Momento d'inerzia

Definizione: $I = \Sigma_i \, m_i \, \rho_i^2$ --> Grandezza Scalare Estensiva

Per un sistema continuo $I = \int \rho^2 dm$

Vedremo che il momento di inerzia ha nelle rotazioni lo stesso ruolo della massa inerziale nelle traslazioni

Nella tabella sono riportati i momenti d'inerzia rispetto al CM in alcune geometrie semplici

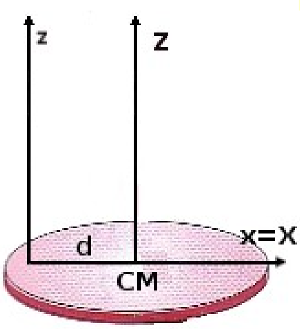
Corpo	Dimensione	Asse	Momento Inerzia
Anello	raggio R	⊥ ad Anello	$M R^2$
Disco	raggio R	⊥ al Disco	$(½) M R^2$
Disco	raggio R	Diametro	$(¼) M R^2$
Cilindro retto	raggio R	Asse Cilindro	$(½) M R^2$
Cilindro retto cavo	raggi Ri e Re	Asse Cilindro	$(½) M (Ri^2 + Re^2)$
Sfera	raggio R	Diametro	$(2/5) M R^2$
Asta	lunghezza L	⊥ ad Asta	$(1/12) M L^2$

Teorema di Huygens-Steiner

“Il momento di inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un asse è dato dalla somma di quello rispetto ad un asse parallelo e passante per il centro di massa e del termine Md^2 con d distanza tra gli assi”

$$I = I_{CM} + M d^2$$

Infatti, preso un SdR cartesiano ortogonale con asse **z** diretto lungo l'asse rispetto al quale si vuol determinare I e asse **x** passante per il CM (di coordinata d) e indicando con **X**,**Y** e **Z** le coordinate dei punti in un SdR con origine nel CM avremo

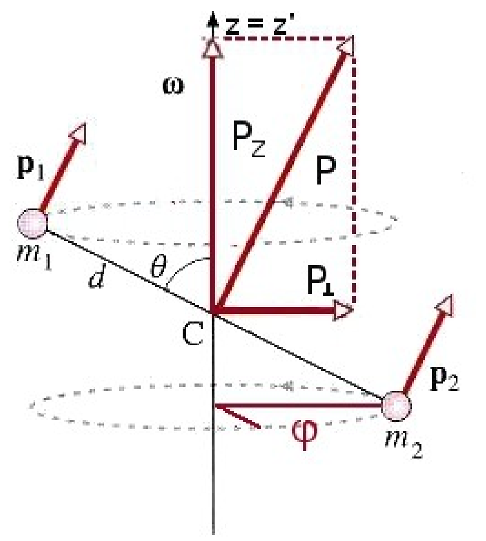


$$I = \Sigma_i \, m_i \, \rho_i^2 = \Sigma_i \, m_i \, (x_i^2 + y_i^2) = \Sigma_i \, m_i \, [(X_i + d)^2 + Y_i^2] =$$

$$= \Sigma_i \, m_i \, (X_i^2 + Y_i^2) + \Sigma_i \, m_i \, d^2 + 2 \, d \, \Sigma_i \, m_i \, X_i = I_{CM} + M d^2$$

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Nel caso di corpi rigidi vincolati a ruotare intorno ad un asse fisso i 6 gradi di libertà si riducono ad uno solo: l'angolo **φ** che un piano passante per l'asse e solidale con il corpo forma con un piano di riferimento fisso.



Scegliendo l'asse z del SdR lungo l'asse di rotazione, potremo determinare il momento angolare assiale

$$P_z = \overline{P} \cdot \bar{u}_z = (I\,\bar{\omega} + \overline{P}_\perp) \cdot \bar{u}_z = I\,\omega$$

L'equazione assiale del moto diventa

$$M_z^{(e)} = (d\overline{P}/dt) \cdot \bar{u}_z = d(\overline{P} \cdot \bar{u}_z)/dt = d(I\,\omega)/dt = I\,d^2\varphi/\,dt^2$$

con $M_z^{(e)}$ momento assiale delle forze esterne.

Tale equazione permette di ricavare l'equazione oraria $\varphi = \varphi(t)$ del corpo.

Si noti che $M_z^{(e)}$ è nullo se

--> $\overline{M}^{(e)}$ è $\perp$ all'asse di rotazione

(forze esterne // all'asse, ex. forze peso se l'asse è verticale)

--> $\overline{M}^{(e)}$ è nullo

(forze esterne con direzione puntante all'asse)

Il CM del corpo si muoverà di moto circolare intorno all'asse e la relazione $\overline{F}^{(e)} = M\,\bar{a}_{CM}$ permetterà di ricavare l'opportuna forza centripeta (fornita dai vincoli).

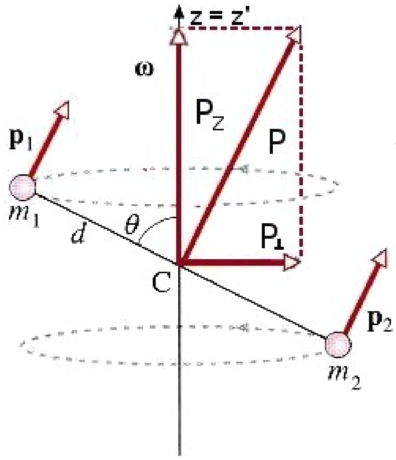
Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Per lo studio dei momenti di forza non assiali avremo che

$$\overline{M}^{(e)} = (d\overline{P}/dt) = d(\mathbf{I}\,\overline{\omega} + \overline{P}_\perp)/dt =$$

$$= \mathbf{I}\,d(\overline{\omega})/dt + d\overline{P}_\perp/dt =$$

$$= \overline{M}_z^{(e)} + \overline{M}_\perp^{(e)}$$



$\mathbf{I}\,d(\overline{\omega})/dt = \overline{M}_z^{(e)}$ -> variazione modulo $\overline{\omega}$

$d\overline{P}_\perp/dt = \overline{M}_\perp^{(e)}$ -> $\perp$ asse di rotazione

$$d\overline{P}_\perp/dt = d(-\Sigma_i m_i z_i \omega \overline{\rho}_i)/dt =$$

$$= -(d\omega/dt)\,\Sigma_i m_i z_i \overline{\rho}_i - \omega\, d(\Sigma_i m_i z_i \rho_i)/dt =$$

$$= (d\omega/dt)\,\overline{P}_\perp/\omega + \omega(-\Sigma_i m_i z_i \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i) =$$

$$= (d\omega/dt)\,\overline{P}_\perp/\omega + \overline{\omega} \times \overline{P}_\perp$$

Per mantenere l'asse fisso i vincoli devono quindi esercitare un opportuno momento di forze, anche nel caso in cui $\overline{\omega}$ rimanga costante nel tempo.

Se asse di rotazione = asse di simmetria:

$$\overline{P}_\perp = 0 \;\; \text{-->} \;\; \overline{M}_\perp^{(e)} = 0$$

e quindi il corpo rimane in rotazione intorno all'asse senza bisogno di un momento di forze applicato dall'esterno

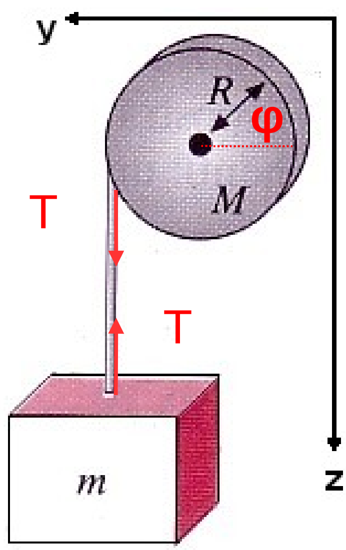
assi di simmetria = assi liberi (o permanenti) di rotazione

[applicazione
- equilibratura pneumatici auto e moto: aggiunta di masse sul cerchione al fine di rendere $\overline{M}^{(e)}$ parallelo all'asse di rotazione
- decelerazione di un sistema rotante, dischi dei freni, tramite un $\overline{M}^{(e)}$ parallelo all'asse di rotazione (ganasce) per non sollecitare i vincoli]

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Esempi

-Carrucola di massa M e raggio R
con asse fisso
-corpo di massa m appeso al filo
-filo inestendibile avvolto su essa
e di massa trascurabile rispetto alle
altre



Il corpo si muove lungo la verticale tramite spostamenti (dz) strettamente legati alla rotazione (dφ) della carrucola

$$dz = R\, d\varphi$$
$$v = dz/dt = R d\varphi/dt = R\omega$$
$$a = dv/dt = R d\omega/dt = R d^2\varphi/dt^2 = R\alpha$$

Dalla componente z della prima equazione della dinamica applicata al corpo si ha

$mg - T = ma$ con T tensione del filo

Per il moto della carrucola dalla componente x della seconda eq. della dinamica

$$M_x^{(e)} = TR = \mathbf{I}\alpha = (½)\, M R^2\, \alpha$$

Eliminando T dalle ultime 2 relazioni si ottiene

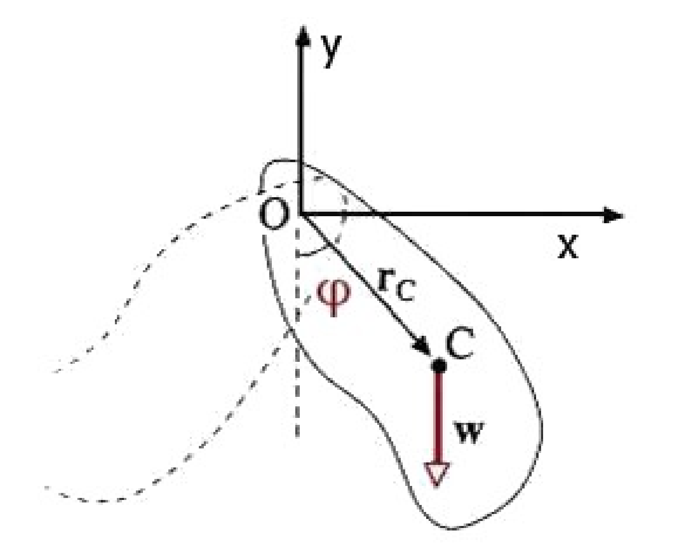
$$\alpha = (g/R)\,(1 + M/2m)^{-1} \quad \text{-->} \quad T = mg/(1 + 2m/M)$$

Per la massa m si ha quindi accelerazione $a=R\alpha$ costante ma ridotta rispetto al caso di caduta libera e tanto minore quanto maggiore è la massa M della carrucola

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Esempi – Pendolo fisico
(o pendolo composto)

Sistema rigido vincolato a ruotare senza attrito attorno ad asse orizzontale non passante per il CM



Proiettando la seconda equazione cardinale lungo l'asse di rotazione (z) si ha

$$M_z^{(e)} = \Sigma_i (\bar{r}_i \times m_i \bar{g}) \bullet \bar{u}_z = (\bar{r}_C \times M \bar{g}) \bullet \bar{u}_z = I\, d^2\varphi/dt^2$$

dalla quale, indicando con $d = r_C$ la distanza del CM dall'asse, segue

$$- M g d \sin\varphi = I\, d^2\varphi/dt^2 \quad \text{-->} \quad d^2\varphi/dt^2 + (M g d / I) \sin\varphi = 0$$

con soluzione tipica, nel caso delle **piccole oscillazioni** per le quali **$\sin\varphi \approx \varphi$**, del moto armonico

$$\varphi(t) = \varphi_{max} \cos(\omega_0 t + \beta_0) \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{M g d / I}$$

Nel caso del pendolo semplice

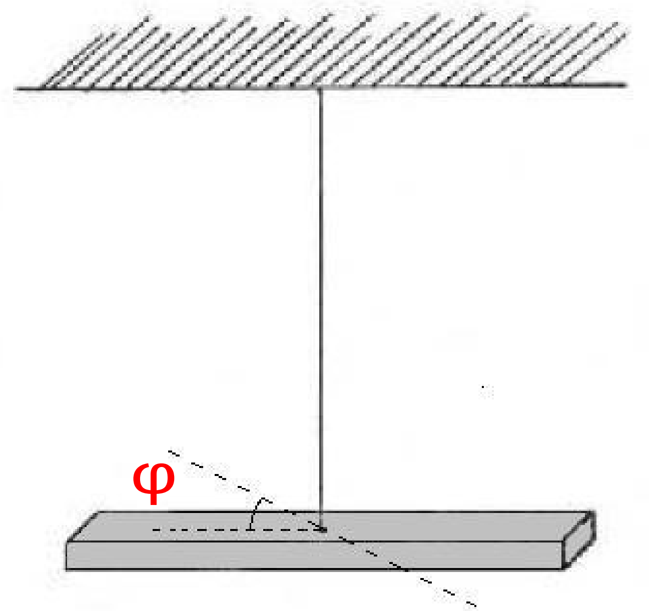
$$I = M d^2 \qquad\qquad \omega_0 = \sqrt{g / d}$$

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Esempi – Pendolo di torsione

-Costituito da un equipaggio mobile disposto orizzontalmente e appeso al centro ad un filo verticale con l'altro estremo appeso ad un supporto fisso.

Quando l'equipaggio viene fatto ruotare di un angolo φ in un piano orizzontale il filo, sottoposto a torsione, reagisce cercando di riportarsi alla condizione iniziale.



Se φ è piccolo il momento di torsione esercitato dal filo sull'equipaggio risulta proporzionale a φ (Legge di Hooke). Tale momento è parallelo al filo e quindi avremo

$$M_z = -k\varphi = I\, d^2\varphi/dt^2 \;\; \text{-->} \;\; I\, d^2\varphi/dt^2 + k\varphi = 0$$

equazione differenziale che ha soluzione

$$\varphi(t) = \varphi_{max} \cos(\omega_0\, t + \beta_0)$$

con pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/I}$