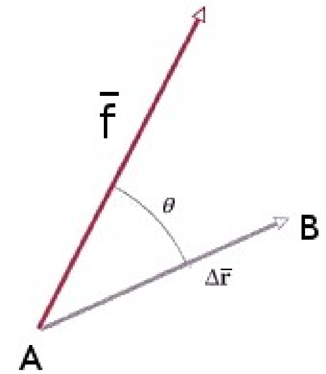
Lavoro ed Energia

Lavoro di una forza

1) forza $\bar{f}$ indipendente dal punto di applicazione e dal tempo.
Se il suo punto di applicazione effettua uno spostamento $\overline{AB}$, si definisce "**lavoro della forza $\bar{f}$**"



$$L_{AB} = \bar{f} \cdot \overline{AB} = \bar{f} \cdot (\bar{r}_B - \bar{r}_A) =$$
$$= \bar{f} \cdot \Delta\bar{r} = f\, \Delta r \cos\theta$$

Se $\theta < \pi/2$ --> $L_{AB} > 0$ --> "**lavoro motore**"

Se $\theta > \pi/2$ --> $L_{AB} < 0$ --> "**lavoro resistente**"

2) forza f dipendente dal punto di applicazione
Si suddivide lo spostamento del punto di applicazione $\Delta\bar{r}$ nella somma di spostamenti $\Delta\bar{r}_i$ sufficientemente piccoli da considerare $\bar{f}$ costante e si ha $\quad L \approx \Sigma_i\, \bar{f}(r_i) \cdot \Delta\bar{r}_i$

Il valore del lavoro è ottenuto calcolando il limite di tale espressione per $\Delta\bar{r}_i$ (finiti) -> $d\bar{r}$ (infinitesimi), definendo il **lavoro elementare** $\quad \delta L = \bar{f} \cdot d\bar{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

e ottenendo, lungo una traiettoria α che va da A a B

$$L_{AB} = {}_\alpha\!\int_A^B \delta L = {}_\alpha\!\int_A^B \bar{f} \cdot d\bar{r} = {}_\alpha\!\int_{X_A}^{X_B} f_x dx + {}_\alpha\!\int_{Y_A}^{Y_B} f_y dy + {}_\alpha\!\int_{Z_A}^{Z_B} f_z dz$$

L_{AB} dipende in genere, oltre che da A e B, dalla particolare traiettoria α seguita. Se L_{AB} è indipendente da α la forza $\bar{f}$ viene detta "**conservativa**"

Principio di indipendenza delle azioni simultanee

Se più forze $\bar{f}_i$ agiscono su un punto materiale, il lavoro della forza risultante $\bar{f}$ è uguale alla somma dei lavori $L_{AB\,i}$ delle singole forze

$$L_{AB} = {}_\alpha\!\int_A^B \bar{f} \cdot d\bar{r} = {}_\alpha\!\int_A^B \Sigma_i\, \bar{f}_i \cdot d\bar{r} = \Sigma_i\, {}_\alpha\!\int_A^B \bar{f}_i \cdot d\bar{r} = \Sigma_i\, L_{AB\,i}$$

Forze conservative

Se il lavoro delle forze agenti sul punto materiale lungo un percorso dipende solo dagli estremi del percorso le forze vengono dette “**conservative**”. Perché ciò accada è necessario e sufficiente che esista **una funzione scalare della sola posizione V (r)** tale che sia verificata la relazione

$$\delta L = -\,dV \quad \text{-->} \quad L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = -\,{}_{\alpha}\int_A^B dV = V_A - V_B = -\,\Delta V$$

In tal caso il lavoro elementare è un “differenziale esatto”. La grandezza V (r) prende il nome di “**energia potenziale**” ed è definita a meno di una costante additiva arbitraria.

Se esiste l'energia potenziale V (r), potremo scrivere

$$\boldsymbol{\delta L} = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \boldsymbol{-dV} = -\,(\partial V/\partial x)dx - (\partial V/\partial y)dy - (\partial V/\partial z)dz$$

$$\rightarrow \overline{f} = -\,\mathrm{grad}\, V(x,y,z) = -\,\overline{\nabla} V(x,y,z)$$

con l'operatore vettoriale $\overline{\nabla}$ (**nabla**) definito da

$$\overline{\nabla} = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$$

Potremo inoltre definire il vettore “**rotore di f** ” tramite

$$\mathrm{rot}\,\overline{f} = \overline{\nabla} \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\partial f_z/\partial y - \partial f_y/\partial z)\bar{u}_x + (\partial f_x/\partial z - \partial f_z/\partial x)\bar{u}_y + (\partial f_y/\partial x - \partial f_x/\partial y)\bar{u}_z$$

Se l’insieme di definizione di $\overline{f}$ è semplicemente connesso (ovvero senza buchi o composto di pezzi non separati) e f è una forza conservativa --> $\mathrm{rot}\,\overline{f} = \overline{\nabla} \times \overline{f} = \overline{\nabla} \times (-\,\overline{\nabla} V) = 0$

[poiché $\partial f_z/\partial y = \partial f_y/\partial z$, $\partial f_x/\partial z = \partial f_z/\partial x$, $\partial f_y/\partial x = \partial f_x/\partial y$, ovvero $\partial^2 V/\partial y\partial z = \partial^2 V/\partial z\partial y$, $\partial^2 V/\partial z\partial x = \partial^2 V/\partial x\partial z$, $\partial^2 V/\partial x\partial y = \partial^2 V/\partial y\partial x$, è condizione sempre verificata]

Esempi di forze (campi) conservative

1) **Forza peso**

- campo uniforme ($\overline{f}$ indipendente da $\overline{r}$)
  -> **conservativo** in quanto derivate nel rotore tutte nulle
- scelto un SdR cartesiano con asse z verso l'alto si ha
  -> **$\overline{f}$ = (0, 0, -mg)**
- $\delta L = \overline{f} \bullet d\overline{r} = - mg\, dz$ -> $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = mg(z_A - z_B) = -\Delta V$
  -> **V = mgz** (avendo scelto V=0 per z=0)

2) **Forza elastica (molla ideale)**

- campo dipendente linearmente da una coordinata
  -> **conservativo** in quanto derivate nel rotore tutte nulle
- scelto un SdR cartesiano con asse x lungo la molla e origine nella posizione della molla non deformata
  -> **$\overline{f}$ = (-kx , 0, 0)**
- $\delta L = \overline{f} \bullet d\overline{r} = -kx\, dx$ -> $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = (k/2)(x_A^2 - x_B^2) = -\Delta V$
  -> **$V = (½)\, kx^2$** (avendo scelto V=0 per x=0)

3) **Forza centrale a simmetria sferica**

- forza $\overline{f}$ agente su punto materiale P e diretta sempre verso un punto O (che sceglieremo come origine del SdR)
  $\overline{f} = f(r)\, \overline{u}_r$
- $\delta L = \overline{f} \bullet d\overline{r} = f(r)\, \overline{u}_r \bullet (dr\, \overline{u}_r + r\, d\overline{u}_r) = f(r)\, dr = - dV(r)$
  -> **$f(r) = - dV(r) / dr$**
  campo conservativo purché f(r) ammetta una primitiva V(r) (condizione normalmente soddisfatta)
- attrazione gravitazionale:
  -> forza agente tra due punti materiali di massa m_1 e m_2 posti a distanza r
  $\overline{f} = - (G\, m_1\, m_2 / r^2)\, \overline{u}_r = f(r)\, \overline{u}_r$
  -> **$V(r) = - G\, m_1\, m_2 / r$** avendo scelto V(r) = 0 per r = ∞
  con $G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2 / kg^2$

Esempi di forze (campi) conservative

4) **Forza centrifuga**

► in un SdR non inerziale rotante con velocità angolare $\overline{\omega} = \omega\, \overline{u}_z$ rispetto ad un SdR inerziale, una massa m posta a distanza ρ dall'asse di rotazione subisce una forza fittizia centrifuga

$$\overline{f} = m\, \omega^2 \rho\, \overline{u}_\rho = f(\rho)\, \overline{u}_\rho$$

con $\overline{u}_\rho$ versore radiale in coordinate cilindriche.

La posizione del punto P in tale SdR è data da

$$\overline{r} = \rho\, \overline{u}_\rho + z\, \overline{u}_z \;\; \text{-->} \;\; d\overline{r} = d\rho\, \overline{u}_\rho + \rho\, d\overline{u}_\rho + dz\, \overline{u}_z$$

e quindi

► $\delta L = \overline{f} \bullet d\overline{r} = f(\rho)\, \overline{u}_\rho \bullet (d\rho\, \overline{u}_\rho + \rho\, d\overline{u}_\rho + dz\, \overline{u}_z) = f(\rho)\, d\rho$

► $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = -(m\omega^2/2)(\rho_A{}^2 - \rho_B{}^2) = -\Delta V$

► $\mathbf{V(\rho) = -(½)\, m\omega^2\rho^2}$ avendo scelto $V(\rho) = 0$ per $\rho = 0$

Esempi di forze (campi) conservative

5) **Considerazioni finali**

Nei campi di forze conservativi è spesso utile individuare il luogo geometrico dei punti in cui l'energia potenziale assume lo stesso valore. Tale luogo è generalmente una superficie (detta “equipotenziale”)

Superficie equipotenziale --> V = costante

--> $\delta L = 0$ per spostamenti sulla superficie

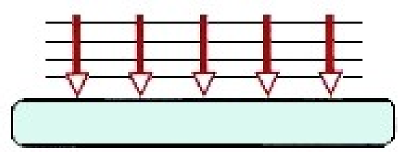
--> $\overline{f}$ è $\perp$ alla superficie in ogni suo punto

Si usa spesso rappresentare un campo di forze disegnando le superfici equipotenziali per valori di V equispaziati da un certo ΔV. In tale rappresentazione avremo per $\overline{f}$ (P):

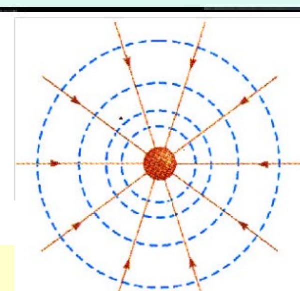
--> verso puntante alla superficie contigua di energia potenziale inferiore (segno – nella relazione tra δL e ΔV)

--> modulo tanto maggiore quanto più vicine sono in P le superfici equipotenziali corrispondenti ad un dato ΔV

forza peso →



forza gravitazionale →



Esempi di forze (campi) non conservative

1) **Attrito radente dinamico**

► $\overline{R}_t = -\mu_d\ R_n\ \bar{u}_v$ con u_v versore della velocità

► $L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \delta L = {}_\alpha\int_A^B \overline{R}_t \bullet d\bar{r} = {}_\alpha\int_A^B -\mu_d R_n \bar{u}_v \bullet d\bar{r}$

$$= -\mu_d\ R_n\ {}_\alpha\int_A^B \bar{u}_v \bullet d\bar{r}$$

ma $d\bar{r} = \bar{v}\, dt = v\, \bar{u}_v\, dt$ --> $\bar{u}_v \bullet d\bar{r} = \bar{u}_v \bullet v\, \bar{u}_v\, dt = v\, dt$

e quindi

$$L_{AB} = -\mu_d R_n\ {}_\alpha\int_A^B v\, dt = -\mu_d\ R_n\ S_{AB}^{(\alpha)}$$

dove $S_{AB}^{(\alpha)}$ è la lunghezza del percorso da A a B lungo α

► forza di attrito è **non conservativa** (dipendenza dal percorso, lavoro sempre negativo anche per percorso chiuso)

2) **Resistenza viscosa di un mezzo**

► $\overline{f}_R = -\ \beta\, v\, \bar{u}_v$

► $L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \delta L = {}_\alpha\int_A^B \overline{f}_R \bullet d\bar{r} = {}_\alpha\int_A^B -\beta\, v\, \bar{u}_v \bullet d\bar{r}$

$$= {}_\alpha\int_A^B -\beta\, v^2\, dt = -\beta\ {}_\alpha\int_A^B v^2\, dt$$

► $\underline{f}_R$ **non conservativa** in quanto ${}_\alpha\int_A^B v^2\, dt > 0$ sempre, anche per un percorso chiuso

3) **Caso generale**

Sono non conservative le forze dipendenti dalla velocità oppure esplicitamente dal tempo