Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni) 17 Dicembre 2013

Avete due ore e mezzo a disposizione. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x - y & = & -3z - a \\ -x + az & = & ay \\ 3y + 7z + 4 & = & 0 \end{cases}$$

Risolvere il sistema nei casi in cui ammetta infinite soluzioni. Dire se esistono valori di a tali che il sistema sia omogeneo.

2. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2b+1 & 0 \\ b-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare $b \in \mathbb{R}$ tale che B sia simmetrica e, per tale b, dire se esiste una matrice C tale che $C^{-1}BC$ sia diagonale. In caso affermativo determinare tale C.

3. Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dire se il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a W.

4. Determinare nucleo e immagine dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z)^T = (x - y + z, -x + 2y - z, -x + 4y - z)^T.$$

Dire se L è diagonalizzabile.

5. Determinare il segno della forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ definita da $Q(X) = X^T AX$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scrivere esplicitamente il polinomio omogeneo $Q(X)$, se $X = (x_1, x_2, x_3)^T$.

Esame del 17/12/2013

<u>Traccia delle soluzioni</u>

1. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -a \\ -1 & -a & a & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

via Rouché-Capelli:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -a & a \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} = -7a - 3a + (-7) - 9$$
$$= -10a - 16 = 0$$

per $a = -\frac{16}{10} = -\frac{8}{5}$

$$\boxed{\text{se } a \neq -\frac{8}{5} \text{ sol unica}}$$

Caso $a = -8/5$ via EG

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & +8/5 \\ -1 & 8/5 & -8/5 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1 \\ 0}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & +8/5 \\ 0 & 3/5 & 7/5 & -8/5 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & +8/5 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -8/5 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

l'ultima eq è impossibile

Nessuna sol per $a = -8/5$
Il sistema non risulta omogeneo perché il termine noto dell'ultima eq. è -4, $\forall a \in \mathbb{R}$.

2. B è simmetrica se

$$2b+1 = b-1 \quad , \quad \boxed{b=-2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C esiste per il teorema spettrale e può scegliersi addirittura ortogonale

$$p_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)\right.$$

$$\left.(-1-\lambda) - 9\right] = 0 \quad \text{per} \quad \lambda = 1 \quad \text{e}$$

$$(3-\lambda)(1+\lambda)+9=0$$
$$-\lambda^2+2\lambda+3+9=0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+12} = 1 \pm \sqrt{13}$$

Nessuna sol per $a = -8/5$
Il sistema non risulta omogeneo perché
il termine noto dell'ultima eq. è -4, $\forall a \in \mathbb{R}$.

2. B è simmetrica se

$2b+1 = b-1$, $\boxed{b=-2}$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C esiste per il teorema spettrale e può scegliersi addirittura ortogonale

$$p_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-1-\lambda)-9\right] = 0$$

per $\lambda = 1$ e

$(3-\lambda)(1+\lambda)+9=0$
$-\lambda^2+2\lambda+3+9=0$

$\lambda^2-2\lambda-12=0$

$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+12} = 1 \pm \sqrt{13}$

$V_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è ovvio

$$V_{1+\sqrt{13}} \quad \begin{pmatrix} 3-(1+\sqrt{13}) & -3 & 0 \\ -3 & -1-(1+\sqrt{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(1+\sqrt{13}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\sqrt{13} & -3 & 0 \\ -3 & -2-\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2-\sqrt{13}}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2-\sqrt{13} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

perché $-2-\sqrt{13} + \dfrac{3}{2-\sqrt{13}}(-3) =$

$$= \frac{-(+2+\sqrt{13})(2-\sqrt{13})-9}{2-\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{-(4-13)-9}{2-\sqrt{13}} = 0$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2-\sqrt{13} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{13} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

y libera: fissiamo $\boxed{y=1}$

$-\sqrt{13}\, z = 0$ dà $\boxed{z=0}$

infine $(2-\sqrt{13})x-3=0$ dà $\boxed{x = \dfrac{3}{2-\sqrt{13}}}$

$$V_{1+\sqrt{13}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2-\sqrt{13}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Analogamente trovate $V_{1-\sqrt{13}}$

Anche senza ortonormalizzarli, tali vettori messi in colonna danno una possibile C.

3. Cerco se esiste una sol per

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e nel frattempo controllo il rango dell'incompleta che si crea

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[EG]{\substack{0 \\ 1/2 \\ -1/2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1 \\ -4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

3 pivot
sistema impossibile

per cui $\dim W = 3$ e $v \notin W$.

4.

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lavoriamo con Ker A, Im A

Conviene trovare Im A tramite compatibilità di

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x' \\ -1 & 2 & -1 & y' \\ -1 & 4 & -1 & z' \end{array}\right)\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \end{array} \xrightarrow{EG}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x' \\ 0 & 1 & 0 & y'+x' \\ 0 & 3 & 0 & z'+x' \end{array}\right)\begin{array}{c} -3 \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x' \\ 0 & 1 & 0 & y'+x' \\ 0 & 0 & 0 & z'+x'-3y' -3x' \end{array}\right)$$

$$\mathrm{Im}\,A = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2x' - 3y' + z' = 0 \right\}$$

Ker A si ottiene risolvendo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$

in cui z è libero, $y = 0$,

$x - 0 + z = 0 \qquad x = -z$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Da notare dim Ker $A = 1$, dim Im $A = 2$.

Per vedere se L è diagonalizzabile calcoliamone gli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè}$$

$$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)+4\right] + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$- \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2-\lambda & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2+4\right] + \cancel{1} \cancel{+\lambda} - 4$$
$$-\cancel{1} + 2 - \cancel{\lambda} = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+2) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \cancel{2} - \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{2} = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

in cui z è libero, $y = 0$,

$x - 0 + z = 0 \qquad x = -z$

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Da notare $\dim \ker A = 1$, $\dim \operatorname{Im} A = 2$.

Per vedere se L è diagonalizzabile calcoliamone gli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè}$$

$$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)+4\right] + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$- \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2-\lambda & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2+4\right] + \cancel{1}\cancel{+\lambda} - 4$$

$$-\cancel{1} + 2 - \cancel{\lambda} = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+2) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \cancel{2} - \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{2} = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0 \qquad \boxed{\lambda = 0}$$

$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-3}$ non ci sono altre radici reali. Quindi $\sum m(\lambda_i) < 3$ e la matrice A (e dunque L) non è diagonalizzabile.

5. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

guardando la diagonale si dice subito A non è semidef < 0. Può essere semidef > 0 o indefinita.

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda) + (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[-1 + (1-\lambda)^2 - 4\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 5\right]$$

autovalori $\boxed{\lambda = 1} > 0$

$(1-\lambda) = \pm\sqrt{5}$ da cui

$1-\lambda = \sqrt{5}$ $\quad \lambda = 1-\sqrt{5} < 0$

$1-\lambda = -\sqrt{5}$ $\quad \lambda = 1+\sqrt{5} > 0$

La forma è indefinita

Nota $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-5) =$

$= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-4)$

$= -\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+\lambda^2-2\lambda-4$

$= -\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda-4$