Capitolo 1

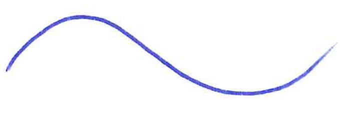
Insiemi ed elementi di logica

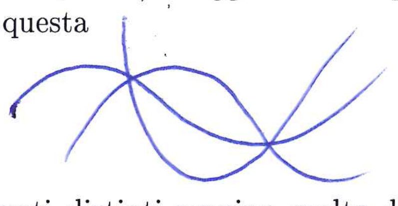
1.1 Principali notazioni della teoria degli insiemi

Nel linguaggio comune la parola insieme viene utilizzata per identificare collezioni/famiglie di oggetti sia astratti che concreti. Diciamo ad esempio frasi del tipo L'insieme dei paesi europei ha accusato una perdita di competitività, In base all'insieme di informazioni in nostro possesso abbiamo che..., Un database è un insieme di dati e informazioni organizzate logicamente e consultabili per via informatica etc.

Nel momento in cui si provi a formalizzare matematicamente il concetto di *insieme* ci si accorge che esso è problematico nel senso che non se ne può spiegare il significato in maniera soddisfacente utilizzando concetti più semplici o maggiormente intuitivi. Non cercheremo pertanto di stabilire cosa sia davvero un insieme ma assumeremo tale concetto come *primitivo* supponendo che chi legge ne abbia una certa intuizione. Chiameremo *elementi* gli oggetti che fanno parte di un insieme. Ad esempio se consideriamo l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano, i suoi elementi sono a, e, i, o, u.

La teoria che svilupperemo avrà, fra gli altri scopi, quello di precisare tale intuizione evitandone le possibili derive o le distorte interpretazioni. Questo al fine di avere a disposizione un concetto di insieme che venga davvero percepito in modo uniforme da tutti. Avete già incontrato un approccio simile trattando il concetto di retta nella geometria euclidea. Anche in quel caso avete detto che la retta è un concetto primitivo. Successivamente avete dichiarato vere certe proprietà, i cosiddetti assiomi, come ad esempio quello che dice che per due punti distinti passa una ed una sola retta. In tal modo una possibile soggettiva interpretazione della retta che veda come retta anche una linea come questa





viene corretta, perché è chiaro come per due punti distinti passino molte di tali linee. In ambito teoria degli insiemi si usa il termine principio con ugual significato di assioma.

Per cominciare il nostro percorso con gli insiemi partiamo dal

- **Principio di estensionalità** *Un insieme è completamente determinato dai suoi elementi. Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.*

Tale principio afferma che trattare con un certo insieme significa trattare con i suoi elementi e nulla più. O, se preferite, conosciamo compiutamente un insieme solo a patto di saper decidere se un qualsivoglia oggetto è o no un suo elemento.

Gli insiemi sono solitamente indicati con lettere maiuscole $A, B, C, \ldots$, mentre gli elementi con lettere minuscole usualmente corrispondenti $a, b, c, \ldots$. Questa è evidentemente una convenzione a cui, se necessario, ci potremo sottrarre.

Se A è un insieme e a è un suo elemento diciamo che *a appartiene ad A* e scriviamo in simboli $a \in A$. Se un oggetto x non è elemento di A, diciamo che *x non appartiene ad A* e scriviamo in simboli $x \notin A$.

Gli insiemi più importanti in matematica sono sicuramente gli insiemi numerici. Essi costituiscono il serbatoio principale per costruire la maggior parte degli altri insiemi utili in matematica.

- L'insieme dei numeri naturali è indicato con $\mathbb{N}$ ed i suoi elementi sono i numeri
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$
- L'insieme dei numeri interi è indicato con $\mathbb{Z}$ ed i suoi elementi sono i numeri
$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$
- L'insieme dei numeri razionali è indicato con $\mathbb{Q}$ e, i suoi elementi sono le frazioni, ossia scritture del tipo $\frac{p}{q}$, dove $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Si ricordi che $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ se e solo se $pq' = qp'$.
- L'insieme dei numeri reali è indicato con $\mathbb{R}$. Ne tratterete a fondo le proprietà nel corso di Calcolo. Ricordiamo solo che è l'insieme numerico che estende $\mathbb{Q}$ in modo da poter associare ad ogni punto della retta un numero. Due importanti elementi di $\mathbb{R}$ e non di $\mathbb{Q}$ sono $\sqrt{2}$ e π.
- L'insieme dei numeri complessi è indicato con $\mathbb{C}$ e, i suoi elementi sono i numeri del tipo $a + ib$ dove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria ossia quel numero definito dalla proprietà $i^2 = 1$.

Tali insiemi numerici sono in parte già noti allo studente e verranno studiati nel corso di calcolo. Per quanto ci riguarda saremo interessati soprattutto alle operazioni aritmetiche su di essi. Si noti che $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono ben distinguibili da $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ perché in essi si possono effettuare somme, sottrazioni, prodotti e divisione per numeri diversi da zero. Questa ampia possibilità di operare la esprimiamo dicendo che $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono *campi*. In $\mathbb{N}$ invece non è possibile eseguire certe sottrazioni ottenendo come risultato ancora un naturale; in $\mathbb{Z}$ non è possibile eseguire certe divisioni ottenendo come risultato ancora un intero. Ad esempio: $4 \in \mathbb{N}$ e $6 \in \mathbb{N}$ ma $4 - 6 \notin \mathbb{N}$; $-2 \in \mathbb{Z}$ e $5 \in \mathbb{Z}$ ma $-2 : 5 \notin \mathbb{Z}$. Notate che interpretando invece $4, 6, -2, -5$ come elementi di $\mathbb{R}$, abbiamo che $4 - 6 = -2 \in \mathbb{R}$ e $-2 : 5 = \frac{-2}{5} \in \mathbb{R}$ dato che $\mathbb{R}$ è un campo.

1.1.1 Rappresentazione di un insieme per elencazione

Se un insieme ha un numero finito (e piccolo!) di elementi, è possibile descriverlo elencando tutti i suoi elementi separati da virgola entro due parentesi graffe. Ad esempio la scrittura
$$\{1, 2, 3, 4\}$$

denota l'insieme avente come elementi i numeri naturali 1,2,3 e 4.

Osserviamo che i simboli $\in$ e $\notin$ richiedono che alla loro destra vi sia un simbolo che denota un insieme. Sono pertanto formalmente corrette le scritture

$$1 \in \{1,2\}\ (vera), \quad 2 \notin \{1,2\}\ (falsa), \quad 3 \notin \{1,2\}\ (vera),$$

e di esse possiamo dire se sono vere o false. Non è invece corretta la scrittura

$$\{1,2\} \in 1$$

in quanto, nel contesto che stiamo analizzando 1 è un numero naturale, e dunque il simbolo 1 non indica un insieme.

Osserviamo che un insieme puó essere elemento di un altro insieme. Ad esempio l'insieme

$$\{\{1\},\{1,2\}\}$$

è l'insieme costituito dagli elementi $\{1\},\{1,2\}$. Notate che ciascuno di tali elementi è un insieme. E' corretto scrivere $\{1\} \in \{\{1\},\{1,2\}\}$ come pure $\{1,2\} \in \{\{1\},\{1,2\}\}$ e si tratta di affermazioni vere. E' corretto anche scrivere $3 \in \{\{1\},\{1,2\}\}$ ma in tal caso si tratta di una affermazione falsa. Anche scrivere $\{1\} \in \{1,2,3\}$ è formalmente corretto ma falso.

Gli insiemi aventi un solo elemento sono detti singoletti. Ad esempio sono singoletti gli insiemi

$$\{1\}, \quad \{\{1,2,3,4\}\}, \quad \{\mathbb{N}\}.$$

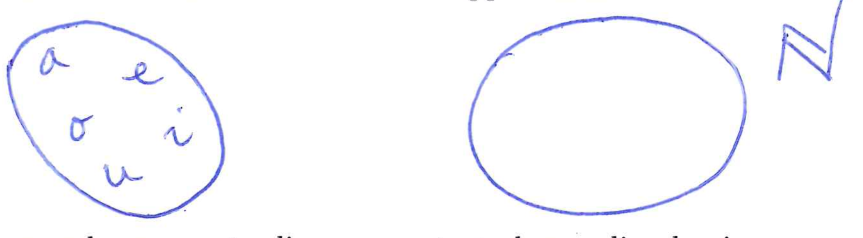
In molte circostanze, è assai conveniente assegnare ad un dato insieme un nome che lo denoti. Gli insiemi numerici, data la loro importanza hanno, come abbiamo visto, un nome specifico. La scrittura

$$A := \{1,2,3\} \text{ o più semplicemente } A = \{1,2,3\}$$

all'interno di un certo ragionamento significa che, fino al termine dello stesso, l'insieme $\{1,2,3\}$, potrà essere indicato sinteticamente con la lettera A. Tale scrittura si legge *si indichi con A l'insieme* $\{1,2,3\}$ oppure *sia A l'insieme* $\{1,2,3\}$ oppure *si ponga A uguale a* $\{1,2,3\}$.

1.1.2 I diagrammi di Eulero-Venn

Un modo ingenuo ma intuitivo per rappresentare gli insiemi è dato dai cosidetti diagrammi di Eulero-Venn. Essi consistono in una linea chiusa tracciata nel piano al cui interno si collocano gli elementi dell'insieme in esame, contrassegnandoli in qualche modo, ad esempio con un puntino. In realtà, nella maggior parte dei casi, basta ed è preferibile interpretare la linea chiusa del diagramma come delimitante una regione del piano in cui possiamo pensare presenti gli elementi dell'insieme, senza bisogno di raffigurarli. Ad esempio, con i diagrammi di Venn, l'insieme delle vocali e l'insieme $\mathbb{N}$ si rappresentano così:



Stiamo disegnando una sorta di sacco contente le vocali nel primo caso e tutti i numeri naturali nel secondo.

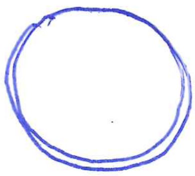
Ovviamente i diagrammi di Venn forniscono una visualizzazione da cui il nostro pensiero può trarre solo una fonte di ispirazione e nient'altro. *Nessun ragionamento rigoroso riguardante gli insiemi può essere affidato in modo esclusivo a tali diagrammi.* Vedremo peró che con essi si possono facilmente visualizzare le operazioni fra insiemi e farsi un'idea delle proprietà che le riguardano. Inoltre vedremo che i diagrammi di Venn sono molto preziosi per fare congetture.

1.1.3 Uguaglianza e inclusione fra insiemi

Il principio di estensionalità può essere utilizzato per dare la definizione di uguaglianza fra insiemi, chiarendo in modo formale la frase *avere gli stessi elementi.*

Definizione 1. *Siano A e B insiemi. Diciamo che A è uguale a B se ogni elemento di A è elemento di B e se ogni elemento di B è elemento di A. In simboli scriviamo che $A = B$. Se A non è uguale a B diciamo che A è diverso da B e scriviamo $A \neq B$.*

Con i diagrammi di Venn tale concetto può essere così visualizzato:



Si osservi che, secondo la definizioni introdotta abbiamo che, ad esempio,

$$\{1,2\} = \{2,1\}, \qquad \{1,2\} = \{1,1,2\}.$$

Ció mette in evidenza che *l'ordine con cui si scrivono gli elementi in un insieme ed eventuali ripetizioni sono ininfluenti.* Inoltre appare chiaro come lo stesso insieme possa essere rappresentato in più modi.

Proposizione 2. *Siano A, B insiemi. Se $A = B$, allora $B = A$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $A = B$ sia vera (immaginiamo cioè di prendere due insiemi A e B per i quali risulti vera l'affermazione $A = B$). Allora ogni elemento di A è elemento di B e ogni elemento di B è elemento di A. Leggendo queste due affermazioni in ordine scambiato abbiamo pure che ogni elemento di B è elemento di A e ogni elemento di A è elemento di B, e dunque $B = A$ è vera. □

Abbiamo visto così una prima dimostrazione, ossia un ragionamento logicamente rigoroso che prova la verità di una affermazione (enunciato) utilizzando esclusivamente il fatto che l'ipotesi sia vera, le definizioni degli enti in gioco, gli assiomi riguardanti tali enti e le proposizioni già dimostrate. Una volta dimostrata vera, l'affermazione si chiamerà proposizione, teorema, lemma, corollario, legge. Queste parole sono di fatto sinonimi e via via che le incontreremo ne preciseremo la specificità.

Sulla base della precedente proposizione possiamo usare equivalentemente le espressioni A è uguale a B, B è uguale ad A, oppure A e B sono uguali. Questa possibilità non era chiara a priori. Quindi dimostrare qualcosa fa crescere la nostra conoscenza.

Ricordiamo che un enunciato si compone sempre di due parti. Una prima parte in cui viene contestualizzato il risultato che si vuole stabilire: nel caso in esame Siano A e B insiemi.

Una seconda parte in cui si specificano l'*ipotesi* $\mathcal{I}$ e la *tesi* $\mathcal{T}$ tramite la scrittura se $\mathcal{I}$ allora $\mathcal{T}$: nel caso in esame $\mathcal{I}$ è $A = B$, mentre $\mathcal{T}$ è $B = A$.

Introduciamo ora la seguente fondamentale definizione.

Definizione 3. *Siano A e B insiemi. Diciamo che A è sottoinsieme di B (oppure A è incluso in B o B contiene A) se ogni elemento di A è un elemento di B. In simboli scriviamo*

$$A \subseteq B.$$

Se A non è un sottoinsieme di B, scriviamo

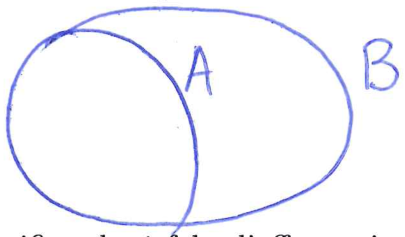
$$A \not\subseteq B.$$

La scrittura $A \not\subseteq B$ si può leggere anche A non è incluso in B o B non contiene A.

Ad esempio

$$\{3, 12\} \subseteq \{12, -7, 3, 8\}, \quad \{7, 8, 103\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Con i diagrammi di Venn l'inclusione può essere così visualizzata:



Osserviamo che $A \not\subseteq B$ significa che è falsa l'affermazione per cui ogni elemento di A sia un elemento di B. Ció significa dunque che esiste almeno un elemento di A che non è un elemento di B. Ad esempio

$$\{1, 2, 3, 4\} \not\subseteq \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

poichè $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ ma $3 \notin \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$. Abbiamo inoltre che

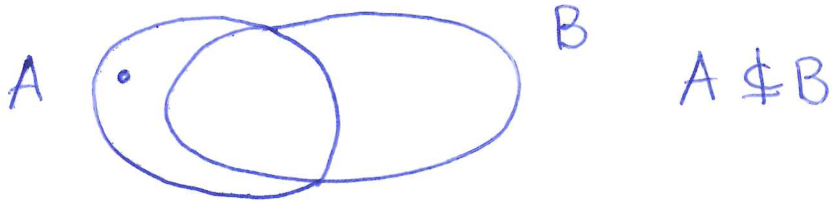
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

(giustificatelo per esercizio) mentre

$$\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}.$$

Abbiamo incontrato un'interessante idea che riprenderemo: *ogni si nega con esiste...*

Con i diagrammi di Venn la non inclusione può essere così visualizzata:



Si osservi anche che, direttamente dalle definizioni di uguaglianza e inclusione, valgono le due seguenti proposizioni.

Proposizione 4. *Siano A e B insiemi. Se $A = B$ allora $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

Proposizione 5. *Siano A e B insiemi. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$.*

I due enunciati sopra descritti sono l'uno l'inverso dell'altro. Utilizzando una espressione assai comune in matematica, ossia l'espressione "se e solo se", essi si riassumono nella seguente proposizione.

Proposizione 6. *Siano A e B insiemi. $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

Avendo ben compreso cosa significhi $A \not\subseteq B$, sulla base delle precedenti proposizioni possiamo meglio comprendere il significato dell'espressione $A \neq B$. Infatti sappiamo che $A = B$ è lo stesso che dire che valgono entrambe le relazioni $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Pertanto $A \neq B$ è equivalente a dire che almeno una fra $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ è falsa. In altre parole

$$A \neq B \text{ se e solo se } A \not\subseteq B \text{ o } B \not\subseteq A.$$

Come sempre *in matematica la congiunzione "o" deve essere intesa con valenza inclusiva e non escusiva.* Ció significa che almeno una delle alternative deve valere (e non soltanto una). Ad esempio, $\{1,2,3\} \neq \{2,3,4\}$ poichè $\{1,2,3\} \not\subseteq \{2,3,4\}$ dato che $1 \in \{1,2,3\}$ e $1 \notin \{2,3,4\}$. Tale uso è presente anche nel linguaggio comune anche se, in molte circostanze, la particella o ha invece valenza esclusiva. Si confrontino le frasi: In estate vado al mare o in montagna (inclusivo, perchè intendo di poter andare anche sia al mare che in montagna) e Quest'estate sono al verde. O vado al mare o in montagna (esclusivo, perchè intendo di poter andare solamente al mare o solamente in montagna e non ad entrambi).

Proposizione 7. *Siano A, B e C insiemi. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.*

Dimostrazione. Si consideri un elemento $a \in A$. Voglio far vedere che $a \in C$. Poichè $A \subseteq B$ si ha che $a \in B$. Inoltre, poichè $B \subseteq C$, dalla definizione di inclusione abbiamo che $a \in C$. Dunque ogni elemento di A appartiene a C e quindi $A \subseteq C$. □

Proposizione 8. *Siano A, B e C insiemi. Se $A = B$ e $B = C$, allora $A = C$.*

Dimostrazione. Se $A = B$ e $B = C$, allora $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Dalla precedente proposizione $A \subseteq C$. Inoltre abbiamo anche che $B \subseteq A$ e $C \subseteq B$. Dalla precedente proposizione $C \subseteq A$. Pertanto dalla Proposizione 6 si ha che $A = C$. □

Definizione 9. *Siano A e B insiemi. Si dice che A è propriamente incluso in B, e si scrive $A \subsetneq B$, se $A \subseteq B$ ma $B \not\subseteq A$.*

Ad esempio $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, $\{1,2\} \subsetneq \{1,2,a\}$ essendo a la prima lettera dell'alfabeto italiano.

1.1.4 Rappresentazione di un insieme tramite proprietà caratteristica

In molti casi la descrizione di un insieme mediante l'elencazione dei suoi elementi non è praticamente possibile oppure non è conveniente. Si pensi ad esempio all'insieme dei numeri naturali maggiori di 10. In tali circostanze si cerca di descrivere l'insieme attraverso l'individuazione di una proprietà che caratterizzi i suoi elementi. Nell'esempio precedente tale proprietà è essere maggiore di 10 e, per comprenderla completamente, abbiamo dovuto prima specificare a quali numeri ci riferivamo, i numeri naturali, cioè far riferimento ad un certo universo. Notate che, dato un numero naturale, è sempre possibile stabilire se sia vero o falso che esso risulti maggiore di 10. Più in generale, se una frase esprime una proprietà, in un certo universo, la cui verità/falsità sia comunque controllabile (almeno potenzialmente)[1] essa può essere utilizzata per definire un nuovo insieme. Per rendere rigorosa tutta la faccenda, occorre però introdurre un nuovo assioma.

- **Assioma di comprensione** *Sia U un insieme universo e sia $\mathcal{P}$ una proprietà degli elementi di U espressa rispetto ad un generico elemento x di U (una variabile in U). Gli elementi di U che sostituiti ad x rendono vera $\mathcal{P}$ costituiscono sempre un sottoinsieme di U (in particolare un insieme) di cui $\mathcal{P}$ è detta la proprietà caratteristica.*

L'insieme di proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ è indicato con la scrittura

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x) \text{ è vera}\}$$

o più sinteticamente

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\}$$

e si dice anche che tale insieme è definito da $\mathcal{P}$. Il simbolo : si legge *tale che.* Notiamo che la scelta della variabile x non ha nessun significato specifico: essa può essere sostituita da un qualunque altro simbolo. In altre parole, le seguenti scritture indicano lo stesso insieme:

$$\{y \in U : \mathcal{P}(y)\}, \quad \{\clubsuit \in U : \mathcal{P}(\clubsuit)\}.$$

Alcuni esempi di insiemi descritti tramite proprietà caratteristica sono i seguenti:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ è somma di } 3 \text{ e di } 5\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}, \quad \{y \in \mathbb{Z} : 3y + 6 = 0\}.$$

Si noti come non abbia senso chiedersi se sia vera la frase x è somma di 3 e di 5 ma solo chiedersi se siano vere le singole frasi ottenute da essa sostituendo un numero naturale a x. Ad esempio 4 è somma di 3 e di 5 è falsa, 8 è somma di 3 e di 5 è vera.

Ovviamente 8 è l'unico naturale che sostituito al posto di x rende vera la frase x è somma di 3 e di 5. In altre parole

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ è somma di } 3 \text{ e di } 5\} = \{8\}.$$

Gli insiemi sopra descritti ammettono tutti una rappresentazione per elencazione. Si ha infatti

$$\{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

e

$$\{y \in \mathbb{Z} : 3y + 6 = 0\} = \{-2\}.$$

Questo ci mostra ancora una volta che non esiste un solo modo per rappresentare un insieme e, a seconda del contesto, potremo preferire l'una o l'altra rappresentazione. Ad esempio, i tre insiemi seguenti coincidono

$$\{4\}, \quad \{n \in \mathbb{N} : n > 3, n < 5\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : 4x - 16 = 0\}$$

[1] Quando utilizzeremo il termine proprietà daremo per scontato il verificarsi di questo fatto.

Nel considerare il secondo esempio sopra, si tenga presente che affiancare due enunciati, separandoli con una virgola, è un modo sintetico per esprimere la congiunzione e.

Esercizio Individuare la proprietà caratteristica del seguente insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} : x + \ln(x^2+1) \geq x(\sqrt{3x^2-1}) \right\}.$$

Dire se $A \subseteq \mathbb{N}$. E' facile capire se tale insieme può essere rappresentato per elencazione o no? In altre parole contiene solo una quantità finita di elementi? Sapete identificare un $x_0 \in A$ e un $x_1 \notin A$? Già questo può non essere banale![2]

Come grande serbatoio di esempi si noti che ogni equazione in una variabile come pure ogni disequazione in una variabile espressa in un universo numerico $U \subseteq \mathbb{R}$ può essere utilizzata come proprietà caratteristica. L'insieme che definisce è quello che avete chiamato l'insieme delle soluzioni dell'equazione/disequazione. Così se svolgo

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

trovando le soluzioni $x = 1$ e $x = 2$, questo significa che posto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

si ha $S = \{1, 2\}$.

Proposizione 10. *Ogni sottoinsieme A di un universo U è definibile tramite una proprietà caratteristica.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq U$. Consideriamo in U la proprietà $\mathcal{P} =''\ x \in A''$. Proviamo che

$$A = \{x \in U : x \in A\},$$

utilizzando la doppia inclusione. Provo prima che $A \subseteq \{x \in U : x \in A\}$. Se $x \in A$ abbiamo che $x \in U$ perché $A \subseteq U$ per ipotesi. E ovviamente rende vera la proprietà $x \in A$. Provo ora che $\{x \in U : x \in A\} \subseteq A$. Sia $x \in \{x \in U : x \in A\}$. Allora risulta vero che $x \in A$ e così abbiamo finito. □

Notiamo che possono esistere proprietà che sono soddisfatte da tutti gli elementi dell'universo. Ad esempio l'insieme $W = \{x \in \mathbb{N} : x = x\}$ coincide con l'universo $\mathbb{N}$, semplicemente perché l'equazione $x = x$ è una identità ossia risulta vera qualunque naturale venga sostituito al posto di x. D'altra parte la stessa cosa vale usando una qualsiasi altra identità, quale ad esempio $2x+1 = 1+2x$. Questo ci fa osservare che *proprietà diverse possono definire lo stesso insieme.*

Notiamo poi che esistono proprietà che non sono soddisfatte da alcun elemento di U. Consideriamo, ad esempio,

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$$

Ovviamente nessun numero naturale soddisfa la proprietà richiesta. L'insieme considerato non ha dunque alcun elemento. Tale insieme viene chiamato *insieme vuoto* e denotato con il simbolo speciale $\varnothing$. In sostanza il simbolo $\varnothing$ è dedicato all'unico[3] insieme per cui una

[2] Cantor diceva: quando penso a un insieme penso ad un abisso.

[3] Giustificate, per esercizio, perché esista un unico insieme vuoto.

scrittura del tipo $a \in \varnothing$ risulta sempre falsa. Se preferite, la scrittura $a \notin \varnothing$ risulta sempre vera. Possiamo quindi scrivere $A = \varnothing$.

L'insieme vuoto ci dà l'occasione di fare una prima *dimostrazione per assurdo* o *per contraddizione*. Si tratta di una strategia molto comune in matematica, ma alquanto spiazzante ad un primo incontro. Innanzitutto diciamo che una dimostrazione (un ragionamento) perviene ad una *contraddizione* se, portando avanti il ragionamento, si ottiene ad un certo punto la verità di una affermazione falsa, quale ad esempio $1 \neq 1$, $4 < 3$, $6 = 7$, $x \in A$ e $x \notin A$.

Dimostrazione per assurdo: Se supponendo vera $\mathcal{I}$ ma falsa $\mathcal{T}$ si riesce ad ottenere una contraddizione, allora concludiamo che "Se $\mathcal{I}$ allora $\mathcal{T}$" è vera.

Proposizione 11. *Sia A un insieme. Allora $\varnothing \subseteq A$.*

Dimostrazione. Sia A un insieme e supponiamo, per assurdo, che $\varnothing \nsubseteq A$. Allora esiste $x \in \varnothing$ tale che $x \notin A$. Ma abbiamo notato trattando l'insieme vuoto che l'affermazione $x \in \varnothing$ è falsa. Quindi abbiamo ottenuto una contraddizione. Pertanto resta dimostrato che $\varnothing \subseteq A$. □

Osserviamo infine che per una proprietà $\mathcal{P}(x)$, è contemplato il caso estremo in cui la variabile x non compaia esplicitamente. In tal caso le sostituzioni di x non hanno alcun effetto ossia $\mathcal{P}(x)$ è vera o falsa una volta per tutte. Di conseguenza ci sono due sole possibilità per l'insieme A che la ammette come proprietà caratteristica: $A = U$ o $A = \varnothing$. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 2 = 2\} = \mathbb{N},$$

mentre

$$B = \{x \in \mathbb{N} : 18 = 2\} = \varnothing.$$

Consideriamo ora l'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{N} : x + y < 7\}.$$

Notate qualcosa di strano? La proprietà $x+y < 7$ non è in una variabile ma in due! Dunque, se non si fissa prima y da qualche parte (e si dovrebbe dire in quale universo), non è affatto chiaro chi siano gli elementi di D. Ossia D non è un'insieme perché non sappiamo decidere i suoi elementi! Quindi la definizione di D così data è scorretta. Se invece dico, per ogni $y \in U = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 3\}$, consideriamo l'insieme

$$D_y = \{x \in \mathbb{N} : x + y < 7\} \tag{1.1}$$

sto definendo in modo corretto una famiglia di insiemi. Ad esempio, se $y = 3$ abbiamo $D_3 = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\} = \{1, 2, 3\}$ mentre se $y = 4$ ho $D_4 = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\} = \{1, 2\}$.

Chiudiamo questa sezione notando un fatto semplice ma importante. Per individuare entro l'universo U l'insieme di proprietà caratteristica $\mathcal{P}(x)$ dobbiamo essere in grado di capire se per un certo $u \in U$ l'affermazione $\mathcal{P}(u)$ è vera o falsa. A questo proposito può essere utile osservare che

$\mathcal{P}(x)$ è falsa se e solo se non $\mathcal{P}(x)$ è vera.

Ad esempio consideriamo in $U = \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(x) = x^2+3x-5 > 0$ e consideriamo la sua negazione, che è data da non $\mathcal{P}(x) = x^2 + 3x - 5 \leq 0$. Per $u = 1$ abbiamo $\mathcal{P}(1) = 1^2 + 3 - 5 > 0$ falsa e infatti non $\mathcal{P}(1) = 1^2 + 3 - 5 \leq 0$ risulta vera. Si tenga presente che la negazione del simbolo $>$ è $\leq$; di $=$ è $\neq$; di $\geq$ è $<$. Ad esempio la negazione di $\mathcal{P}(x) ='' x = 2x^3 - 3x + 1''$ è non $\mathcal{P}(x) ='' x \neq 2x^3 - 3x + 1''$.

1.1.5 Il paradosso di Russell

Vogliamo a questo punto considerare brevemente anche il problema dei cosiddetti paradossi, trattandone il principale, ossia il *Paradosso di Russell*[4]. Esistono molte versioni del cosiddetto *Paradosso di Russell*, più o meno colorite (vedi ad esempio il paradosso del barbiere). La formulazione più chiara è tuttavia quella che fa riferimento alla totalità degli insiemi che non appartengono a sé stessi. Partiamo osservando che vi sono sicuramente insiemi che tra i loro elementi hanno loro stessi. Ad esempio abbiamo che l'insieme di tutti i concetti astratti appartiene a sé stesso perché, a sua volta, è un concetto astratto. Ma vi sono anche insiemi (la maggioranza!) che non hanno fra i loro elementi loro stessi. Il curioso esempio citato da Russell, in proposito, è l'insieme di tutte le tazze da tè che non appartiene a se stesso non essendo una tazza da tè...

Definiamo ora

$$R = \{X : X \text{ è un insieme e } X \notin X\}.$$

La frase $X \notin X$ esprime, nella variabile X, una proprietà per l'universo U dato dalla totalità degli insiemi. Pertanto, il principio di comprensione, ci dice che R è un insieme. Ma allora dovremmo essere in grado, in particolare, di stabilire se R vi appartiene o no. Vediamo cosa succede. Se è vero $R \in R$ allora R deve soddisfare la proprietà caratteristica di R e quindi $R \notin R$. D'altra parte se è invece vero che $R \notin R$, allora R soddisfa la proprietà caratteristica di R e quindi vi appartiene cioè $R \in R$. Così, comunque stiano le cose, deduco una cosa e il suo contrario pervenendo ad una contraddizione. L' insanabilità del problema mi fa però riflettere meglio e tornare sui miei passi. C'è un punto sul quale siamo stati frettolosi... chi ci assicura che la totalità U degli insiemi sia un insieme? Non abbiamo nessun appiglio per affermare questo in realtà. La comunità matematica accetta dunque questa idea: l'elemento contraddittorio del paradosso di Russell è dovuto al fatto che *la totalità degli insiemi non è un insieme*[5]. Fortunatamente se consideriamo anziché la totalità degli insiemi solo gli insiemi che servono per l'analisi o per l'algebra lineare si vede che i paradossi non si creano. Su questi temi esiste una sconfinata letteratura. Per un primo approfondimento rimandiamo al breve saggio del Prof. C. Casolo, reso disponibile sulla pagina e-l del nostro corso. Estraiamo da tale saggio una versione più moderna del paradosso di Russell. Le pagine Internet accessibili in rete contengono diverse connessioni (links) ad altre pagine. Vi sono normalmente pagine che, per motivi pratici, contengono un link a se stesse (tipicamente le cosiddette home page), mentre altre, la maggioranza, non contengono un link a se stesse. Il numero totale di pagine (diciamo nel mondo, ma possiamo limitarci ad ambiti più ristretti, ad esempio alle pagine ospitate dai server del mio dipartimento) è comunque finito. Supponiamo che io chieda al mio responsabile informatico di allestire una pagina Internet che contenga un link a tutte e sole le pagine che non hanno link a se stesse ... Al meglio delle sue capacità, lo può fare?

In sostanza il paradosso di Russell dice questo: usate cautela, non tutto si può fare... Per affrontare tali questioni si è sviluppata ad inizio novecento la teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, un tentativo di rendere rigoroso quello che noi quì stiamo sviluppando in cosidetta forma naive (ingenua). Ai nostri scopi e anche nella stragrande maggioranza dei problemi matematici l'approccio ingenuo è più che sufficiente (fortunatamente!). Si tenga presente che la denominazione naive riguarda una teoria con una solida paternità matematica, in quanto fu formulata da George Cantor a fine ottocento.

[4]Bertrand Russell è stato uno dei più grandi logici e filosofi di inizio '900.

[5]Russell stesso conierà il termine classe per comprendere tali oggetti.

1.1.6 Equivalenza e implicazione logica

Dal punto di vista matematico, o se volete logico, due proprietà su un insieme universo U che definiscano lo stesso sottoinsieme sono completamente indistinguibili: per ogni sostituzione operata entro U esse sono o entrambe vere o entrambe false. Questo significa che esprimono lo stesso concetto e diciamo che sono proprietà *logicamente equivalenti.*

Siano $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ due proprietà su un universo U.

Definizione 12. *$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ si dicono logicamente equivalenti se gli insiemi*

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\}, \qquad \{x \in U : \mathcal{Q}(x)\}$$

da esse definiti sono uguali. In tal caso scriviamo $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$.

Ad esempio nell'universo U dei triangoli le due proprietà x è un triangolo equilatero e x è un triangolo equiangolo sono logicamente equivalenti. Nella vostra esperienza matematica avete incontrato molte volte delle proprietà logicamente equivalenti risolvendo le equazioni. Infatti *i passaggi che fate risolvendo una equazione, rappresentano sempre proprietà logicamente equivalenti* perchè ad ogni passo, se il vostro procedere è corretto, l'insieme delle soluzioni non cambia.

Esempio Nell'universo $\mathbb{R}$,

$$x^2 + 2 = 2\sqrt{2}x \iff x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$$

Infatti grazie al primo principio di equivalenza delle equazioni [6] che recita sommando o sottraendo espressioni uguali ai due membri di una equazione si ottiene una equazione equivalente alla data, ossia avente lo stesso insieme di soluzioni, abbiamo che

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 2\sqrt{2}x\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0\}.$$

E questa è l'esatta traduzione della nostra equivalenza logica.

Non crea nessun problema scrivere l'insieme sopra per elencazione. Infatti si tratta di un singoletto

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0\} = \{\sqrt{2}\}.$$

Esempio Non sono logicamente equivalenti su $\mathbb{Z}$ le proprietà seguenti: $x > 7$ e $x^2 > 49$. Perché?

Esplicitamente:
$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ significa che tutte le volte che, nell'universo U, $\mathcal{P}$ risulta vera, anche $\mathcal{Q}$ risulta vera e tutte le volte che $\mathcal{Q}$ risulta vera anche $\mathcal{P}$ risulta vera.

Definizione 13. *Diciamo che $\mathcal{P}$ implica logicamente $\mathcal{Q}$ (o che $\mathcal{Q}$ è conseguenza logica di $\mathcal{P}$) se*

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\} \subseteq \{x \in U : \mathcal{Q}(x)\}.$$

In tal caso scriviamo $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ e diremo anche che $\mathcal{P}$ è sufficiente per $\mathcal{Q}$ o che $\mathcal{Q}$ è necessaria per $\mathcal{P}$.

[6] Ovviamente il primo principio di equivalenza è un teorema dimostrato e che ben conoscete dalla scuola media superiore.

Esplicitamente: $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ **significa che tutte le sostituzioni in U che rendono vera $\mathcal{P}$ rendono vera anche $\mathcal{Q}$.**

Ad esempio abbiamo in $U = \mathbb{Z}$, che

$$x > 7 \Longrightarrow x^2 > 49.$$

Infatti tenuto conto del grafico della parabola $y = x^2$, è evidente come nel tratto corrispondente ad ascisse x maggiori di 7, il suo andamento sia crescente, ossia preveda che il valore ottenuto calcolando il quadrato di un numero maggiore di 7, sia maggiore del quadrato di 7.

Invece

$$x^2 > 49 \not\Longrightarrow x > 7.$$

Soffermiamoci un attimo sul controllo di questo secondo fatto: quello che esprime è che

$$\{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 49\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{Z} : x > 7\}$$

e questo risulta provato esibendo un elemento di $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 49\}$ che non appartenga a $\{x \in \mathbb{Z} : x > 7\}$. A tale scopo basta considerare -9: infatti i due fatti $-9 \in \mathbb{Z}$ e $(-9)^2 = 81 > 49$ ci dicono che $-9 \in \{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 49\}$ mentre $-9 < 7$ garantisce $-9 \notin \{x \in \mathbb{Z} : x > 7\}$.

L'osservazione sopra fatta non dovrebbe stupirvi dato che avrete sicuramente sentito dire che elevare al quadrato entrambi i membri di una equazione non porta, in generale, ad una equazione equivalente.

Notiamo che affermare che $\mathcal{Q}$ è *conseguenza logica* di $\mathcal{P}$ e contemporaneamente che $\mathcal{P}$ è *conseguenza logica* di $\mathcal{Q}$ è la stessa cosa che dire $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$. In tal caso diciamo anche che $\mathcal{P}$ è *condizione necessaria e sufficiente* per $\mathcal{Q}$.

Vediamo ora una interessante conseguenza della Proposizione 11.

Corollario 14. *Sia $\mathcal{P}$ una proprietà nell'universo U, che risulti falsa per ogni sostituzione della variabile. Se $\mathcal{Q}$ è una qualunque proprietà nell'universo U, allora vale sempre $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.*

Prima di dimostrare tale proposizione vediamola al lavoro su degli esempi, che ci stupiranno un po'. Valgono le seguenti implicazioni logiche:

$$x \neq x \Longrightarrow x^2 = x + 3$$

$$3 = 7 \Longrightarrow 10 = 45$$

$$\{1,2,3\} = \{1,2\} \Longrightarrow \{1,2,3\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3\} = \{1,2\} \Longrightarrow \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$$

Notate che abbiamo pensato $3 = 7, \{1,2,3\} = \{1,2\}$, etc. come proprietà in una variabile ma in cui la variabile non appare esplicitamente. E gli universi? Chi erano?

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi con proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ e con proprietà caratteristica $\mathcal{Q}$ e chiamiamoli , rispettivamente A e B. Abbiamo allora

$$A = \{x \in U : \mathcal{P}(x) \textit{ vera}\}$$

mentre

$$B = \{x \in U : \mathcal{Q}(x) \textit{ vera}\}.$$

Ora di B sappiamo ben poco, ma invece sappiamo chi è A. Infatti, per tutte le possibili sostituzioni, $\mathcal{P}(x)$ non risulta mai vera e quindi A non contiene elementi, ossia $A = \varnothing$. Ora la Proposizione 11 mi garantisce che $A = \varnothing \subseteq B$, ossia che $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

□

Notate: stiamo dicendo che da una premessa sempre falsa si può dedurre logicamente qualunque cosa...

1.1.7 Quantificatori

Nel linguaggio matematico si utilizzano molto frequentemente le parole "ogni" ed "esiste", dette *quantificatori.* Ad esse sono riservati due simboli il cui scopo è quello di rendere più sintetica e compatta la scrittura. Notate che abbiamo già incontrato i quantificatori in precedenza. Ora vogliamo introdurre i simboli standard per essi:

$$\forall \text{ per ogni}, \quad \exists \text{ esiste.}$$

Per trattare con questi due simboli occorre chiarire cosa significhi controllare la verità/ falsità di una affermazione del tipo $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ o del tipo $\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$, dove al solito U è un insieme universo e $\mathcal{P}$ una proprietà espressa, nella variabile x, su U.

Definizione 15. *Diciamo che "$\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$" è vera se*

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\} = U$$

e che "$\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$" è vera se

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\} \neq \varnothing.$$

Le stesse frasi saranno false quando non sono vere, ossia quando non accade quel che deve accadere. Precisamente

Conseguenza 16. *"$\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$" è falsa se*

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\} \neq U$$

e che "$\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$" è falsa se

$$\{x \in U : \mathcal{P}(x)\} = \varnothing.$$

Quindi *controllare la verità di "$\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$" o la falsità di "$\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$" esige una dimostrazione*; invece *controllare la falsità di "$\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$" o la verità di "$\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$" esige un esempio.*

Un $u_0 \in U$ che renda falsa la $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ si dice un *controesempio* per $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$.

Notate che $\exists x \in U$ tale che $\mathcal{P}(x)$ falsa, equivale alla verità della sua negazione ossia alla verità di $\forall x \in U, \text{non } \mathcal{P}(x)$. Analogamente $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ falsa equivale alla verità della sua negazione ossia alla verità di $\exists x \in U$ tale che non $\mathcal{P}(x)$.

Esempio

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0 \qquad \text{è vera.}$$

Dobbiamo provare che

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0\} = \mathbb{R}.$$

Che sia $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0\} \subseteq \mathbb{R}$ è ovvio. Il cuore della questione è provare che

$$\mathbb{R} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0\}. \tag{1.2}$$

Devo vedere che, sostituendo ad x un qualsiasi numero $u \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza $u^2+1>0$ è vera. Come lo controlliamo? Sostituiamo ogni possibile numero reale al posto di x e vediamo? E' chiaro che questo non è realizzabile essendo $\mathbb{R}$ infinito. E allora? Ci vuole una dimostrazione, un ragionamento generale che vada bene qualunque sostituzione io possa voler fare. In sostanza devo dimostrare la

Proposizione 17. *Sia x un numero reale. Allora $x^2+1>0$.*

Proviamo (1.2) in due modi diversi e ugualmente corretti. Questo fa capire come si possano dare più dimostrazioni di uno stesso fatto.

1) Prendiamo $x \in \mathbb{R}$. Se $x=0$ abbiamo che $0^2+1=1>0$ è vera; se invece $x \neq 0$ abbiamo che x ha un segno $+$ o $-$ e $x \cdot x$, essendo prodotto di due numeri con ugual segno, è comunque >0, a causa della regola dei segni. Quindi abbiamo che $x^2+1>0+1=1$ e pertanto, in particolare, $x^2+1>0$.

2) Noto che $\{x \in \mathbb{R} : x^2+1>0\}$ è l'insieme delle soluzioni di una facile disequazione di secondo grado. L'equazione associata è $x^2+1=0$ e ha il $\Delta<0$. Poiché il coefficiente di x^2 è positivo, se ne conclude che la disequazione è risolta per ogni $x \in \mathbb{R}$ ossia $\{x \in \mathbb{R} : x^2+1>0\} \supseteq \mathbb{R}$.

Esempio

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 \leq 0 \qquad \text{è vera}$$

perché trovo un numero reale che sostituito ad x la rende vera. Infatti prendendo $u_0=0$, abbiamo $0^2=0 \leq 0$. Notate che è indispensabile esibire concretamente un u_0.

Esempio Controllare la falsità di

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2-1>0$$

. Basta notare che prendendo $u_0=0$ abbiamo $0^2-1=-1 \not> 0$.

Esempio Controllare la falsità di

$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ tale che } 3x-2=0.$$

Dobbiamo dimostrare che $\{x \in \mathbb{N} : 3x-2=0\}=\varnothing$. Per assurdo sia $\{x \in \mathbb{N} : 3x-2=0\} \neq \varnothing$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $3n-2=0$. Ma l' equazione $3x-2=0$ ha come unica soluzione $2/3$, quindi $n=2/3 \notin \mathbb{N}$ e questo contraddice $n \in \mathbb{N}$.

L'universo in cui si lavora è importantissimo nel tipo di affermazioni che stiamo valutando. Ad esempio,

$$\exists x \in \mathbb{Q} \text{ tale che } 3x-2=0$$

risulta vera, perchè $2/3 \in \mathbb{Q}$.

Le cose si fanno più insidiose se di fronte ad una affermazione del tipo $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ io sono chiamato a decidere della sua verità/falsità senza essere indirizzato, a priori, verso l'una o l'altra. Un modo per orientarsi può essere il seguente. Mettersi davanti a $\forall x \in U, \mathcal{P}(x)$ e alla sua negazione $\exists x \in U$ tale che non $\mathcal{P}(x)$. Fatto ciò sappiamo che una di esse e una sola è vera e, di solito, vedere le cose così migliora la nostra intuizione su come stiano davvero le cose.

Esempio Dire se è vera o falsa la seguente affermazione

$$\forall x \in \mathbb{N}, \; x^2+x \text{ è pari.} \tag{1.3}$$

Scriviamo, per orientarsi, anche la sua negazione

$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ tale che } x^2 + x \text{ è dispari} \tag{1.4}$$

e cerchiamo di capire quale fra le due sia vera. Sappiamo che una ed una sola di esse lo è. Ma decidere quale non è banale! Posso provare a sostituire qualcosa al posto di x per orientarmi. $x = 1$ porta a $1^2 + 1 = 2$ pari, $x = 2$ porta a $2^2 + 2 = 6$ pari, $x = 3$ porta a $3^2 + 3 = 12$ pari. Siamo dunque propensi a scommettere sulla verità di (1.3) e, conseguentemente, sulla falsità di (1.4). Attenzione però! Al momento la verità di (1.3) ha un'alta probabilità ma non è certa. Solo se riusciremo a fare la dimostrazione avremo la certezza. Se non ci riusciamo, con un pizzico di fortuna il lavoro fatto ci indicherà il controesempio. In ogni caso dovremo sempre essere pronti a tornare sui nostri passi e correggere la nostra intuizione.

Dimostro che essa è vera: scompongo in fattori il polinomio $x^2 + x = x(x + 1)$ e vedo che è il prodotto di due numeri consecutivi, pertanto o x è pari o $x + 1$ è pari. Dunque il loro prodotto $x^2 + x$ è pari.

Adesso possiamo davvero affermare con certezza che (1.3) è vera!

Esercizio (Scherzo) Sia $U = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 4, x \text{ pari}\}$. Dire se è vera o falsa la seguente affermazione

$$''\forall x \in U, \exists\, p_1,\ p_2 \text{ primi tali che } x = p_1 + p_2''.$$

Per capire la portata dell'esercizio sopra cercate in rete Congettura di Goldbach.

1.1.8 Quantificatori e variabili saturate

Consideriamo ora anche proprietà $\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n)$ in cui appaiono più variabili. Se vi sono dei quantificatori, le corrispondenti variabili vengono *saturate*, ossia perdono il ruolo di variabili mentre le altre restano *libere*, ossia sono le variabili effettivamente presenti e possono assumere un qualunque valore nell'universo U. A tutti gli effetti il predicato si comporta come se fosse scritto solamente rispetto alle variabili libere.

Vediamo degli esempi. In "$\forall x, \forall y \in \mathbb{Z}, xy = yx$", tutte le due variabili x e y sono saturate. Siamo di fronte quindi ad una affermazione che è priva di variabili. Essa sarà o vera o falsa. Com'è? Riconosciamo facilmente che è vera. Essa esprime infatti la ben nota proprieà commutativa del prodotto fra interi. Consideriamo ora nell'universo $\mathbb{Z}$, la seguente frase $\forall x \in \mathbb{Z}, xy = yx$: può sembrare identica alla precedente ma non lo è affatto. La differenza sta nel fatto che ora y è libera e siamo effettivamente di fronte ad una proprietà dipendente da una variabile. Il suo essere vera o falsa può essere stabilito solo dopo la sostituzione di un intero al posto di y. Per capire cosa accade con le varie sostituzioni usiamola come proprietà caratteristica per costruire un insieme. Chiediamoci chi sia

$$A = \{y \in \mathbb{Z} \;:\; \forall x \in \mathbb{Z}, xy = yx\}.$$

Dobbiamo pensare $x \in \mathbb{Z}$ come un nostro parametro di lavoro e risolvere in y l'equazione $xy = yx$. Se $x = 0$ tale affermazione dice $0 = 0$ vera per ogni $y \in \mathbb{Z}$; se $x \neq 0$ la semplifico in $y = y$ anch'essa vera per ogni $y \in \mathbb{Z}$. Quindi, qualunque sia $x \in \mathbb{Z}$, abbiamo che $xy = yx$ vale per tutte le $y \in \mathbb{Z}$. Questo dice che $A = \mathbb{Z}$.[7] Fatto questo sforzo possiamo commentare così la situazione: la frase $\forall x \in \mathbb{Z}, xy = yx$ risulta vera per ogni $y \in \mathbb{Z}$.

[7] Presentiamo un interessante ragionamento più semplice per ottenere la stessa conclusione. Poiché $xy = yx$ vale comunque scelga x e y (lo abbiamo notato prima), se fisso y come voglio ho che $xy = yx$ vale certamente per ogni x. Pertanto ogni possibile $y \in \mathbb{Z}$ è dentro A e dunque $A = \mathbb{Z}$.

Vediamo un terzo esempio. Consideriamo

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } xy = 4.$$

E' saturata e quindi è una affermazione che non presenta variabili. Cerchiamo di capire se è vera o falsa. La sua negazione è

$$\exists x \text{ t.c. } \forall y, xy \neq 4.$$

Per decidere quale, fra queste due affermazioni, sia quella vera cerchiamo di capire cosa esprimono. La prima dice che l'equazione $xy = 4$ è sempre risolvibile in $y \in \mathbb{Z}$ a prescindere da chi sia il parametro $x \in \mathbb{Z}$. Ora pero' se noi proviamo a risolvere questa equazione, vediamo che, se $x = 0$, non ce la facciamo a ricavare y. Infatti essa diventa $0y = 4$, che è una frase falsa qualunque y si sostituisca perché equivale a $0 = 4$ falsa. Il ragionamento fatto ci ha mostrato, tra le righe, come fare per dire che è la $\exists x$ t.c. $\forall y, xy \neq 4$ ad essere vera! Infatti esibisco $x = 0$ come caso per il quale, per ogni $y \in \mathbb{Z}$, vale $0y \neq 4$.

Esercizio Considerate i due insiemi

$$A := \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y\}, \quad B := \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} \,\text{tale che}\, x + y \leq 10\}.$$

Controllate che valgono le uguaglianze

$$A = \{1\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Suggerimento Dovete fare due passi: 1) partire da un elemento generico a di A e mostrare che necessariamente $a = 1$; 2) prendere l'unico elemento 1 del singoletto $\{1\}$ e mostrare che esso appartiene ad A, ossia che rende vera la proprietà caratteristica che definisce A. Analogamente per B.

Esercizio Si determini l'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}, 3ax - 3a - 2x + 2 = 0\}$$

e lo si confronti con l'insieme

$$B := \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 3ax - 3a - 2x + 2 = 0\}.$$

Soluzione: si ha $A = \{1\}$ e $B = \mathbb{R}$.

Esercizio Si determini l'insieme

$$C := \{x \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{Z}, 3ax - 3a - 2x + 2 = 0\}$$

e lo si confronti con l'insieme

$$D := \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 3ax - 3a - 2x + 2 = 0\}.$$

Soluzione: ?

Esercizio Si determini l'insieme

$$C := \{x \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z}, 3ax - 3a - 2x + 2 = 0\}$$

e lo si confronti con l'insieme

$$D := \{x \in \mathbb{Z} : \exists a \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 3ax - 3a - 2x + 2 = 0\}.$$

Soluzione: ?

1.2 Operazioni fra insiemi

Introduciamo in questa sezione le fondamentali operazioni fra insiemi.

Definizione 18. *Siano A e B insiemi contenuti in un universo U.*

- *Si chiama unione di A e B (in simboli $A \cup B$) il sottoinsieme di U i cui elementi sono tutti e soli gli elementi che appartengono ad A* **o** *a B.*
- *Si chiama intersezione di A e B (in simboli $A \cap B$) il sottoinsieme di U i cui elementi sono tutti e soli gli elementi che appartengono ad A* **e** *a B.*
- *Si chiama differenza di A e B (in simboli $A \setminus B$) il sottoinsieme di U i cui elementi sono tutti e soli gli elementi che appartengono ad A e non appartengono a B.*
- *Si chiama complementare di A in U l'insieme $U \setminus A$. Se non c'è ambiguità su chi sia l'universo considerato, si scrive semplicemente A' o A^c al posto di $U \setminus A$.*

Come già detto la particella "o" in matematica è sempre considerata, salvo specifica indicazione, in senso inclusivo. Il simbolo internazionale per o è $\vee$. In particolare nell'unione dovranno essere messi anche tutti gli elementi dell'intersezione.

Alcuni esempi per spiegare il significato delle operazioni sono certamente utili. Siano $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{3,4,5,6\}$ nell'universo $U = \mathbb{N}$.

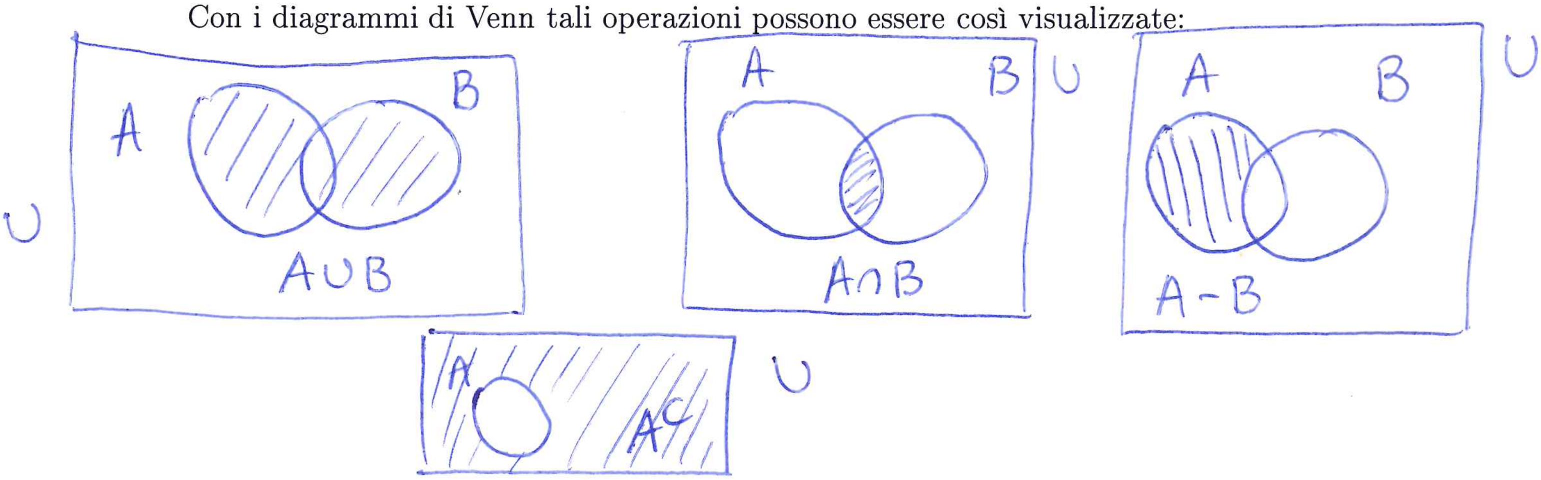
allora

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A \cap B = \{3,4\}, \quad A \setminus B = \{1,2\}, \quad B \setminus A = \{5,6\},$$

Siano $A = \{0,1,2\}$ e $B = \{1,2\}$ allora

$$A \cup B = \{0,1,2\} = A, \quad A \cap B = \{1,2\} = B, \quad A \setminus B = \{0\}, \quad B \setminus A = \varnothing, \quad A' = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 5\}.$$

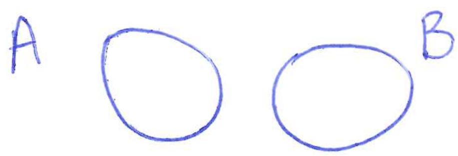
Con i diagrammi di Venn tali operazioni possono essere così visualizzate:



Notate che se A ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ e B ha proprietà caratteristica $\mathcal{Q}$, allora $A \cup B$ ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ mentre $A \cap B$ ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Il simbolo internazionale per e è $\wedge$.

Definizione 19. *Siano A e B insiemi. Se $A \cap B = \varnothing$ gli insiemi A e B sono detti disgiunti.*

Con i diagrammi di Venn tale concetto può essere così visualizzato:



Vi sono alcune proprietà molto importanti delle operazioni fra insiemi. La loro dimostrazione segue immediatamente dalle definizioni, nel senso che gli unici strumenti da utilizzare per ottenerle sono dati dal significato che abbiamo attribuito a tali operazioni.

Proposizione 20. *Sia A un insieme. Allora*

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A, \quad A \setminus A = \varnothing, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \setminus \varnothing = A, \quad \varnothing \setminus A = \varnothing.$$

Siano A e B insiemi. Allora

- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
- $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$, $A \setminus B \subseteq A$,
- *se* $A \subseteq B$, *allora* $A \setminus B = \varnothing$,
- *se* $A \cap B = \varnothing$, *allora* $A \setminus B = A$ *e* $B \setminus A = B$.

Dimostrazione. Dimostriamo soltanto che se $A \cap B = \varnothing$, allora $A \setminus B = A$. Supponiamo dunque che $A \cap B = \varnothing$ e deduciamo che $A \setminus B = A$. Dobbiamo quindi dimostrare che $A \setminus B \subseteq A$ e $A \subseteq A \setminus B$. La prima delle due inclusioni è ovvia poiché se $x \in A \setminus B$ allora $x \in A$ e $x \notin B$ e dunque in particolare $x \in A$. Per mostrare il viceversa considero $x \in A$. Poiché $A \cap B = \varnothing$ si ha che sicuramente $x \notin B$ e dunque $x \in A \setminus B$. □

Le operazioni fra gli insiemi possono essere fra loro combinate come nelle espressioni aritmetiche. In questo caso entrano in gioco le parentesi che chiariscono l'ordine di esecuzione delle operazioni. La regola fondamentale che governa l'uso delle parentesi è che hanno la precedenza le operazioni i cui argomenti non sono espressioni contenenti a loro volta parentesi.

Ad esempio, se

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3, x \leq 12\}, \quad C = \{4, 8, 12\}.$$

si ha che

$$(A \setminus B) \cap C = \varnothing, \quad (A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}.$$

Proposizione 21. *Siano A, B e C insiemi. Allora*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

La precedente proposizione è utile perchè mostra che le scritture

$$A \cup B \cup C, \quad A \cap B \cap C,$$

non sono ambigue. Infatti qualunque sia l'ordine scelto per applicare le operazioni otteniamo lo stesso insieme.

Proposizione 22. *Siano A, B e C insiemi. Allora*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

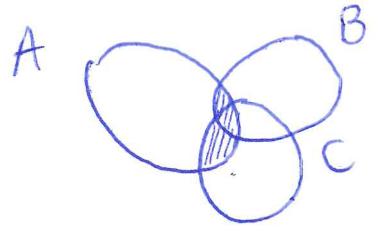
Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione è educativa poiché non è completamente banale. Dimostriamo soltanto la prima uguaglianza, la seconda è lasciata per esercizio. Anche per essa è di aiuto la rappresentazione con i diagrammi di Venn.

Sia $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Allora $x \in (A \cap B)$ o $x \in (A \cap C)$. Nel primo caso $x \in A$ e $x \in B \cup C$ e dunque $x \in A \cap (B \cup C)$. Nel secondo caso $x \in A$ e $x \in B \cup C$ e dunque $x \in A \cap (B \cup C)$. Dunque $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

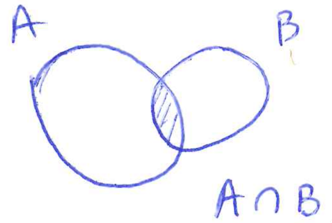
Sia adesso $x \in A \cap (B \cup C)$. Allora $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Pertanto abbiamo due casi: se $x \in B$ allora $x \in A \cap B$ e dunque $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$; se $x \in C$ allora $x \in A \cap C$ e dunque $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. In definitiva $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Questo completa la dimostrazione. □

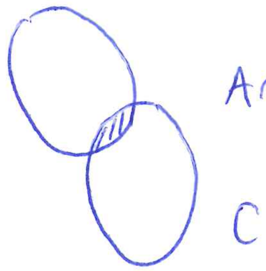
Vediamone una conferma utilizzando i diagrammi di Venn. L'idea è rappresentare prima l'insieme a sinistra dell'uguaglianza in esame e poi quello a destra per convincersi, sul piano intuitivo, della loro uguaglianza. Per fare ciò conviene procedere per passi eseguendo le operazioni nell'ordine imposto dalle parentesi:



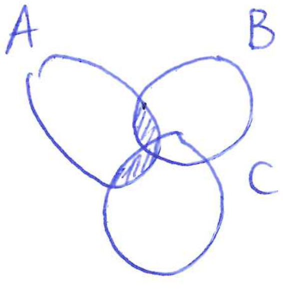
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$,



$A \cap C$ →



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

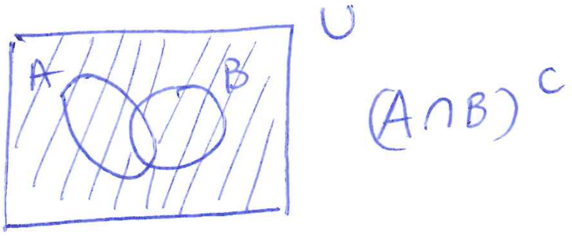
Notiamo che se A ha proprietà caratteristica $\mathcal{P}$, allora A' ha proprietà caratteristica "non $\mathcal{P}$".

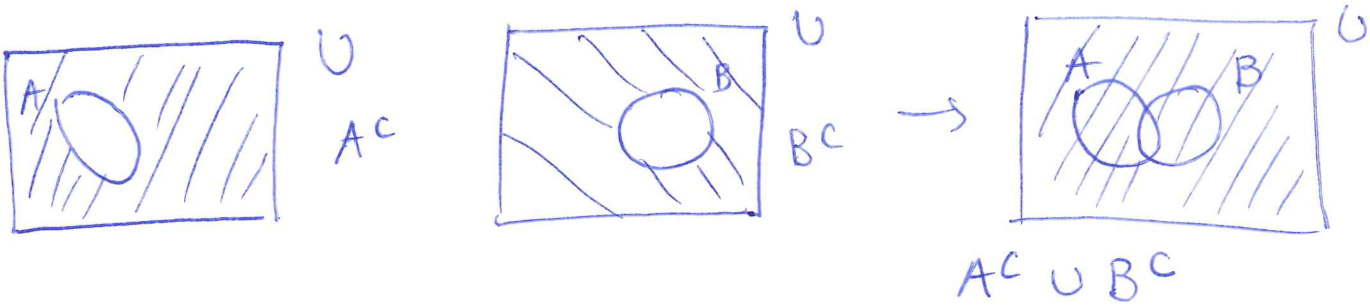
Teorema 23 (Leggi di De Morgan). *Sia U insieme e siano $A, B \subseteq U$. Allora*

$$(A')' = A, \qquad [A \cap B]' = A' \cup B', \qquad [A \cup B]' = A' \cap B'$$

Notate che la $(A')' = A$ esprime il fatto che negare due volte una frase la lascia com'è; $[A \cap B]' = A' \cup B'$ esprime il fatto che e si neghi con o; $[A \cup B]' = A' \cap B'$ esprime il fatto che o si neghi con e.

Vediamo come si possa intuire la verità dell'enunciato precedente utilizzando i diagrammi di Venn.

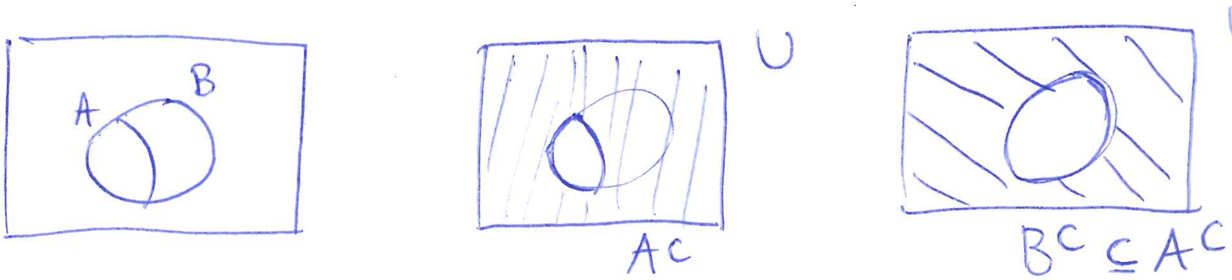




Siete in grado ora di scrivere anche una dimostrazione?
Un altro interessante risultato è il seguente.

Teorema 24. *Sia U insieme e siano $A, B \subseteq U$ tali che $A \subseteq B$. Allora $B' \subseteq A'$.*

Anche questo risultato si visualizza bene con i diagrammi di Venn.



La sua dimostrazione è facile e lasciata per esercizio.
Vediamo una interessante conseguenza del Teorema 24.

Teorema 25. *Siano $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ proprietà su U. L'affermazione $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ è equivalente all'affermazione $\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \neg\mathcal{P}$ (detta la sua contronominale).*

Dimostrazione. Se vale $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ significa che l'insieme $A = \{x \in U : \mathcal{P}(x)\}$ è incluso in $B = \{x \in U : \mathcal{Q}(x)\}$. Ma applicando il Teorema 24 si ha allora $B' \subseteq A'$. D'altra parte $B' = \{x \in U : \neg\mathcal{Q}(x)\}$ e $A = \{x \in U : \neg\,\mathcal{P}(x)\}$ per cui abbiamo $\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \neg\mathcal{P}$. Viceversa se vale $\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \neg\mathcal{P}$ il ragionamento appena fatto ci dice che vale $\neg\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \neg\neg\mathcal{Q}$ che è come dire $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$. □

Useremo a volte il teorema appena visto nel fare le dimostrazioni.

Capitolo 2

Prodotto cartesiano

Definizione 26. *Si considerino due insiemi A e B. Dati $a \in A$ e $b \in B$ chiamiamo coppia ordinata avente come prima componente a e come seconda componente b, la scrittura (a, b).*

Un modo piú rigoroso, ma meno maneggevole, è quello di definire $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Infatti cosí facendo l'oggetto (a, b) è semplicemente un insieme. Notate che la prima componente è allora l' elemento dell'unico singoletto $\{a\}$ nell'insieme (a, b), mentre la seconda componente è l'unico elemento in $\{a, b\} \setminus \{a\}$. Ovviamente questo funziona ponendosi prima nell'universo U dei sottoinsiemi di A e B.

Osservazione 27. La nozione di coppia ordinata è tale da considerare distinti gli oggetti (a, b) e (b, a) a meno che $a = b$. Si ricordi che questa caratteristica non è condivisa dagli insiemi per i quali le scritture $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ indicano lo stesso oggetto.

Definizione 28. *Si considerino due insiemi A e B. Chiamiamo prodotto cartesiano dei due insiemi, indicato con $A \times B$, l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. In altre parole*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Notiamo che l'uguaglianza $A \times B = B \times A$ non è vera per tutte le scelte degli insiemi A e B. In altre parole si possono dare esempi di insiemi A e B per cui $A \times B \neq B \times A$.

Si consideri ad esempio $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ allora

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

mentre

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Si noti che $(3, 1) \in A \times B$ e $(3, 1) \notin B \times A$. Pertanto, $A \times B \neq B \times A$.

Esercizio 29. *Dire se vale la seguente affermazione: $A \times B = B \times A$ se e solo se $A = B$.*

Supponiamo ora di avere tre insiemi A, B, C. Si definisce $A \times B \times C$ come l'insieme delle terne ordinate (a, b, c) con $a \in A, b \in B, c \in C$. Si noti che $(A \times B) \times C$ è diverso da $A \times (B \times C)$, in quanto mentre gli elementi del primo sono del tipo $((a, b), c)$, quelli del secondo sono del tipo $(a, (b, c))$. Inoltre, per analoghi motivi, entrambi gli insiemi $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ sono diversi da $A \times B \times C$. Capiterà spesso di identificare questi tre insiemi, ma in certi casi sarà invece opportuno ricordare che sono diversi.

Tale definizione si generalizza in modo ovvio a una lista finita di insiemi. In particolare avremo, per A insieme e $n \in \mathbb{N}$, che A^n è l'insieme delle n-uple ordinate $a = (a_1, \ldots, a_n)$ di elementi $a_i \in A$. a_i è detta li-ma componente di a. Si noti che $(A \times B) \times C$ è diverso da $A \times (B \times C)$, in quanto mentre gli elementi del primo sono del tipo $((a, b), c)$, quelli del secondo sono del tipo $(a, (b, c))$.

Osservazione 30. Un insieme molto importante ai nostri scopi è

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Osserviamo che $(\sqrt{3}, \pi) \in \mathbb{R}^2$, $5 \notin \mathbb{R}^2$, $(1, 2, 3) \notin \mathbb{R}^2$. Più in generale ci interesseremo a $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Gli oggetti in tale insieme sono liste ordinate di n numeri reali. Così $(1, -2/7, 0, 8) \in \mathbb{R}^4$, $(0, 4/9, -3/5) \in \mathbb{R}^3$, mentre $(1, -2/7, 0, 8, 9, 6) \notin \mathbb{R}^4$, $(0, 4/9, -3/5, 0) \notin \mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^2$ rappresenta il ben noto piano cartesiano. In esso, possiamo introdurre molti interessanti insiemi, spesso dotati di una interpretazione geometrica. Ad esempio

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$$

è il semipiano superiore delimitato dalla retta $y = x$.

Sapete visualizzare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dato da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?