**Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica**

(Dott.ssa D. Bubboloni) 11 Febbraio 2015

Avete due ore e mezzo a disposizione. Potete scegliere 5 esercizi fra i 6 proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

**1.** Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x - ay - z - t = 0 \\ 2x - y - t = -a + 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di $a$ per cui l'insieme ha $\infty^2$ soluzioni e, in tal caso esplicitarle.

**2.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove $X$ è un vettore colonna. Dire perché $f$ è lineare, usando solo la definizione di linearità, e trovarne poi nucleo e immagine. Dire se $f$ è iniettiva e/o suriettiva.

**3.** Scrivere, in forma matriciale, la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio $p(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6yz + 4xy$ e stabilire se risulta denita/semidefinita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che risulta $p(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

**4.** Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dire se $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale di autovettori di $M$ e in caso affermativo determinarne una.

**5.** Dire se la seguente lista ordinata

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo trovare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa.

**6.** Risolvere simultaneamente i sistemi

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 9 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

e dire se le sottovarietá lineari affini che ne descrivono le soluzioni sono parallele od ortogonali (o nessuna delle due cose) e quale dimensione hanno.