

# Energia cinetica di un sistema rigido

Per un sistema di punti materiali  $\mathbf{K} = \mathbf{K}' + (\frac{1}{2}) m \mathbf{v}_{CM}^2$   
con  $\mathbf{K}'$  = energia cinetica rispetto SdR  $S'$  con origine in CM  
e assi che traslano paralleli a sé stessi.

Per un sistema rigido  $\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_{CM} + \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM})$   
e quindi avremo

$$\mathbf{K} = \sum_i (\frac{1}{2}) m_i |\bar{\mathbf{v}}_i|^2 = (\frac{1}{2}) \sum_i m_i |\bar{\mathbf{v}}_{CM} + \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM})|^2 =$$
$$= (\frac{1}{2}) \sum_i m_i \{ \mathbf{v}_{CM}^2 + 2 [\bar{\mathbf{v}}_{CM} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM})] + |\bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM})|^2 \}$$

Ma  $\bar{\mathbf{v}}_{CM} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \sum_i m_i (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM}) = 0$  in quanto  $\sum_i m_i (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM}) = 0$   
Potremo inoltre scrivere  $|\bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM})|^2 = [\boldsymbol{\omega}(t) \rho_i]^2$  con  $\rho_i$   
distanza dall'asse di rotazione

Infine  $\mathbf{K} = (\frac{1}{2}) M \mathbf{v}_{CM}^2 + (\frac{1}{2}) \mathbf{I}_{CM} \boldsymbol{\omega}^2$

con  $\mathbf{I}_{CM} = \sum_i m_i \rho_i^2$  momento d'inerzia rispetto all'asse  
passante per il CM e parallelo a  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$

Nel caso particolare in cui il corpo rigido stia SOLO ruotando  
intorno ad un asse (anche non passante per il CM) risulta  
più conveniente calcolare l'energia cinetica facendo riferimento  
a tale asse. Scelta l'origine del SdR su di esso, la velocità di  
ogni punto è data da  $\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \bar{\mathbf{r}}_i$  e per l'energia cinetica si ha

$$\mathbf{K} = \sum_i (\frac{1}{2}) m_i |\bar{\mathbf{v}}_i|^2 = \sum_i (\frac{1}{2}) m_i |\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_i|^2$$
$$= (\frac{1}{2}) \sum_i m_i \rho_i^2 \boldsymbol{\omega}^2 = (\frac{1}{2}) \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^2$$

con  $\rho_i$  distanze di ciascun punto dall'asse di rotazione e  $\mathbf{I}$  il  
corrispondente momento di inerzia.

# Lavoro su un sistema rigido

Lavoro su sistema rigido -> dovuto solo a forze esterne  
(forze interne danno contributo nullo)

Per quanto abbiamo visto per un sistema rigido in rotazione,  
dalla relazione  $M_z^{(e)} = I d^2\varphi/dt^2$  --> elemento motore è  $M_z^{(e)}$   
ovvero il momento assiale delle forze esterne

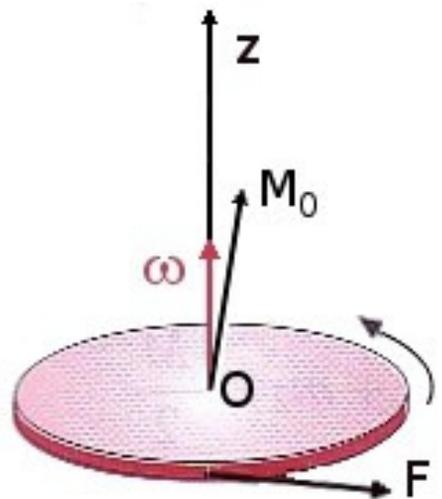
Per evidenziare questo fatto, cerchiamo  
di esprimere il lavoro in funzione del  
momento delle forze esterne e della  
rotazione angolare nel caso di un  
sistema rigido in rotazione rispetto  
ad un asse fisso.

Scelto SdR con origine O sull'asse  
(assunto come asse z)

avremo  $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = (\omega \vec{u}_z \times \vec{r}_i) dt$   
e quindi

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \cdot (\omega \vec{u}_z \times \vec{r}_i) dt = \vec{u}_z \cdot (\sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(e)}) \omega dt \\ &= (\vec{u}_z \cdot \vec{M}_O^{(e)}) \omega dt = M_z^{(e)} d\varphi\end{aligned}$$

dove  $\vec{M}_O^{(e)}$  è il momento totale delle forze esterne rispetto al  
polo O e  $M_z^{(e)}$  la sua componente assiale.



Si deduce che

- > l'unico componente che compie lavoro è quello // all'asse  
(anche responsabile dell'accelerazione angolare del sistema)
- > il componente del momento diretto  $\perp$  all'asse di rotazione non  
esegue lavoro (manca rotazione intorno alla sua direzione a  
causa delle reazioni vincolari)

# Lavoro su un sistema rigido

Per l'espressione generale del lavoro elementare avremo quindi

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_i \bar{\mathbf{f}}_i^{(e)} \cdot \bar{\mathbf{v}}_i dt = \sum_i \bar{\mathbf{f}}_i^{(e)} \cdot [\bar{\mathbf{v}}_{CM} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM})] dt = \\ &= \sum_i \bar{\mathbf{f}}_i^{(e)} \cdot [\bar{\mathbf{v}}_{CM} dt + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM}) dt] = \\ &= \bar{\mathbf{F}}^{(e)} \cdot d\bar{\mathbf{r}}_{CM} + [\sum_i (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_{CM}) \times \bar{\mathbf{f}}_i^{(e)}] \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} dt = \\ &= \bar{\mathbf{F}}^{(e)} \cdot d\bar{\mathbf{r}}_{CM} + \bar{M}_{CM}^{(e)} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} dt\end{aligned}$$

Primo termine -> variazione dell'energia cinetica  $K_{CM}$  del moto di traslazione del centro di massa

Secondo termine -> variazione di energia cinetica di rotazione del moto rispetto al CM

Se le forze esterne che fanno lavoro sul sistema rigido sono conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva. Nei problemi in cui il moto del sistema, sotto l'effetto dei vincoli o di altre condizioni, è funzione di una sola variabile (ad es.  $\mathbf{x}$ ) la conservazione dell'energia meccanica può essere nella forma

$$dE_m(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) / dt = 0$$

che fornisce un'equazione differenziale per  $\mathbf{x}(t)$  la cui soluzione, in corrispondenza di determinate condizioni iniziali, descrive il moto del sistema.

Tale metodo, detto "metodo dell'energia", è spesso un'utile alternativa all'utilizzo delle equazioni cardinali della dinamica.

# Meccanica dei fluidi

Si definiscono **fluidi** i sistemi che si deformano continuamente sotto l'azione di una forza tangenziale, tendente a far scorrere uno strato del sistema sull'altro, indipendentemente dalla sua intensità. Sistemi in fase liquida o gassosa soddisfano a tale requisito.

Descrizione del moto tramite le equazioni cardinali della dinamica ->  $3n$  gradi di libertà con  $n$  = numero di molecole -> **impossibile**.

Descrizione del moto applicando le equazioni cardinali a piccole porzioni di fluido: possibile ma è necessario definire due grandezze scalari:

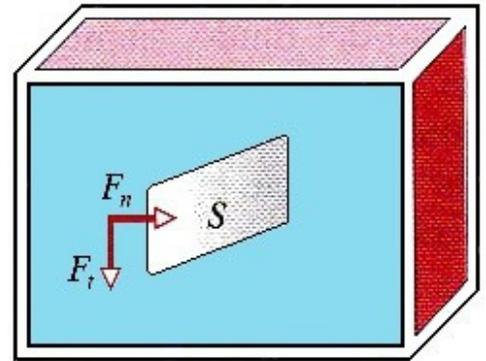
1) densità assoluta (e relativa)

2) pressione, definita come

$$p = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{F_n}{S} = \frac{dF_n}{dS}$$

dove  $S$  è una superficie limitata immersa nel fluido e  $F_n$  la componente normale della forza agente sulla superficie  $S$  dovuta agli urti delle molecole che si trovano da una parte rispetto a  $S$  (quelle situate dall'altra parte eserciteranno, per il principio di azione e reazione, una forza uguale e contraria).

Ambedue queste forze tendono a comprimere il fluido che si trova dalla parte opposta, mai a dilatarlo.



# Equazione della statica

Per un generico sistema meccanico  $\vec{F}^{(e)} = 0$

Nel caso dei fluidi si possono distinguere 2 tipi di forze:

- \* **forze a distanza** (gravitazionale, elettrica o magnetica, ecc.) -> **forze di volume**
- \* **forze a contatto** (dovute alle parti di fluido confinanti) -> **forze di superficie**

Se in un fluido di densità  $\rho$  in condizioni statiche si seleziona una porzione cilindrica infinitesima (base  $A$  e altezza  $dz$ )

- superficie laterale: forze di superficie si compensano per simmetria
- superfici superiore ed inferiore:

$$-\rho g A dz + p(z)A - p(z + dz)A = 0 \quad (1)$$

peso fluido interno	forza di pressione inferiore	forza di pressione superiore
------------------------	------------------------------------	------------------------------------

Sviluppando in serie di Taylor al primo ordine

$$p(z + dz) \approx p(z) + (dp/dz)_z dz$$

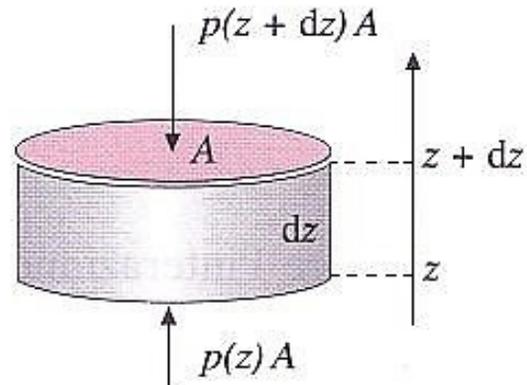
e sostituendo nella (1)

$$dp/dz = -\rho g \quad \text{equazione della statica}$$

$p$  non dipende quindi da  $x$  e  $y$  ma solo da  $z$  -->  $\text{grad}(p) = (0, 0, dp/dz)$

Essendo  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  si ha  $\text{grad}(p) = -\rho \vec{g} = -\rho \vec{f}_p / m = (\rho / m) \text{grad}(V)$  con  $\vec{f}_p$  forza peso e  $V$  energia potenziale gravitazionale

Di conseguenza le superfici a pressione costante (quelle per cui  $\text{grad}(p) = 0$ ) coincidono con le superfici equipotenziali gravitazionali (per le quali  $\text{grad}(V) = 0$ )



## Classificazione fluidi

**incompressibili** (ovvero a densità costante, liquidi)

**compressibili** (ovvero a densità variabile, gas)