Homework 1 - Algebra Lineare e geometria analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)
assegnato 2 Ottobre 2018 - consegna martedì 9 Ottobre 2018.

1. Individuare gli insiemi seguenti

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R},\ ax - 2a - 5x + 10 = 0\},$$

$$B := \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R} \ \text{ t.c. } ax - 2a - 5x + 10 = 0\}.$$

Dire se $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Svolgimento Scomponiamo in fattori il polinomio $ax - 2a - 5x + 10 = a(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(a - 5)$. Ne segue che

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R},\ (x - 2)(a - 5) = 0\}.$$

Dimostriamo che $\mathbf{A} = \{\mathbf{2}\}$ con la doppia inclusione. $\{2\} \subseteq A$ perché qualunque sia a abbiamo $(2 - 2)(a - 5) = 0(a - 5) = 0$. Vediamo ora $A \subseteq \{2\}$. Sia $x \in A$. Allora, poiché $(x - 2)(a - 5) = 0$ vale comunque consideri a, varrà pure per $a = 6$ e quindi $(x - 2)(6 - 5) = 0$, ossia $x - 2 = 0$, cioè $x = 2$.

Abbiamo poi

$$B := \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R} \ \text{ t.c. } (x - 2)(a - 5) = 0\}.$$

Questa volta proviamo che $\mathbf{B} = \mathbb{R}$. Che valga $B \subseteq \mathbb{R}$ è ovvio, per definizione. Proviamo $\mathbb{R} \subseteq B$. Sia $x \in \mathbb{R}$. Dobbiamo esibire un certo $a \in \mathbb{R}$ che dia $(x-2)(a-5) = 0$. Prendiamo $a = 5$ ottenendo infatti $(x-2)(5-5) = (x-2)\cdot 0 = 0$.

Si ha $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ vera perchè $2 \in \mathbb{R}$, mentre $\mathbf{B} \not\subseteq \mathbf{A}$ perché, ad esempio, $3 \in B$ ma $3 \notin A$.

2. Aiutandosi con i diagrammi di Venn, costruire (se possibile) un esempio di tre insiemi finiti A, B, C tali che

$$(A \cap B) \cup (A \setminus C) = A.$$

Svolgimento Prendi tre insiemi disgiunti, ad esempio $A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{3\}$ e hai $A \cap B = \varnothing, A \setminus C = \{1\} = A$ per cui $(A \cap B) \cup (A \setminus C) = \varnothing \cup A = A$.

3. Dire se sono corrette le seguenti uguaglianze fra insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \ : x^2 - 2x + 1 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \ : 5x + 12 > 0\} = \{-1\}.$$

$$\{x \in \mathbb{N} \ : 51 \text{ divide } x\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : 3 \text{ divide } x\} = \varnothing.$$

Svolgimento Si ha

$$\{x \in \mathbb{R} \ : x^2 - 2x + 1 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : (x - 1)^2 \leq 0\} = \{1\} \neq \{-1\}$$

per cui **la prima uguaglianza è falsa**.

Inoltre
$$\{x \in \mathbb{N}\ : 51 \text{ divide } x\} \subseteq \{x \in \mathbb{N}\ : 3 \text{ divide } x\}$$
per cui
$$\{x \in \mathbb{N}\ : 51 \text{ divide } x\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : 3 \text{ divide } x\} = \varnothing$$
e **la seconda uguaglianza risulta vera**.

4. Dire se nell' universo $\mathbb{Z}$ valgono le seguenti implicazioni logiche rispetto alla variabile x, motivando la risposta

1) $x \neq 5 \Longrightarrow x^2 \neq 25;$

2) $x > 3 \Longrightarrow x^3 \neq 8;$

3) $x \leq 6 \Longrightarrow x^2 \leq 36.$

Svolgimento **La 1) è falsa** perché $x = -5$ è tale che $-5 \neq 5$ e $(-5)^2 = 25$.

La 2) è vera perché essendo la funzione elevamento al cubo crescente, $x > 3$ implica $x^3 > 27$ e, in particolare, $x^3 \neq 8$.

La 3) è falsa perché
$$\{x \in \mathbb{Z} : x \leq 6\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 36\} = \{x \in \mathbb{Z} : -6 \leq x \leq 6\}.$$

Infatti preso -12 abbiamo che $-12 \in \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 6\}$ ma $-12 \notin \{x \in \mathbb{Z} : -6 \leq x \leq 6\}$.

5. Calcola il complementare di
$$F := \{x \in \mathbb{N} : x \geq 7, x \neq 10\}$$
rispetto all'universo $\mathbb{N}$, esprimendolo, se possibile, per elencazione.

Svolgimento Abbiamo
$$F^c = \{x \in \mathbb{N} : x < 7 \text{ oppure } x = 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}.$$

6. Considera $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 1, 3\}$. Dire quanti elementi contiene $A \times B$ e quali delle seguenti affermazioni è vera:

1) $(1, 1) \in A \times B$;

2) $(1, 1) \in B \times A$;

3) $(4, 2) \in A \times B$;

4) $(3, 3) \in A^2$;

5) $(A \times B) \cap (B \times A)$ è un singoletto.

Determina esprimendolo, se possibile, per elencazione

$$\{(x, y) \in A \times B : x \neq y\}.$$

Svolgimento $A \times B$ contiene $3 \cdot 3 = 9$ elementi. $(1, 1) \in A \times B$ è vera, $(1, 1) \in B \times A$ è vera, $(4, 2) \in A \times B$ è falsa, $(3, 3) \in A^2$ è vera. $(A \times B) \cap (B \times A)$ è falsa perché $(A \times B) \cap (B \times A)$ contiene almeno i due elementi $(1, 1)$ e $(3, 3)$.

Poniamo

$$U := \{(x, y) \in A \times B : x \neq y\}.$$

Si calcola facilmente, l'elenco degli elementi in U.

$$U = \{(1, 4),\ (1, 3),\ (2, 4),\ (2, 1),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (3, 1)\}.$$