

Confronto tra misure di una grandezza fisica

Si siano ottenute le seguenti tre misure di una grandezza g

$$g_1 \pm \Delta g_1$$

$$g_2 \pm \Delta g_2$$

$$g_3 \pm \Delta g_3$$

con i Δg_i stime dell'incertezza tramite scarto massimo rispetto alle medie g_i

E' possibile ottenere un unico risultato finale per g dalle 3 misure?

Si può dare una risposta facendo i due seguenti passi:

1) Si può dare un unico risultato finale solo se le tre misure sono consistenti tra loro: ciò significa che gli intervalli $[g_1 - \Delta g_1, g_1 + \Delta g_1]$, $[g_2 - \Delta g_2, g_2 + \Delta g_2]$, $[g_3 - \Delta g_3, g_3 + \Delta g_3]$ devono sovrapporsi tra loro. In caso contrario NON è possibile ricavare un unico risultato finale.

2) Se la condizione 1) è soddisfatta si può dare come risultato finale il valore più preciso tra quelli riportati. Nel caso in cui 2 risultati abbiano la stessa precisione, è lecito dare come risultato finale la media dei due risultati e come incertezza il valore comune dell'incertezza.

Vedremo in seguito che, nel caso in cui le misure siano affette da soli errori accidentali (e quindi le stime delle incertezze riportate si riferiscano a deviazioni standard e non a errori massimi) sarà possibile sviluppare una procedura più raffinata per ottenere il risultato finale. Tale procedura avrà inoltre il pregio di tener conto della precisione di tutti i risultati disponibili.

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette dipendenza da più grandezze

Ci limiteremo ad esaminare il caso in cui $z = f(x,y)$ dove x e y sono state misurate direttamente con risultati $x_m \pm \Delta x$ $y_m \pm \Delta y$

In ogni caso cercheremo i limiti inferiore e superiore per z permessi da tali misure

- Somma ($z = x + y$)**

limite superiore $\rightarrow x_m + y_m + \Delta x + \Delta y$ limite inferiore $\rightarrow x_m + y_m - (\Delta x + \Delta y)$
quindi $z_m = x_m + y_m$ e $\Delta z = \Delta x + \Delta y$ (indipendenza !?!)

- Differenza ($z = x - y$)**

limite superiore $\rightarrow x_m - y_m + \Delta x + \Delta y$ limite inferiore $\rightarrow x_m - y_m - (\Delta x + \Delta y)$
quindi $z_m = x_m - y_m$ e $\Delta z = \Delta x + \Delta y$ (come somma !)

- Prodotto ($z = x \cdot y$)**

limite superiore $\rightarrow x_m \cdot y_m + y_m \cdot \Delta x + x_m \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$ \rightarrow asimmetrici
limite inferiore $\rightarrow x_m \cdot y_m - y_m \cdot \Delta x - x_m \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$ \rightarrow se non sono $\Delta x/x_m, \Delta y/y_m \ll 1$
in tali condizioni $z_m = x_m \cdot y_m$ e $\Delta z = y_m \cdot \Delta x + x_m \cdot \Delta y$

- Quoziente ($z = x/y$)**

limite superiore $\rightarrow x_m/y_m [1 + \Delta x/x_m + \Delta y/y_m + \Delta x \cdot \Delta y/x_m y_m]$ \rightarrow asimmetrici
limite inferiore $\rightarrow x_m/y_m [1 - \Delta x/x_m - \Delta y/y_m + \Delta x \cdot \Delta y/x_m y_m]$ \rightarrow se non $\Delta x/x_m, \Delta y/y_m \ll 1$
in tali condizioni $z_m = x_m/y_m$ e $\Delta z = \Delta x/y_m + (x_m/y_m^2) \cdot \Delta y$

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette dipendenza da più grandezze

REGOLA GENERALE

La grandezza fisica **g** si ottiene dalla misura di altre grandezze **x, y, z, ...,** misurate direttamente e indipendentemente le une dalle altre, tramite la conoscenza della relazione funzionale

$$g = f(x, y, z, \dots)$$

La miglior stima del **valore vero di g** è data da

$$g_v = f(x_v, y_v, z_v, \dots)$$

mentre quella dell'**incertezza su g** si ottiene da

$$\Delta g = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_v, y_v, z_v, \dots} \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_v, y_v, z_v, \dots} \cdot \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{x_v, y_v, z_v, \dots} \cdot \Delta z + \dots$$

dove

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_v, y_v, z_v, \dots}$$

indica il valore assoluto della derivata parziale della funzione **f** rispetto alla variabile **x** nel punto considerato

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette dipendenza da più grandezze

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA RELATIVA

La grandezza fisica g si ottiene dalla misura di altre grandezze x, y, z, \dots , misurate direttamente e indipendentemente le une dalle altre, tramite la conoscenza della relazione funzionale del tipo

$$g = \phi(x) \cdot \theta(y) \cdot \lambda(z) \dots$$

Ricordiamo che $\frac{df}{f} = d(\ln f)$ e quindi $\varepsilon = \frac{\Delta g}{g_v} = \Delta(\ln g_v)$

Avremo che

$$\begin{aligned} \frac{dg}{g} &= d \ln g = d \ln[\phi(x) \cdot \theta(y) \cdot \lambda(z) \dots] = d \ln \phi(x) + d \ln \theta(y) + d \ln \lambda(z) + \dots \\ &= \frac{d\phi}{\phi} + \frac{d\theta}{\theta} + \frac{d\lambda}{\lambda} + \dots = \frac{1}{\phi} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \cdot dx + \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{dy}\right) \cdot dy + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dz}\right) \cdot dz + \dots \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\Delta g}{g_v} = \left| \frac{1}{\phi(x_v)} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_v} \right| \Delta x + \left| \frac{1}{\theta(y_v)} \cdot \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{y_v} \right| \Delta y + \left| \frac{1}{\lambda(z_v)} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)_{z_v} \right| \Delta z + \dots$$

Applicazioni in lab.: $g=4\pi^2(I/T^2)$ $\rho_r = M_1/(M_3 - M_2)$ $\rho_r = (M_b - M_a)/(M_b - M_c)$

Esercizi, esercizi, esercizi.....

- 1) La grandezza T è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$T = \frac{a^2 - b^2}{a + 2b}$$

dalle seguenti misure dirette: $a = (10.0 \pm 0.2) \text{ cm}$; $b = (50.0 \pm 0.5) \text{ mm}$. Determinare la miglior stima di T e della sua incertezza relativa.

$$[T = (3.75 \pm 0.21) \text{ cm} \quad \Delta T/T \simeq 5.5\%]$$

- 2) La grandezza S è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$S = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)$$

dalle seguenti misure dirette: $\beta = (1.00 \pm 0.02) \text{ kg}$; $\alpha = (500 \pm 5) \text{ g}$. Determinare la miglior stima di S e della sua incertezza relativa.

$$[S = (1.50 \pm 0.05) \text{ Kg}^{-1} \quad \Delta S/S \simeq 3\%]$$

- 3) La grandezza R è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$R = \frac{\text{sen}(\alpha + 2\beta)}{\text{sen}(\beta)}$$

dalle seguenti misure dirette: $\alpha = (60^\circ 0' \pm 3')$; $\beta = (30^\circ 0' \pm 2')$

Determinare la miglior stima di R e della sua incertezza relativa.

$$[R = (1.732 \pm 0.004) \quad \Delta R/R \simeq 0.2\%]$$

- 4) La grandezza A è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$A = \frac{\beta^2}{\ln(\alpha - \beta)}$$

dalle seguenti misure dirette: $\alpha = (4.00 \pm 0.01)$; $\beta = (100 \pm 2) \cdot 10^{-2}$

Determinare la miglior stima di A e della sua incertezza relativa.

$$[A = (0.91 \pm 0.04) \quad \Delta A/A \simeq 5\%]$$

Rappresentazione numerica delle grandezze fisiche

Rappresentazione decimale

Il nostro sistema convenzionale è il sistema decimale cioè con base 10. La sequenza dei valori posizionali è determinata dalle sequenze delle potenze di 10

$$10^3 \mid 10^2 \mid 10^1 \mid 10^0 \mid 10^{-1} \mid 10^{-2} \mid 10^{-3}$$

Notazione scientifica

$$q = a \cdot 10^b$$

in cui $0.5 \leq a \leq 5$ (cioè a è dell'ordine dell'unità, come vedremo in seguito) e b è un opportuno numero intero

non si scriverà	3450.25	ma	$3.45025 \cdot 10^3$;
non si scriverà	0.00841	ma	$0.841 \cdot 10^{-2}$;
non si scriverà	480.210	ma	$4.80210 \cdot 10^2$ ecc.

Rappresentazione numerica delle grandezze fisiche

Quante cifre occorre considerare nella rappresentazione numerica delle costanti??

Ex. -> misurato r ($r_m \pm \Delta r$) si vuol determinare la lunghezza della semicirconferenza πr :
con quante cifre devo esprimere π (3.1415926539.....)?????

Valore approssimato $q \rightarrow r = q + \Delta r$ con $|\Delta r| \ll |r|, |q|$
valore approssimato per difetto se $\Delta r \geq 0$, per eccesso se $\Delta r \leq 0$.

$\Delta r \rightarrow$ scarto di approssimazione, o approssimazione assoluta di q rispetto ad r .

$\varepsilon = |\Delta r/r| \cong |\Delta r/q| \rightarrow$ approssimazione relativa

Numero di cifre significative \rightarrow n. cifre decimali della notazione scientifica necessarie per assicurare la rappresentazione della quantità r con l'approssimazione relativa ε desiderata (« incertezza relativa sulle grandezze fisiche misurate direttamente)

Esempi: $\pi = 3.14 \rightarrow \varepsilon \text{ ???? } (\approx 10^{-3})$
 $\quad = 3.142 \rightarrow \varepsilon \text{ ???? } (\approx 10^{-4})$
 $\quad = 3.1416 \rightarrow \varepsilon \text{ ???? } (\approx 10^{-5})$

Convenzione: se un valore è dichiarato con n cifre significative il suo valore è approssimato in assoluto al più per 5 unità sulla prima cifra non dichiarata

Cifre significative nelle operazioni numeriche

ADDIZIONE:

$$q_1 = a_1 \cdot 10^{b_1} \quad \rightarrow \quad s = q_1 + q_2 = a_s \cdot 10^{b_s}$$
$$q_2 = a_2 \cdot 10^{b_2} \quad \rightarrow$$

n. cifre decimali = $\min(n_1, n_2)$

SOTTRAZIONE:

$$d = q_1 - q_2 = a_q \cdot 10^{b_q} \quad \rightarrow \quad \text{n. cifre decimali} = \min(n_1, n_2)$$

MOLTIPLICAZIONE:

$$p = q_1 \times q_2 = (a_1 \cdot 10^{b_1}) \times (a_2 \cdot 10^{b_2}) = (a_1 \times a_2) \cdot 10^{b_1+b_2} = a_p \cdot 10^{b_p}$$

n. cifre significative = $\min(n_1, n_2)$

DIVISIONE:

$$q = q_1 / q_2 = (a_1 \cdot 10^{b_1}) / (a_2 \cdot 10^{b_2}) = (a_1 / a_2) \cdot 10^{b_1-b_2} = a_q \cdot 10^{b_q}$$

n. cifre significative = $\min(n_1, n_2)$