| = r^2\, d\theta/dt$) ha modulo costante (pari a e) e quindi l'equazione della traiettoria è
$$(1/r) = (m\alpha/p^2)(1 + e\cos\theta) \qquad \text{ovvero}$$
l'equazione di una conica in coordinate polari (e<1 ellisse)
2) costanza velocità areolare
3) la forza gravitazionale fornisce la necessaria forza centripeta e quindi $f_g / m_p = \omega^2 r = (4\pi^2 / T^2)\, r \;\text{-->}\; T^2 / r^3 = (4\pi^2 / GM_S)$

Dinamica nei SdR non inerziali

Sistemi Inerziali -> accelerazione NON dipendente dal SdR
-> secondo principio della Dinamica ha
la stessa forma in tutti i SdR ($\overline{f} = \overline{f}\,'$, $\overline{a} = \overline{a}'$)

Sistemi Non Inerziali -> secondo principio non è più valido
nella forma $\overline{f} = m\overline{a}$ se $\overline{f}$ rappresenta
il risultante delle forze dovute a corpi
agenti sul punto materiale considerato

Note le caratteristiche di S' (non inerziale) rispetto a
S (inerziale), in S avremo

$$\overline{f} = m\,\overline{a} = m\,(\,\overline{a}' + \overline{a}_t + \overline{a}_{Co})$$

e quindi in S'

$$m\,\overline{a}' = \overline{f} - m\,\overline{a}_t - m\,\overline{a}_{Co} = \overline{f} + \overline{f}_t + \overline{f}_{Co} = \overline{f}\,'$$

ovvero nuovamente la forma del secondo principio ma con $\overline{f}\,'$
che tiene conto anche delle “forze inerziali” o “forze fittizie”

$\overline{f}_t$ (forza di trascinamento) = - m $\overline{a}_t$ e

$\overline{f}_{Co}$ (forza di Coriolis) = - m $\overline{a}_{Co}$

Vediamo nel seguito alcune applicazioni

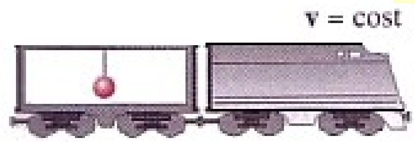
Dinamica in SdR S' accelerato

Oggetto in quiete in S'

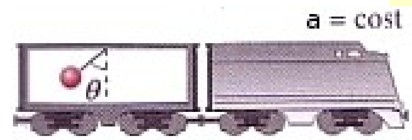
-> Se **S' è fermo o in moto rettilineo uniforme** rispetto a S l'oggetto rimane in quiete senza forze applicate

-> Se **S' accelera rettilineamente** rispetto a S per mantenere l'oggetto in quiete in S' è necessario applicare una forza $\overline{f}\,'$ tale che $\overline{f}\,' + \overline{f}_t = 0$

Pendolo di massa m appeso a sostegno fisso in S'



-> Se S' è fermo o in moto rettilineo uniforme rispetto a S il pendolo si dispone lungo la verticale



-> Se S' ha accelerazione rettilinea $\underline{a}_t$ rispetto a S il pendolo si dispone ad un angolo θ rispetto alla verticale

in S -> massa m accelera e quindi, se $\overline{T}$ è la tensione del filo

$\overline{P} + \overline{T} = m\,\overline{a}_t$ -> $\tan\theta = a_t/g$

in S' -> massa m in quiete e quindi

$\overline{P} + \overline{T} + \overline{f}_t = 0$ -> $\overline{T} = -\overline{P} + m\overline{a}_t$

$= -m\,(\overline{g} - \overline{a}_t)$

interpretabile come dovuto ad un campo gravitazionale diverso da quello terrestre

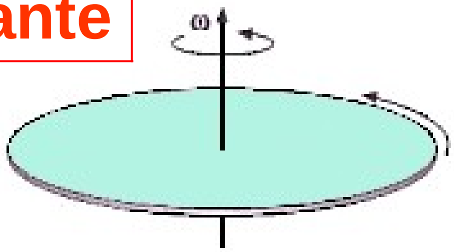
Corpo di massa m lasciato in caduta libera da S'

in S -> massa m, lasciata con velocità iniziale v_0, segue traiettoria parabolica con $\overline{a} = \overline{g}$

in S' -> massa m in caduta, lungo retta individuata da pendolo, con velocità iniziale nulla ed accelerazione $\overline{a}\,' = \overline{g} - \overline{a}_t$

Gli esempi sono indicativi dei fenomeni che permettono ad un osservatore in S' di capire che si trova su un sistema non inerziale e di misurare la sua accelerazione rispetto a S.

Dinamica in SdR S' rotante



SdR S' solidale con piattaforma rotante con velocità angolare costante $\overline{\omega} = \omega\, \overline{u}_z$

accelerazione di trascinamento

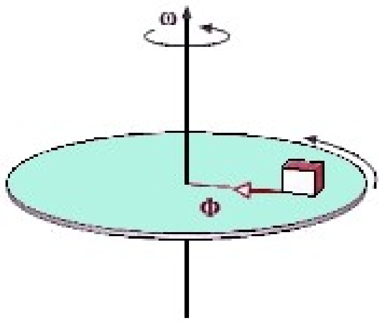
$$\overline{a}_t = (d^2 \overline{R}/dt^2)_S + (d\overline{\omega}/dt)_S \times (\overline{r} - \overline{R}) + \overline{\omega} \times [\overline{\omega} \times (\overline{r} - R)]$$

coincide con accelerazione centripeta di un punto solidale con la piattaforma e quindi la forza inerziale di trascinamento è data da

$$\overline{f}_t = - m\, \overline{a}_t = m\, \omega^2\, r\, \overline{u}_r \qquad \text{(forza centrifuga)}$$

con $\overline{u}_r$ versore uscente radialmente dall'asse di rotazione e passante per il punto considerato

Corpo di massa m in quiete in S' a distanza r da asse

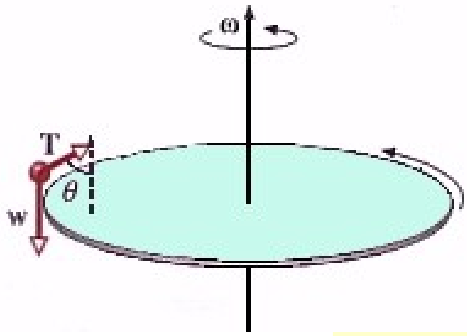


in S -> massa m compie moto circolare uniforme e quindi su di esso agisce forza centripeta

$$\overline{f} = - m\, \omega^2\, r\, \overline{u}_r$$

in S' -> massa m in quiete e quindi su di essa deve agire una forza $\overline{f}$ tale da compensare la forza centrifuga $\overline{f}_t$

Pendolo di massa m appeso a sostegno fisso in S'



Il pendolo si dispone ad un angolo θ, rispetto alla verticale, che cresce al crescere della distanza d del sostegno fisso dall'asse

in S -> su massa m agiscono $\overline{P}$ e $\overline{T}$ in modo da dare moto circolare uniforme e quindi una accelerazione centripeta costante $\overline{a}_n = - \omega^2\, r\, \overline{u}_r$

in S' -> massa m in quiete sotto l'azione di tre forze

$$\overline{P} + \overline{T} + \overline{f}_t = \overline{P} + \overline{T} + m\, \omega^2\, r\, \overline{u}_r = 0 \rightarrow$$

$$\overline{P} + \overline{T} = - m\, \omega^2\, r\, \overline{u}_r$$

Dinamica in SdR S' rotante

Corpo di massa m libero sulla piattaforma liscia rotante

in S -> massa m rimane ferma nella posizione iniziale

in S' -> massa m si muove di moto circolare uniforme in senso orario con velocità

$$\bar{v}\,' = -\bar{\omega} \times r\,\bar{u}_r$$

e su essa deve quindi agire una forza (fittizia) risultante centripeta

$$\bar{f}\,' = -m\,\omega^2\,r\,\bar{u}_r$$

avente stessa direzione e modulo della forza centrifuga di trascinamento $\bar{f}_t = m\,\omega^2\,r\,\bar{u}_r$ ma verso opposto.
Infatti sulla massa m agisce anche la forza di Coriolis

$$\bar{f}_{Co} = -m\,\bar{a}_{Co} = -2\,m\,\bar{\omega} \times \bar{v}\,' =$$
$$= -2\,m\,\bar{\omega} \times (-\bar{\omega} \times r\,\bar{u}_r) = -2\,m\,\omega^2\,r\,\bar{u}_r$$

La forza di Coriolis è sempre
-> $\perp$ a $\bar{v}\,'$
-> ha verso tale da determinare una deviazione verso la destra dell'osservatore che, disposto lungo $\bar{\omega}$, guardi nella direzione istantanea di $\bar{v}\,'$

Sistema di riferimento terrestre

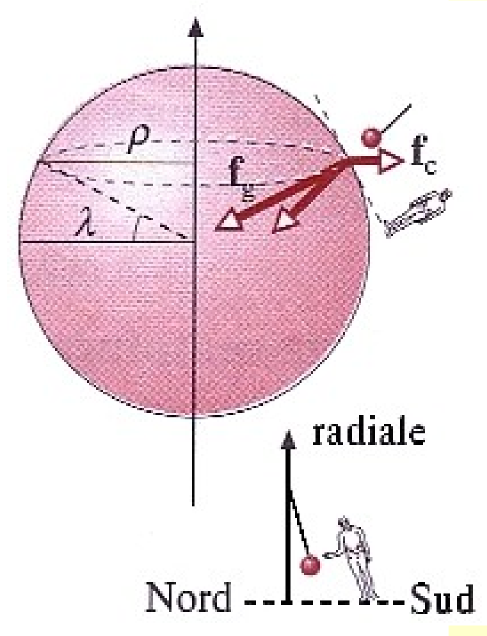
SdR ancorato alla Terra
Sistema in rototraslazione rispetto SdR inerziale(quello delle stelle fisse).Trascureremo la traslazione associata alla rivoluzione intorno al Sole.

In tali ipotesi la forza fittizia dovuta al trascinamento si riduce alla forza centrifuga

$$\overline{\mathbf{f}}_C = \overline{\mathbf{f}}_t = -\,m\,\bar{\omega} \times (\,\bar{\omega} \times r'\,\bar{u}_r) = m\,\omega^2\,\rho\,\bar{u}_\rho$$

dove ρ è il raggio del parallelo terrestre nel punto considerato.

Tale forza centrifuga fittizia si compone a quella dovuta alla attrazione gravitazionale $\overline{f}_G$ (che per una Terra sferica ed omogenea avrebbe direzione radiale) e quindi **la verticale** (direzione di allineamento del pendolo) si sposta **verso Sud nell'emisfero settentrionale**, verso Nord in quello meridionale, rispetto alla direzione radiale.



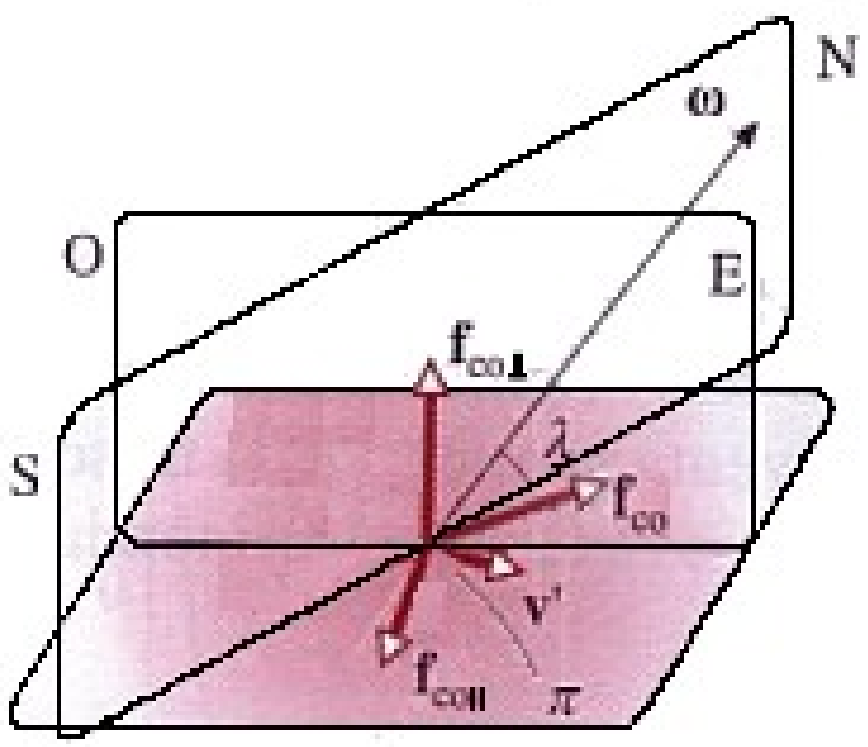
Accelerazione centrifuga alla latitudine λ:
$\omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 7.3 \cdot 10^{-5}$ rad/s,
$R_T = 6.4 \cdot 10^6$ m

a $= \omega^2 \rho = \omega^2 R_T \cos\lambda =$ **$3.4 \cdot 10^{-2} \cos\lambda$ m/s²** $\leftrightarrow$ **g = 9.8 m/s²**

Sistema di riferimento terrestre

SdR ancorato alla Terra

Caduta libera -> all'effetto della forza centrifuga si aggiunge quello della **forza di Coriolis** ($-2\, m\, \bar{\omega} \times \bar{v}\, '$) diretta **verso Est** (in ambedue gli emisferi)



Moto su piano orizzontale
-> forza di Coriolis ha
- componente ⊥ al piano (modifica peso)
- componente // al piano (verso destra in emisfero Nord, sinistra in quello Sud) e di modulo f_{Co} sin λ (massima ai poli e nulla all'Equatore)

-> correnti di masse d'aria da Ovest ad Est