

## Prova intermedia I - Algebra Lineare e geometria analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)

17 Novembre 2017.

Avete due ore e un quarto a disposizione. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Sia

$$S := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Giustificare il fatto che  $S$  sia un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  e trovare una base e la dimensione. Determinare l'equazione cartesiana di  $S$ . In base a quanto ottenuto

si può concludere che  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S$  e che  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S$ ?

2. Discutere al variare di  $a \in \mathbb{R}$  il seguente sistema

$$\begin{cases} (a+1)x + y - z = a \\ x + y - az = -2 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di  $a$  per cui il sistema ha infinite soluzioni e in tal caso esplicitare le soluzioni. Esistono valori di  $a$  per i quali il sistema risulti omogeneo?

3. Calcola la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Controlla il risultato ottenuto verificando che, effettivamente,  $AA^{-1} = I$ .

Dimostra, possibilmente senza fare calcoli, che non esiste la matrice inversa di

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 16 \\ 1 & -1 & 100 \end{pmatrix}.$$

Calcola  $\text{rank}(A)$  e  $\text{rank}(B)$  sfruttando le informazioni già ottenute.

4. Dire se i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$ ,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base di  $\mathbb{R}^4$ . Formano anche un sistema di generatori?

Dire se è possibile esprimere il vettore  $v_4$  come combinazione lineare dei vettori  $v_1, v_2, v_3$  e, in caso affermativo, esplicitare tale combinazione lineare.

5. Provare, senza fare calcoli, che l'insieme  $S$  delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 34y - z - t = 170 \\ 78x + y + z + 34t = -23 \\ x + 2y - 3z - 28t = 56 \end{cases}$$

non è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ , mentre lo è

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^4 \mid x + z = 0, y + t = 0 \right\}.$$

dove  $F_2$  è il campo costituito dai soli due elementi 0 e 1. Provare che  $Z$  è finito ed esprimerlo per elencazione.

**Svolgimento 1.**

$$S := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  perché ogni Span sappiamo esserlo. Troviamone base e dimensione. Sicuramente i due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo generano. Ma sono anche indipendenti perché palesemente non proporzionali. Quindi una base per  $S$  è

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ne segue che  $\dim S = 2$ . Troviamo l'equazione cartesiana di  $S$  imponendo la compatibilità del sistema di matrice completa

$$B = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \\ -1 & 0 & t \end{array} \right)$$

Usiamo EG ottenendo

$$B = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y - 2x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & t + x \end{array} \right)$$

e poi

$$B = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y - 2x \\ 0 & 0 & z - \frac{1}{2}(y - 2x) \\ 0 & 0 & t + x \end{array} \right)$$

Dato che vogliamo che le soluzioni esistano dobbiamo chiedere che siano 0 le espressioni che fronteggiano le ultime due righe nulle nella incompleta. Imponendo tale condizione otteniamo l'equazione cartesiana di  $S$  che dunque è data dal sistema

$$\begin{cases} z - \frac{1}{2}(y - 2x) = 0 \\ t + x = 0 \end{cases}$$

Semplificando e riordinando, otteniamo quindi l'equazione cartesiana di  $S$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$$

Ora  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$  se e solo se le sue componenti sostituite al posto delle variabili  $x, y, z, t$  del sistema ne sono soluzione. Poiché  $1 + 1 \neq 0$ , tale vettore non sta in  $S$ . Passiamo a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Abbiamo che  $2 - 1 + 2 \cdot 0 \neq 0$  e quindi neanche tale vettore sta in  $S$ .

**2.** Scriviamo la matrice completa  $B$  del sistema

$$\begin{cases} (a+1)x + y - z = a \\ x + y - az = -2 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

dopo aver scambiato la prima riga con la terza in modo da incontrare il parametro  $a$  il più tardi possibile, ossia

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 & a \end{array} \right)$$

Usiamo EG ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & -2 & 4a-3 & 8 \\ 0 & -a & a^2+a+1 & 3a+2 \end{array} \right)$$

e poi

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & -2 & 4a-3 & 8 \\ 0 & 0 & -a^2+\frac{5}{2}a-1 & 2-a \end{array} \right)$$

Ci sono due pivot certi: 1 e -2. Vediamo quando anche  $-a^2 + \frac{5}{2}a - 1$  è o no un pivot, risolvendo l'equazione  $-a^2 + \frac{5}{2}a - 1 = 0$  che equivale alla  $2a^2 - 5a + 2 = 0$ . Le soluzioni sono  $a = 2, 1/2$ . Quindi se  $a \notin \{2, 1/2\}$  abbiamo 3 pivot e soluzione unica per il sistema. Se  $a = 2$  l'ultima riga diventa  $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 0)$  che esprime una identità ossia una equazione inutile per il sistema. In tal caso i pivot sono solo i due certi e  $z$  è variabile libera. Si hanno  $\infty^1$  soluzioni. Infine se  $a = 1/2$  l'ultima riga diventa  $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 3/2)$  che esprime una equazione impossibile e quindi il sistema è impossibile.

Tirando le fila: **per  $a \neq 2, 1/2$  soluzione unica; per  $a = 2$ ,  $\infty^1$  soluzioni; per  $a = 1/2$  nessuna soluzione.**

Troviamo ora le soluzioni nell'unico caso in cui siano infinite, ossia per  $a = 2$  continuando con EG in salita. Sappiamo che  $z$  è libera e il sistema è stato ridotto a

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 + 2z \\ 0 & -2 & 8 - 5z \end{array} \right)$$

Prepariamoci a EG $\uparrow$  dividendo per  $-2$  l'ultima riga

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 + 2z \\ 0 & 1 & -4 + \frac{5}{2}z \end{array} \right)$$

e poi facciamo un passo di EG $\uparrow$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 - \frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & -4 + \frac{5}{2}z \end{array} \right)$$

Ora leggiamo le soluzioni  $x = 2 - \frac{1}{2}z$  e  $y = -4 + \frac{5}{2}z$ . Quindi l'insieme  $S_2$  delle soluzioni del sistema per  $a = 2$  è

$$S_2 = \left\{ \left( \begin{array}{c} 2 - \frac{1}{2}z \\ -4 + \frac{5}{2}z \\ z \end{array} \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il sistema non è mai omogeneo perché almeno la seconda equazione ha sempre termine noto  $-2 \neq 0$ .

**3.** Per calcolare la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usiamo EG e poi EG $\uparrow$  su

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Si ha

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

semplifichiamola un po' prima di proseguire

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

ancora un EG in discesa fornisce

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array} \right)$$

Attiviamo EG $\uparrow$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array} \right)$$

e poi

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array} \right)$$

Pertanto abbiamo che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

E' immediato controllare che effettivamente accade quello che deve, ossia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

come pure

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In verità uno dei controlli è sufficiente a garantire anche l'altro (è un teorema di cui non abbiamo parlato che lo garantisce!).

Abbiamo ora che  $\text{rank}A = 3$  perché sappiamo che una matrice in  $M_n(\mathbb{F})$  è invertibile se e solo se il suo rango è  $n$ .

Per quanto riguarda  $B$  si vedono due colonne proporzionali quindi  $\text{rank}B \neq 3$ . Ma due colonne indipendenti ci sono sicuramente e sono la prima e la terza. Quindi  $\text{rank}B = 2$ .

4. Vediamo se i vettori dati formano un sistema di generatori di  $\mathbb{R}^4$  esaminando la compatibilità del sistema di completa

$$B = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 4 & 1 & 1 & 5 & y \\ 1 & 3 & -2 & -6 & z \\ 0 & -1 & 0 & -1 & t \end{array} \right)$$

per ogni  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ . Usiamo EG ottenendo

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & -3 & -3 & y - 4x \\ 0 & 2 & -3 & -8 & z - x \\ 0 & -1 & 0 & -1 & t \end{array} \right)$$

semplifichiamo

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{-y+4x}{3} \\ 0 & 2 & -3 & -8 & z - x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -t \end{array} \right)$$

proseguiamo con EG

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{-y+4x}{3} \\ 0 & 0 & -5 & -10 & z - \frac{11}{3}x + \frac{2}{3}y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -t + \frac{y-4x}{3} \end{array} \right)$$

Dato che l'incompleta è triangolare non singolare, abbiamo che qualunque siano  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ , le soluzioni esistono. Quindi i vettori dati sono indipendenti ed essendo  $4 = \dim \mathbb{R}^4$  essi formano una base. Di conseguenza non è possibile esprimere il vettore  $v_4$  come combinazione lineare dei vettori  $v_1, v_2, v_3$ .

5. L'insieme  $S$  delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 34y - z - t = 170 \\ 78x + y + z + 34t = -23 \\ x + 2y - 3z - 28t = 56 \end{cases}$$

non è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  perché non contiene il vettore nullo.

Passiamo a

$$Z = \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \right) \in \mathbb{F}_2^4 \mid x + z = 0, y + t = 0 \right\}.$$

Esso è un sottospazio perché è un insieme di soluzioni di un sistema omogeneo su un campo. Sicuramente esso è incluso in  $\mathbb{F}_2^4$  che ha  $2^4 = 16$  elementi e dunque lui stesso è finito e conterrà al massimo 16 elementi. Vediamo quali esattamente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

La sua matrice completa è

$$B = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

e si presenta a scala con variabili libere  $z$  e  $t$ . Si ha  $y = t$  e  $x = z$ . Pertanto i suoi elementi sono  $|F_2|^2 = 2^2 = 4$  e precisamente, per elencazione, abbiamo

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ t \\ z \\ t \end{pmatrix} : t, z \in F_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$