Esercitazione per I intermedia di Algebra Lineare

(Dott.ssa D. Bubboloni) 2 Novembre 2016

1. Scrivere come un opportuno *Span* l'insieme S delle soluzioni del seguente sistema.

$$\begin{cases} x - y &= 3z + 2t \\ x - z &= 4y - t \end{cases}$$

Utilizzare il risultato ottenuto per dire se S è uno spazio vettoriale. In caso affermativo calcolarne la dimensione.

2. Si dice rango di una matrice il numero di pivot di una sua ridotta a scala. Trovare il rango della matrice al variare di $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} b & -1 & 4 \\ -2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

Dedurre per quale valore di b i vettori colonna della matrice sono linearmente indipendenti.

3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i sottoinsiemi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad xy = z^2 \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad y = x^2, z = 0 \right\}$$

e

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad z = 0 \right\}.$$

Si provi che, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite in $\mathbb{R}^3$, gli insiemi W, T non sono spazi vettoriali, mentre U lo è.

4. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x - y - az = a - 2 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Successivamente dire se:

- esistono valori di a per cui il sistema è omogeneo e in tal caso esplicitarne le soluzioni;
- è vera la proposizione: $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c. le soluzioni sono ∞^2.

5. Dire se sono linearmente dipendenti i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e in caso affermativo esprimerne uno come combinazione lineare dei restanti.

6. Dati i vettori di $\mathbb{Q}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dire se costituiscono:

a) una base

b) un sistema di generatori

per $\mathbb{Q}^4$.

7. Risolvere il sistema a coefficienti nel campo $F_2 = \{0, 1\}$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Si ricordi che in tale campo $1 + 1 = 0$ e dunque $-1 = 1$.

8. Risolvere il sistema a coefficienti nel campo $\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} ix + y - iz = 1 \\ x - (i+1)y - z = 0 \\ -ix - y + z = i - 2 \end{cases}$$

Si ricordi che in $\mathbb{C}$ si ha $i^2 = 1$ e che $(a + ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

9. Provare che i vettori seguenti costituiscono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$ ed estrarne una base.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Determinare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ seguente

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

11. Provare che il seguente sistema a coefficienti reali nelle variabili reali x, y, z risulta impossibile:

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \\ 7x - y + z = 1 \\ 6x - y + 4z = -1 \end{cases}$$

12. Provare che il seguente sistema a coefficienti reali nelle variabili reali x, y, z ammette infinite soluzioni. Trovare tali soluzioni chiarendo chi sia l'insieme S delle soluzioni.

$$\begin{cases} x - y - z + t = 5 \\ 2x + 3y - z - t = 1 \end{cases}$$

13. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema dopo averlo portato in forma normale.

$$\begin{cases} x + ay - z = -y \\ 2x - y - az = z + a - 1 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui l'insieme delle soluzioni é infinito e determinarle.

14. Discutere al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema nelle variabili reali x, y, z, t dopo averlo portato in forma normale.

$$\begin{cases} (b-1)x + y - z + t = -y + b \\ 2x - y - bz = z - 1 - t \\ 3y + z = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONI

1.

Il sistema in forma normale è

$$\begin{cases} x - y - 3z - 2t = 0 \\ x - 4y - z + t = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema omogeneo di matrice completa

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Utilizziamo il passo base dell'algoritmo di Gauss (EG) su B con moltiplicatore -1 ottenendo

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

B è a scala e quindi possiamo procedere alla descrizione delle sue soluzioni. Ci sono due variabili libere: z e t. Quindi il sistema ha ∞^2 soluzioni. Dall'ultima equazione si ricava $y = \frac{2}{3}z + t$ che sostituita nella prima fornisce $x - \frac{2}{3}z - t - 3z - 2t = 0$ e quindi $x = \frac{11}{3}z + 3t$.

Le soluzioni sono quindi date da

$$x = \frac{11}{3}z + 3t$$

$$y = \frac{2}{3}z + t$$

$$z, t \in \mathbb{R}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{[\frac{11}{3}z + 3t, \frac{2}{3}z + t, z, t]^T \in \mathbb{R}^4 : z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Mettendo in evidenza i parametri y e z nella scrittura sopra possiamo evidenziare la natura di *Span* per S. Infatti

$$S = \{z[\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0]^T + t[3, 1, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^4 : z, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$Span\{[\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0]^T,\ [3, 1, 0, 1]^T\}.$$

Sappiamo che uno *Span* è sempre uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni dello spazio vettoriale ambiente. Quindi S è uno spazio vettoriale (è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$). S è generato da i due vettori $[\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0]^T$, $[3, 1, 0, 1]^T$ che sono chiaramente indipendenti perché non proporzionali. Pertanto $dimS = 2$.

2.

Utilizziamo l'algoritmo di Gauss in modo intelligente sulla matrice proposta, ossia cerchiamo di evitare il parametro b che ci costringe a biforcare il nostro ragionamento. Partiamo quindi dalla matrice ottenuta scambiando alcune righe della originaria, ossia da

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \\ b & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e usiamo EG con moltiplicatori: 0 e $b/2$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \\ 0 & -1 + \frac{b}{2} & 4 + \frac{b^2}{2} \end{pmatrix}$$

Facciamo uno scambio colonna per rinviare il problema della presenza del parametro in posizione cruciale. E moltiplichiamo per 2 la terza riga.

$$\begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 0 & 3 & b \\ 0 & 8 + b^2 & -2 + b \end{pmatrix}$$

Facciamo passo base con moltiplicatore $-\frac{8+b^2}{3}$ ottenendo la forma a scala

$$\begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & \frac{-b^3-5b-6}{3} \end{pmatrix}$$

Semplificando si passa a

$$\begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & -b^3 - 5b - 6 \end{pmatrix}$$

Ci sono due pivot certi:-2 e 3. Inoltre $-b^3 - 5b - 6$ è pivot per tutti i $b \in \mathbb{R}$ tali che $b^3 + 5b + 6 \neq 0$. Ora una soluzione dell'equazione $b^3 + 5b + 6 = 0$ è data da $b = -1$ ed effettuando la divisione fra polinomi si ha che $b^3 + 5b + 6 = (b+1)(b^2 - b + 6)$. Ma $b^2 - b + 6$ non ha radici reali perché il suo discriminante è negativo. Pertanto abbiamo 3 pivot per $b \neq -1$ e due pivot per $b = -1$. Così il rango di A è 3 per $b \neq -1$ ed è 2 per $b = -1$.