

Energia cinetica

Sia \bar{f} il risultante delle forze agenti su un punto materiale di massa m costante. Il lavoro elementare corrispondente ad uno spostamento infinitesimo $d\bar{r}$ del punto materiale è dato da

$$\delta L = \bar{f} \cdot d\bar{r} = m\bar{a} \cdot d\bar{r} = m\bar{a} \cdot \bar{v} dt$$

Utilizzando le espressioni intrinseche di velocità e accelerazione si ha

$$\delta L = m [a_s \bar{u}_t + (v_s^2/\rho)\bar{u}_n] \cdot (v_s \bar{u}_t) dt = m a_s v_s dt = m \ddot{s} \dot{s} dt$$

Definendo **l'energia cinetica K** del punto materiale tramite la relazione

$$K = \left(\frac{1}{2}\right) m v_s^2 = \left(\frac{1}{2}\right) m \dot{s}^2$$

avremo

$$dK / dt = m \dot{s} \ddot{s} \rightarrow dK = m \dot{s} \ddot{s} dt \rightarrow \delta L = dK \quad (*)$$

il lavoro elementare rappresenta anche la variazione elementare dell'energia cinetica nel tratto infinitesimo della traiettoria. Integrando sul percorso α da A a B si ottiene

$$L_{AB} = \int_A^B \delta L = \int_A^B dK = K_B - K_A$$

che è la formulazione integrale del **“Teorema delle forze vive”**.

Questo Teorema non dà maggiori informazioni del secondo Principio della Dinamica ma è utile in alcuni casi particolari (traiettoria nota a priori in quanto condizionata da vincoli, lavoro dipendente da posizione iniziale e finale). Il Teorema è valido anche in SdR non inerziali purché si consideri anche il lavoro delle forze fittizie.

(*) Se la massa del punto materiale non rimane costante tale formula si modifica in

$$\delta L = dK + \left(\frac{1}{2}\right) \dot{s}^2 dm$$

Conservazione dell'energia meccanica

Teorema delle forze vive --> $\delta L = dK$

In presenza di forze conservative, si ha $\delta L = -dV$

e quindi $dK = -dV$ --> $d(K+V) = 0$ e integrando

$$\mathbf{K + V = costante = E_m} \quad \text{-->} \quad \mathbf{dE_m = 0}$$

con E_m "energia meccanica". Tale relazione, valida se tutte le forze agenti sono conservative, esprime la **conservazione dell'energia meccanica**.

In presenza di forze conservative e non conservative avremo $\delta L = \delta L^{(c)} + \delta L^{(nc)} = -dV + \delta L^{(nc)}$

e quindi $dK = \delta L = -dV + \delta L^{(nc)}$ e anche

$$d(K+V) = \delta L^{(nc)} \quad \text{-->} \quad \mathbf{dE_m = \delta L^{(nc)}}$$

e quindi la variazione dell'energia meccanica di un punto materiale è dovuta soltanto al lavoro delle forze non conservative (connesso ad altre forme di energia).

Conservazione dell'energia meccanica

Applicazione della conservazione dell'energia meccanica
Caduta libera sotto l'effetto della forza peso

Indicate con A e B due posizioni successive del punto materiale si ha

$$E_m = K_A + V_A = K_B + V_B$$

Se ad esempio

A --> quota h, punto fermo $K_A = 0$

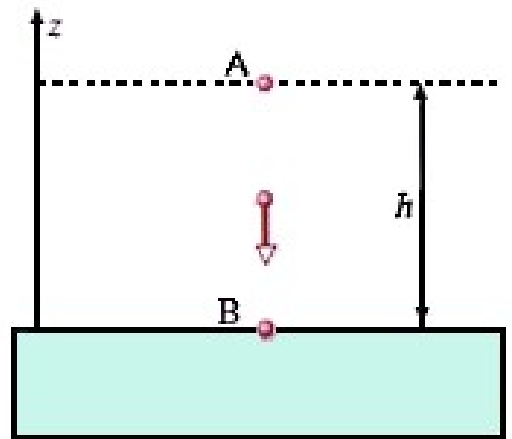
B --> quota 0, punto in moto $K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$

si ricava subito $E_m = mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$

stesso risultato ottenuto dal Secondo Principio della Dinamica
(Conservazione dell'energia è quindi un metodo alternativo
per la soluzione dei problemi)

Caduta libera --> energia potenziale iniziale si trasforma in
energia cinetica finale

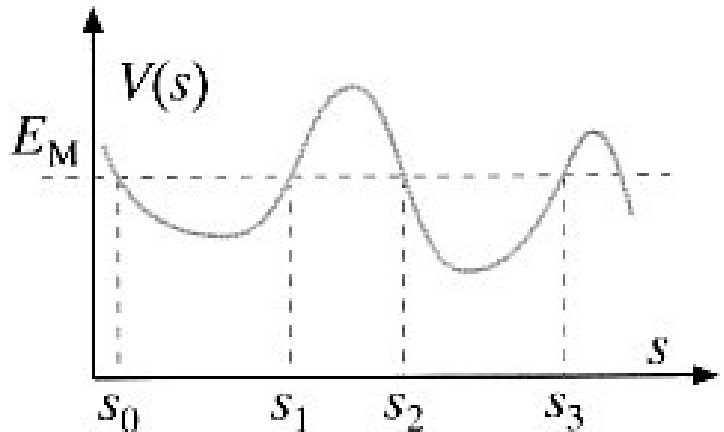
Pendolo --> continua trasformazione tra energia
potenziale e cinetica



Conservazione dell'energia meccanica

Caso generale --> può essere trasformata in energia cinetica
la differenza tra l'energia potenziale della
configurazione iniziale e quella di equilibrio
stabile (minimo di energia potenziale)

Nel caso unidimensionale:
energia potenziale
funzione dell'ascissa
curvilinea s
(profilo altimetrico di
una tappa del Giro
d'Italia)



Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$E_m = K + V(s) \quad \text{-->} \quad K = E_m - V(s)$$

Il moto può sussistere solo se

$$K > 0 \quad \text{-->} \quad E_m > V(s)$$

In tali regioni $f_s = -dV/ds$ e quindi

- > posizioni di equilibrio ($f_s = 0$) corrispondono a massimi e minimi di $V(s)$
- > lo spostamento di un punto materiale da tali posizioni di equilibrio comporta il manifestarsi di una forza che tende a portare il punto materiale verso una posizione di minimo di $V(s)$: oscillazione intorno al minimo
- > posizione di massimo di $V(s)$: equilibrio instabile
posizione di minimo di $V(s)$: equilibrio stabile

Conservazione dell'energia meccanica

RIFLESSIONE

Energia potenziale --> diretta conseguenza dell'interazione tra il punto materiale in esame e altri punti materiali.

Se l'interazione è dovuta solo a un altro punto materiale (interazione punto materiale – Terra, eventualmente tramite una molla ideale) la conservazione della energia meccanica dovrebbe essere scritta

$$dK_1 + dK_2 + dV = 0$$

con K_1 e K_2 energie cinetiche dei due corpi interagenti. Se l'altro punto è la Terra ($M_{\text{Terra}} \gg m_{\text{corpo}}$), si può trascurarne l'energia cinetica acquisita ottenendo

$$dK_2 \approx 0 \quad \text{-->} \quad dK_1 + dV = 0$$

Ma chi è che fornisce al punto materiale l'energia potenziale successivamente spendibile come energia cinetica?



Macchine, la cui capacità di fornire un lavoro ΔL nell'intervallo di tempo Δt è data dalla “potenza media”, definita dal rapporto $W_m = \Delta L / \Delta t$, o dalla “potenza istantanea” W (limite di W_m per $\Delta t \rightarrow 0$). Se il lavoro fatto dalla macchina viene prodotto tramite una forza \bar{f} agente sul punto materiale, potremo scrivere

$$W = \delta L / dt = (\bar{f} \cdot d\bar{r}) / dt = \bar{f} \cdot \bar{v}$$

(Esempio di macchina: ascensore che solleva il punto materiale)

Conservazione dell'energia

$$d(K+V) = \delta L^{(nc)} \quad \rightarrow \quad dE_m = \delta L^{(nc)}$$

L'esperienza quotidiana insegna che nell'interazione del punto materiale con l'ambiente (pendolo che smorza le sue oscillazioni, corpo in moto che rallenta, ...) entrano in gioco forze non conservative, che fanno lavoro negativo (**dissipative**)

In tali casi la variazione dell'energia meccanica corrisponderà alla variazione di altre forme di energia (deformazione delle superfici a contatto, aumento della temperatura del corpo,..)

Se un sistema è “**isolato**” (ovvero su di esso non agiscono forze dovute a interazioni con corpi esterni ad esso) non può cambiare la propria energia totale (può cambiare forma ma la somma globale è costante nel tempo).

Principio di Conservazione dell'Energia

“ In un sistema isolato la somma di tutte le energie, in qualunque forma esse compaiano, è costante”