Sistemi Rigidi

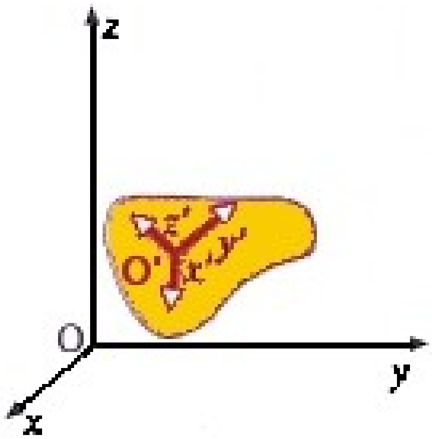
Sistema rigido

--> **corpo indeformabile** (distanze costanti tra le coppie dei punti materiali costituenti) qualsiasi siano le forze esterne agenti su di esso

--> in realtà tutti i corpi sottoposti a forze si deformano e **quindi** quella del corpo rigido è un'utile **schematizzazione** che ne permette lo studio del moto

--> la **posizione del CM rimane invariata** rispetto a quella dei punti materiali del sistema rigido

--> ha **6 gradi di libertà**: una terna di assi cartesiani orto-gonali **S'** solidale con esso sarebbe individuata, rispetto ad un sistema di riferimento fisso **S**, da
- 3 coordinate dell'origine O'
- 9 coseni direttori ma solo 3 indipendenti per le condizioni di ortonormalità



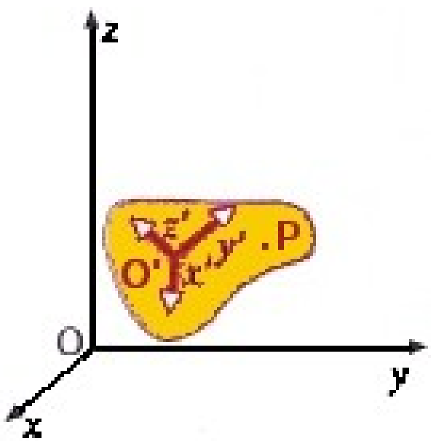
--> il moto del sistema può essere ricondotto a quello del **moto di una terna cartesiana rispetto all'altra**

Cinematica dei Sistemi Rigidi

Per la velocità di un punto P del sistema rigido avremo

$$\overline{v}(P) = \overline{v}\,'(P) + \overline{v}_t$$

dove $\overline{v}_t$ è la velocità di trascinamento (velocità in S del punto solidale con S' coincidente a ogni istante con il punto P).
Ma in S' le velocità $\overline{v}\,'(P)$ dei punti materiali sono tutte nulle!
Quindi



$$\overline{v}(P) = \overline{v}_t = \overline{V}(t) + \overline{\omega}\,(t) \times [\,\overline{r}(t) - \overline{R}(t)\,]$$

dove $\overline{V}(t) = (d\overline{R}/dt)_S$,

$\overline{r}(t)$ vettore posizione di P in S
$\overline{R}(t)$ vettore posizione dell'origine O' di S' in S
$\overline{\omega}(t)$ velocità angolare di S' rispetto a S

Per due punti A e B del sistema rigido avremo
$\overline{v}(A) = \overline{V}(t) + \overline{\omega}\,(t) \times [\,\overline{r}(A) - \overline{R}(t)\,]$
$\overline{v}(B) = \overline{V}(t) + \overline{\omega}\,(t) \times [\,\overline{r}(B) - \overline{R}(t)\,]$
da cui

$$\overline{v}(B) = \overline{v}(A) + \overline{\omega}(t) \times [\,\overline{r}(B) - \overline{r}(A)]$$

ed in generale

$$\overline{v} = \overline{v}_{CM} + \overline{\omega}\,(t) \times [\,\overline{r} - \overline{r}_{CM}\,]$$

dove $\overline{v}_{CM}$ e $\overline{r}_{CM}$ si riferiscono al centro di massa.
Il moto di un qualsiasi punto del sistema rigido può essere ricondotto a una combinazione di una traslazione e di una rotazione attorno ad un asse.

Traslazione dei Sistemi Rigidi

Cinematica

Per traslazioni del sistema rigido valgono le seguenti relazioni

$$\bar{v} = \bar{v}_{CM}$$

$$\bar{Q} = M\,\bar{v}_{CM} \qquad \text{(valida sempre)}$$

$$\bar{P}_{CM} = \Sigma_i\ (\bar{r}_i - \bar{r}_{CM}) \times \bar{q}_i = \Sigma_i\ (\bar{r}_i - \bar{r}_{CM}) \times m_i\,\bar{v}_i =$$
$$= \Sigma_i\ (\bar{r}_i - \bar{r}_{CM}) \times m_i\,\bar{v}_{CM} =$$
$$= \Sigma_i\ (m_i\,\bar{r}_i - m_i\,\bar{r}_{CM}) \times \bar{v}_{CM} = 0$$

$$\bar{P}_\Omega = \bar{P}_{CM} + (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_\Omega) \times \bar{Q} = (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_\Omega) \times \bar{Q}$$

Dinamica

Prima equazione cardinale della dinamica

$$\bar{F}^{(e)} = d\bar{Q}/dt = M\,\bar{a}_{CM}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica

polo = CM $\qquad \bar{M}_{CM}^{(e)} = d\bar{P}_{CM}/dt = 0$

polo = Ω fisso, $\bar{v}_\Omega = 0$

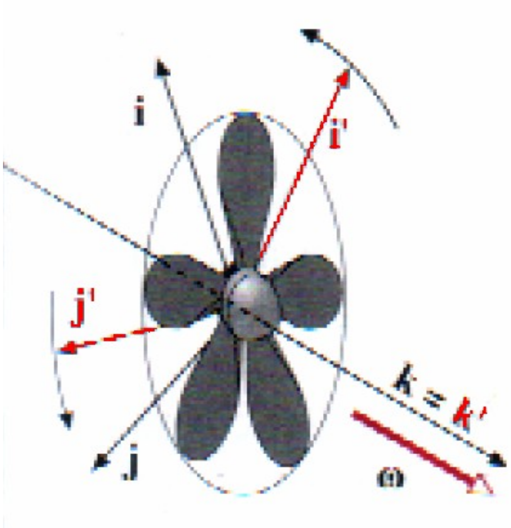
$$\bar{M}_\Omega^{(e)} = d\bar{P}_\Omega/dt = d[\,(\bar{r}_{CM} - \bar{r}_\Omega) \times \bar{Q}\,]/dt =$$
$$= (d\bar{r}_{CM}/dt) \times \bar{Q} - (d\bar{r}_\Omega/dt) \times \bar{Q} + (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_\Omega) \times d\bar{Q}/dt$$
$$= \bar{v}_{CM} \times \bar{Q} - \bar{v}_\Omega \times \bar{Q} + (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_\Omega) \times d\bar{Q}/dt$$
$$= (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_\Omega) \times d\bar{Q}/dt = (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_\Omega) \times M\,\bar{a}_{CM}$$

ovvero se il momento delle forze esterne è # 0 esso produce una rototraslazione del CM (e di tutto il sistema) intorno a Ω

Rotazione con asse fisso dei Sistemi Rigidi

Cinematica

Scegliamo i due sistemi S e S' con gli assi z e z' coincidenti con l'asse di rotazione e inoltre O = O'. Con tale scelta nella relazione



$$\overline{v}(P) = \overline{v}_t = \overline{V}(t) + \overline{\omega}(t) \times [\,\overline{r}(t) - \overline{R}(t)\,]$$

si ha $\overline{V}(t) = 0$ e $\overline{R} = 0$ e quindi per ogni punto materiale costituente il sistema

$$\overline{\mathbf{v}}_i = \overline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \overline{\mathbf{r}}_i$$

I punti del sistema rigido (e quindi anche il CM), immobili in S', descrivono in S traiettorie circolari con il centro sull'asse di rotazione.

In tal caso valgono le seguenti relazioni

$\overline{\mathbf{Q}} = M\,\overline{\mathbf{v}}_{CM} \neq 0$ se CM non sta su asse fisso

$$\overline{\mathbf{P}}_O = \Sigma_i\, \overline{\mathbf{r}}_i \times \overline{\mathbf{q}}_i = \Sigma_i\, \overline{\mathbf{r}}_i \times m_i\, [\,\overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{\mathbf{r}}_i\,]$$

Rotazione con asse fisso dei Sistemi Rigidi

Cinematica

$\bar{Q} = M\,\bar{v}_{CM} \neq 0$ se CM non sta su asse fisso

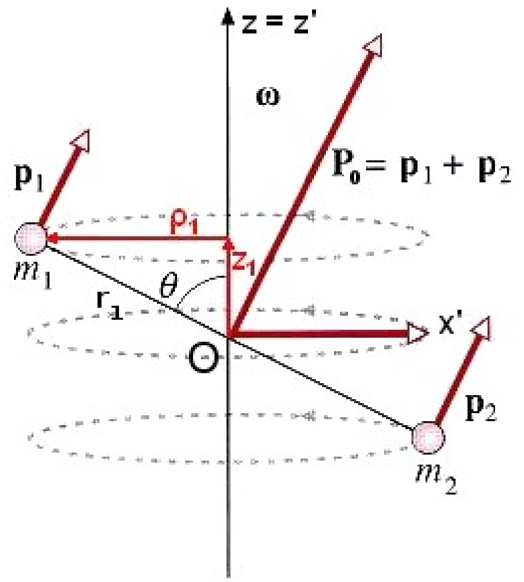
$\bar{P}_O = \Sigma_i\, \bar{r}_i \times \bar{q}_i = \Sigma_i\, \bar{r}_i \times m_i\, [\,\bar{\omega} \times \bar{r}_i\,]$

Potremo scomporre il vettore $\bar{r}_i$ in un componente lungo l'asse ($z_i\, \bar{u}_z$) e in uno perpendicolare all'asse ($\bar{\rho}_i$) e avere

$\bar{P}_O = \Sigma_i\, (z_i\, \bar{u}_z + \bar{\rho}_i) \times m_i\, [\,\bar{\omega} \times (z_i\, \bar{u}_z + \bar{\rho}_i)\,] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= -\Sigma_i\, m_i\, z_i\, \omega\, \bar{\rho}_i + \Sigma_i\, m_i\, \rho_i^2\, \bar{\omega}$

In generale $\bar{P}_O$ non è quindi parallelo a $\bar{\omega}$ e può essere scomposto in due componenti:



$\bar{P}_{//} = \Sigma_i\, m_i\, \rho_i^2\, \bar{\omega} = I\, \bar{\omega}$

con $I = \Sigma_i\, m_i\, \rho_i^2$ momento di Inerzia (assiale)

$\bar{P}_{\perp} = -\Sigma_i\, m_i\, z_i\, \omega\, \bar{\rho}_i$

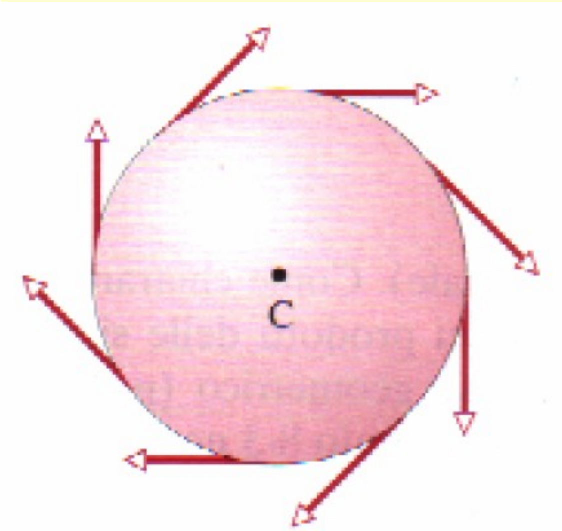
Se asse rotazione = asse di simmetria
--> $\bar{P}_{\perp} = 0$

In caso contario: Sistema rigido -->
--> $\bar{\rho}_i$ ruotano intorno ad asse fisso con velocità angolare $\bar{\omega}$
--> $\bar{P}_{\perp}$ ruota con vel. angolare $\bar{\omega}$ (precessione intorno all'asse)

Rotazione con asse variabile dei Sistemi Rigidi

Esempio: Rotolamento di una ruota

Come SdR S' scegliamo un SdR con origine nel CM della ruota e assi che si mantengono paralleli a sé stessi.
In S' tutti I punti della ruota si muovono con vel. angolare $\bar{\omega}$.
Ma S' si muove con velocità $\bar{v}_{CM}$ e quindi avremo



$$\bar{v}_i = \bar{v}_{CM} + \bar{\omega} \times (\bar{r}_i - \bar{r}_{CM})$$

Rotolamento puro: la velocità del punto di contatto (istantaneo) **P*** fra la ruota e la superficie di appoggio è nulla. In tal caso avremo che

$$0 = \bar{v}_{CM} + \bar{\omega} \times (\bar{r}^* - \bar{r}_{CM}) \;\; \text{-->} \;\; \bar{v}_{CM} = \bar{\omega} \times (\bar{r}_{CM} - \bar{r}^*)$$
$$\text{-->} \;\; \bar{v}_i = \bar{\omega} \times (\bar{r}_i - \bar{r}^*)$$

ovvero l'espressione di un moto rotatorio, attorno ad un asse // a $\bar{\omega}$ e passante per P*. Tale asse viene detto “asse istantaneo di rotazione”.

Anche in questo caso varranno le relazioni:

$$\bar{Q} = M \bar{v}_{CM}$$

$$\bar{P} = I \bar{\omega} + \bar{P}_{\perp}$$

purché $\bar{P}$ sia calcolato rispetto ad un polo giacente sull'asse di rotazione (ovvero P*)