Concludendo ………
(misure dirette o con strumenti tarati)

Si possono presentare le seguenti tipologie di misure:

Misura singola: "eventi rari"
- **la miglior stima del valore della grandezza sarà l'unico valore misurato**
- **la miglior stima dell'incertezza di misura sarà data dalla somma di tutti i contributi precedentemente elencati (esclusa riproducibilità)**

Tale procedura è analoga a quella usata nella stima "a priori" dell'incertezza

Misure in numero limitato (≈10/20):

Siano $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{10}$ i valori misurati.

Se $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots = x_{10}$ siamo nelle stesse condizioni della misura singola.

Se $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \ldots\ldots \neq x_{10} \rightarrow$ errore di riproducibilità significativo

- **la miglior stima del valore della grandezza è "ragionevolmente" data dalla media definita da**

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

- **la miglior stima dell'incertezza di riproducibilità sarà data dallo scarto massimo rispetto alla media definito da**

$$\Delta x = \max | x_i - \overline{x} |$$

Misure in gran numero: sarà possibile una trattazione statistica dei dati

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette dipendenza da una grandezza

<u>RELAZIONE LINEARE</u> $y = kx$ con k noto

x misurata direttamente → $x_m \pm \Delta x$

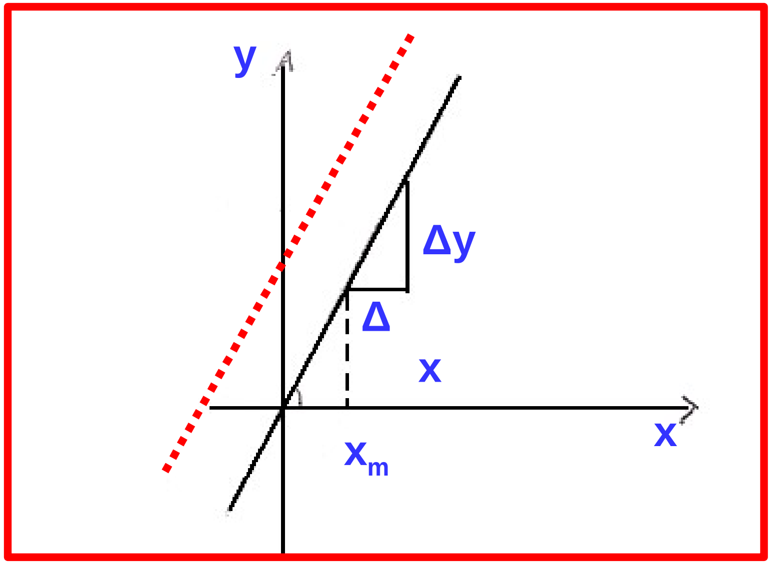
$y_m \pm \Delta y$?????

Dal grafico

$$y_m = k\, x_m$$

e

$$\Delta y = k\, \Delta x$$



Sia la stima del valore "vero" che quella dell'incertezza si moltiplicano per lo stesso fattore k (coeff. angolare della retta)

Per l'incertezza relativa

$$\Delta y / |y_m| = \Delta x / |x_m|$$ (incertezze relative uguali!!!)

Ma se fosse stato $y = kx + h$ con k e h noti avremmo avuto

$y_m = k\, x_m + h$ e $\Delta y = k\, \Delta x$ da cui $\Delta y / |y_m| = k\Delta x / |kx_m + h|$

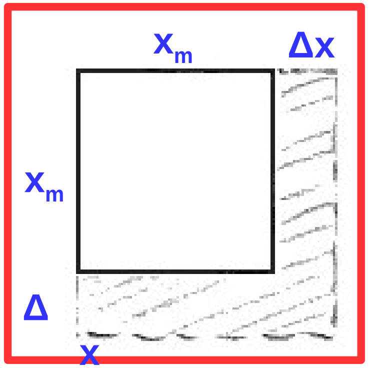
Propagazione delle incertezze nelle misure indirette
dipendenza da una grandezza

RELAZIONE QUADRATICA $y = x^2$

x misurata direttamente → $x_m \pm \Delta x$

$y_m \pm \Delta y$?????

Analogo geometrico

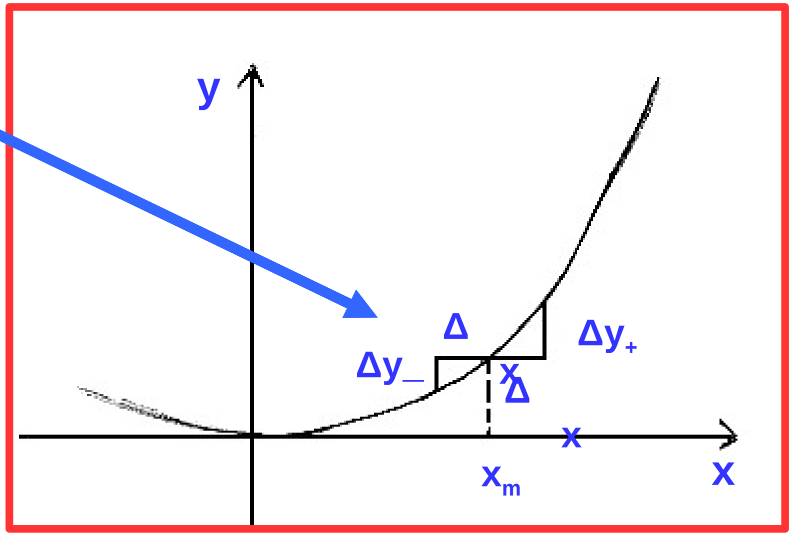


Area del quadrato

$$y_m = x_m^2$$

e

$$\Delta y_+ = (x_m + \Delta x)^2 - (x_m)^2 = \ldots\ldots = 2\, x_m\, \Delta x + (\Delta x)^2$$



E inoltre se avessimo dato un incremento negativo al lato avremmo ottenuto

$\Delta y\_ = (x_m - \Delta x)^2 - (x_m)^2 = \ldots\ldots = -2\, x_m\, \Delta x + (\Delta x)^2$ ovvero una incertezza asimmetrica.

Se però la misura su x è sufficientemente precisa (cioè $\Delta x / |x_m| \ll 1$) allora

$\Delta y_+ \approx \Delta y\_$ e potremo ricavare $\Delta y = 2\, x_m\, \Delta x$

La stima del valore dell'incertezza si ottiene moltiplicando Δx per $2\, x_m$ (coeff. angolare della retta tangente alla curva in x_m)

Per l'incertezza relativa $\Delta y / |y_m| = 2\, \Delta x / |x_m|$ (valida anche nel caso $y = k\, x^2$)

Ma se fosse stato $y = k\, x^2 + h$ → $\Delta y / |y_m| = 2\, x_m\, \Delta x / |k\, x_m^2 + h|$

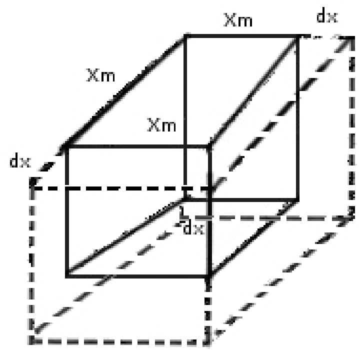
Propagazione delle incertezze nelle misure indirette
dipendenza da una grandezza

RELAZIONE CUBICA $y = x^3$

X misurata direttamente → $x_m \pm \Delta x$

$y_m \pm \Delta y$?????

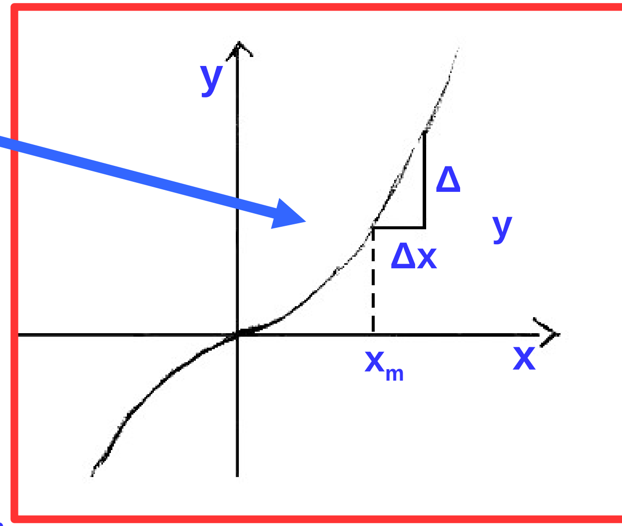
Analogo geometrico



Volume del cubo

$$y_m = x_m^3$$

e



$\Delta y_+ = (x_m + \Delta x)^3 - (x_m)^3 = \ldots\ldots = 3\,x_m^2\,\Delta x + 3\,x_m\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

E inoltre se avessimo dato un incremento negativo al lato avremmo ottenuto

$\Delta y\_ = (x_m - \Delta x)^3 - (x_m)^3 = \ldots\ldots = -\,3\,x_m^2\,\Delta x + 3\,x_m\,(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3$ ancora incertezza asimmetrica.

Se però la misura su x è sufficientemente precisa (cioè $\Delta x / |x_m| \ll 1$) allora

$\Delta y_+ \approx \Delta y\_$ e potremo ricavare $\Delta y = 3\,x_m^2\,\Delta x$

La stima del valore dell'incertezza si ottiene moltiplicando Δx per $3\,x_m^2$ (coeff. angolare della retta tangente alla curva in x_m)

Per l'incertezza relativa $\Delta y / |y_m| = 3\,\Delta x / |x_m|$ (valida anche nel caso $y = k\,x^3$)

Ma se fosse stato $y = k\,x^3 + h$ → $\Delta y / |y_m| = 3\,x_m^2\,\Delta x / |k\,x_m^3 + h|$

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette
dipendenza da una grandezza

<u>RELAZIONE GENERALE</u>

Avendo misurato direttamente il valore della grandezza fisica x con risultato

$$x_m \pm \Delta x$$

e conoscendo la relazione che lega la grandezza y a x

$$y = f(x)$$

possiamo ottenere la misura indiretta di y tramite le seguenti relazioni

$$y_m = f(x_m)$$

e

$$\Delta y = |df(x) / dx|_{x=x_m} * \Delta x$$

purché $\Delta x / |x_m| \ll 1$.

[Cenno alle analogie con il differenziale matematico]

Piccolo formulario di derivate

$(d/dx)\,[\,x^{n}\,] = n\,x^{n-1}$

--> $n = -2$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{-2}\,] = -2\,x^{-3} = -2\,/\,x^{3}$

--> $n = -1$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{-1}\,] = -1\,x^{-2} = -1\,/\,x^{2}$

--> $n = 0$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{0}\,] = 0$

--> $n = 1$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{1}\,] = 1$

--> $n = 2$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{2}\,] = 2\,x$

--> $n = 3$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{3}\,] = 3\,x^{2}$

$(d/dx)\,[\,f(x) + k\,] = (d/dx)\,[\,f(x)\,]$ $\qquad (d/dx)\,[\,k\,f(x)\,] = k\,(d/dx)\,[\,f(x)\,]$

$(d/dx)\,[\,\ln(x)\,] = 1/x$ $\qquad (d/dx)\,[\,\log_{a}(x)\,] = (1/x)\,\log_{a}e = (1/x)\,(1/\ln a)$

$(d/dx)\,[\,\ln f(x)\,] = (1/f(x))\,(d/dx)\,[\,f(x)\,]$

$(d/dx)\,[\,\mathrm{sen}(x)\,] = \cos(x)$ $\qquad (d/dx)\,[\,\cos(x)\,] = -\,\mathrm{sen}(x)$

$(d/dx)\,[\,\mathrm{tg}(x)\,] = (d/dx)\,[\,\mathrm{sen}(x)/\cos(x)\,] = 1/\cos^{2}(x)$

$(d/dx)\,[\,e^{x}\,] = e^{x}$

$(d/dx)\,[\,e^{f(x)}\,] = e^{f(x)}\,(d/dx)\,[\,f(x)\,]$