# Matematica per le Applicazioni Economiche I, 16 luglio 2018
# Testo d'esame A

La prova ha la durata di un'ora e 45 minuti. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x} + 10x.$$

(a) [2pt] Si calcoli $f'(x)$ e si stabilisca se $f$ è iniettiva.
(b) [2pt] Si determini l'immagine di $f$.

**Esercizio 2**
(a) [4pt] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.
(b) [4pt] A quali delle seguenti funzioni è applicabile il teorema di Rolle? In caso affermativo, si determini un punto del dominio della funzione che soddisfa le condizioni descritte dalle tesi del teorema di Rolle; in caso negativo, si spieghi quale ipotesi del teorema non è rispettata:

$$f_1(x) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos(x); \qquad f_2(x) : [-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \cos(x);$$

$$f_3(x) : [0, 5] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x}.$$

(c) [2pt] Si esibisca il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[0, 5]$ che sia discontinua in almeno un punto di tale intervallo e che non soddisfi la tesi del teorema di Rolle.

**Esercizio 3**
(a) [1pt] Si dia la definizione di derivata prima di una funzione in un punto.
(b) [3pt] Sulla base della definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si determini $f'(0)$ per $f(x) = \cos(x)$.
(c) [2pt] Sulla base della definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dimostri che la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0.

**Esercizio 4** [12 pt] Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 4}{x}$$

e si disegni il suo grafico (si ometta lo studio del segno di $f(x)$).

**Esercizio 5** Si calcolino i seguenti limiti

(a) [4 pt] $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)^2 + 2(\tan x)^2 + 3x^2}{4(\sin x)^2 + 5x^3}$, (b) [4 pt] $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|x^3 - x| + 7 + \sin x}{x^2 + 6 + e^x}$

# Soluzioni testo A

**Esercizio 1** (a) La funzione $f$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = -e^{-x} + 10$$

e

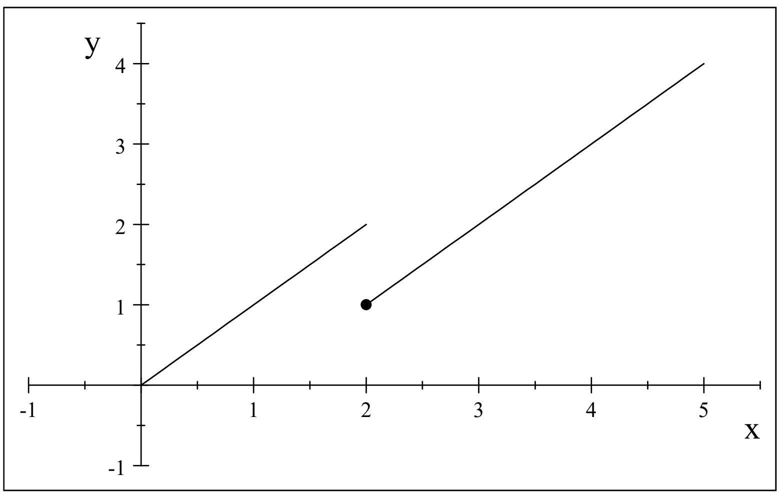
$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ equivale a } -e^{-x} + 10 > 0 \Longleftrightarrow 10 > e^{-x} \Longleftrightarrow \ln 10 > -x \Longleftrightarrow x > -\ln 10 \\ f'(x) &< 0 \text{ equivale a } -e^{-x} + 10 < 0 \Longleftrightarrow 10 < e^{-x} \Longleftrightarrow \ln 10 < -x \Longleftrightarrow x < -\ln 10 \end{aligned}$$

Dunque $f$ è continua in $\mathbb{R}$, monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -\ln 10)$ e monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\ln 10, +\infty)$. Quindi $f$ non è iniettiva.
(b) Il punto $x_0 = -\ln 10$ è punto di minimo globale per $f$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Poiché $f$ è continua in $\mathbb{R}$, un'opportuna versione del teorema dei valori intermedi (teorema 7.7 del libro di testo) implica $\mathrm{Im}(f) = [f(-\ln 10), +\infty) = [10 - 10\ln 10, +\infty)$.

**Esercizio 2**
(a) Si veda il teorema 8.5 nel libro di testo.
(b) La funzione $f_1$ è continua in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, è derivabile in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e $f_1(-\frac{\pi}{2}) = f_2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Dunque $f_1$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e $f_1'(x) = -\sin x$; pertanto $x_0 = 0$ soddisfa $f_1'(x_0) = 0$, come descritto dalla tesi del teorema di Rolle.
La funzione $f_2$ è continua in $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$, è derivabile in $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e $f_2(-\frac{3\pi}{2}) = f_2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Dunque $f_2$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e $f_2'(x) = -\sin x$; pertanto $x_0 = 0$ soddisfa $f_2'(x_0) = 0$, come descritto dalla tesi del teorema di Rolle.
La funzione $f_3$ è continua in $[0, 5]$, è derivabile in $(0, 5)$ ma $f_3(0) = 0$, $f_3(5) = \sqrt{5} \neq f_3(0)$. Dunque $f_3$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.
(c) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x < 2 \\ x - 1 & \text{if } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

è discontinua nel punto 2 e non esiste alcun $x_0 \in (0, 5)$ tale che $f'(x_0) = 0$.



**Esercizio 3** (a) La derivata prima di $f$ in un punto $x_0$ interno al campo di esistenza di $f$ è $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, purché tale limite esista e sia finito.
(b) $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h^2}\cdot h = (-\frac{1}{2})\cdot 0 = 0.$
(c) $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{0^+}$, quindi $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$ e $f$ non è derivabile nel punto 0.

**Esercizio 4**
L'insieme di definizione di $f$ è $A = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica. I limiti sono

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \frac{-4}{0^-},\text{ dunque } \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \frac{-4}{0^+},\text{ dunque } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty
\end{aligned}$$

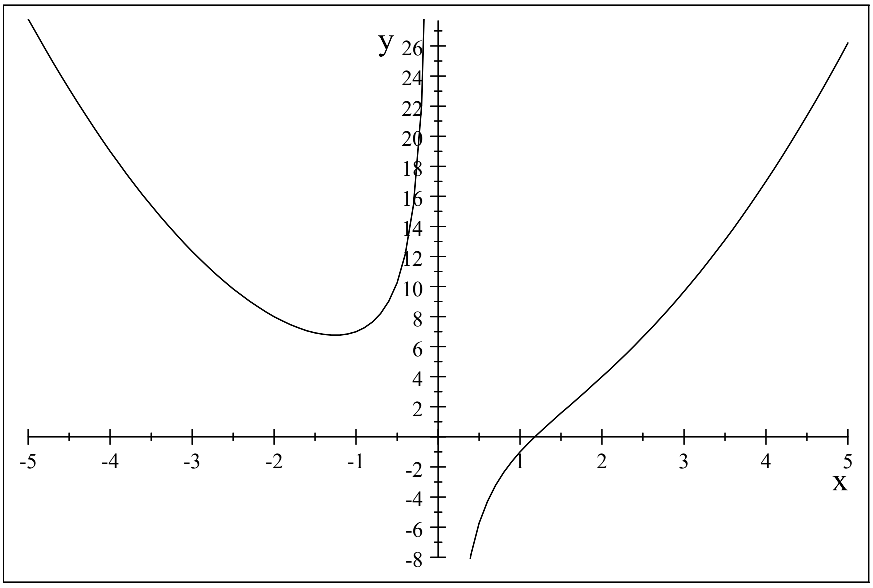
Dunque non esistono asintoti orizzontali, ma la retta verticale di equazione $x = 0$ è asintoto verticale. La derivata prima di $f$ è

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2)x-(x^3+2x-4)}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x^3+2)$$

La disequazione $x^3+2>0$ equivale a $x>\sqrt[3]{-2}$ e $x^3+2<0$ equivale a $x<\sqrt[3]{-2}$. Quindi $f'(x)<0$ nell'intervallo $(-\infty,\sqrt[3]{-2})$ e $f'(x)>0$ per $x\in(\sqrt[3]{-2},0)\cup(0,+\infty)$; $f$ è strettamente decrescente in $(-\infty,\sqrt[3]{-2})$, è strettamente crescente in $(\sqrt[3]{-2},0)$, è strettamente crescente in $(0,+\infty)$. La derivata seconda di $f$ è

$$f''(x) = 2\cdot\frac{3x^2\cdot x^2-2x(x^3+2)}{x^4} = \frac{2}{x^3}\left(x^3-4\right)$$

La disequazione $x^3-4>0$ equivale a $x>\sqrt[3]{4}$ e $x^3-4<0$ equivale a $x<\sqrt[3]{4}$. Poiché $x^3<0$ se $x<0$ e $x^3>0$ se $x>0$, risulta che $f''(x)>0$ nell'intervallo $(-\infty,0)$, $f''(x)<0$ per $x\in(0,\sqrt[3]{4})$, $f''(x)>0$ per $x\in(\sqrt[3]{4},+\infty)$. Dunque $f$ è convessa in $(-\infty,0)$, concava in $(0,\sqrt[3]{4})$, convessa in $(\sqrt[3]{4},+\infty)$. Il grafico di $f$ è




**Esercizio 5** (a) Risulta che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2+2(\tan x)^2+3x^2}{4(\sin x)^2+5x^3} = \frac{0}{0}$$

ed è utile dividere numeratore e denominatore per $x^2$, ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(e^x-1)^2}{x^2}+2\frac{(\tan x)^2}{x^2}+3}{4\frac{(\sin x)^2}{x^2}+5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2+2\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2+3}{4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+5x} = \frac{1+2+3}{4+0} = \frac{3}{2}$$

(b) Risulta che

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{|x^3-x|+7+\sin x}{x^2+6+e^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3+x+7+\sin x}{x^2+6+e^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to -\infty}(-x) = +\infty$$

# Matematica per le Applicazioni Economiche I, 16 luglio 2018
## Testo d'esame B

La prova ha la durata di un'ora e 45 minuti. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

**Esercizio 1** (a) [1pt] Si dia la definizione di derivata prima di una funzione in un punto.
(b) [3pt] Sulla base della definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si determini $f'(0)$ per $f(x) = \sin(x)$.
(c) [2pt] Sulla base della definizione di derivata prima di una funzione in un punto, si dimostri che la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in 0.

**Esercizio 2** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-2x} + 20x.$$

(a) [2pt] Si calcoli $f'(x)$ e si stabilisca se $f$ è iniettiva.
(b) [2pt] Si determini l'immagine di $f$.

**Esercizio 3** (12 punti) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 8}{x}$$

e si disegni il suo grafico (si ometta lo studio del segno di $f(x)$).

**Esercizio 4** (a) [4pt] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.
(b) [4pt] A quali delle seguenti funzioni è applicabile il teorema di Rolle? In caso affermativo, si determini un punto del dominio della funzione che soddisfa le condizioni descritte dalle tesi del teorema di Rolle; in caso negativo, si spieghi quale ipotesi del teorema non è rispettata:

$$f_1(x) : [0, 5] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = |x|; \qquad f_2(x) : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = |x|;$$

$$f_3(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sin(x).$$

(c) [2pt] Si esibisca il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[1, 4]$ che sia discontinua in almeno un punto di tale intervallo e che soddisfi la tesi del teorema di Rolle.

**Esercizio 5** Si calcolino i seguenti limiti

(a) [4 pt] $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+x^2) + 4(\sin x)^2 + 5x^2}{6(\tan x)^2 + 7x^3}$, (b) [4 pt] $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|x - x^5| + 11}{3 + x^2 - e^x + \cos x}$

# Soluzioni testo B

**Esercizio 1** (a) La derivata prima di $f$ in un punto $x_0$ interno al campo di esistenza di $f$ è $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, purché tale limite esista e sia finito.
(b) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$.
(c) $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}-1 & \text{se } h<0\\ 1 & \text{se } h>0\end{cases}$, dunque $\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1$, $\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1$ e $\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ non esiste.

**Esercizio 2** (a) La funzione $f$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata prima è

$$f'(x)=-2e^{-2x}+20$$

e

$$\begin{aligned}
f'(x) &> 0 \text{ equivale a } -2e^{-2x}+20>0 \Longleftrightarrow 20>2e^{-2x} \Longleftrightarrow \ln 10>-2x \Longleftrightarrow x>-\frac{1}{2}\ln 10\\
f'(x) &< 0 \text{ equivale a } -2e^{-2x}+20<0 \Longleftrightarrow 20<2e^{-2x} \Longleftrightarrow \ln 10<-2x \Longleftrightarrow x<-\frac{1}{2}\ln 10
\end{aligned}$$

Dunque $f$ è continua in $\mathbb{R}$, monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 10)$ e monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\frac{1}{2}\ln 10,+\infty)$. Quindi $f$ non è iniettiva.
(b) Il punto $x_0=-\frac{1}{2}\ln 10$ è punto di minimo globale per $f$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Poiché $f$ è continua in $\mathbb{R}$, un'opportuna versione del teorema dei valori intermedi (teorema 7.7 del libro di testo) implica $\mathrm{Im}(f)=[f(-\frac{1}{2}\ln 10),+\infty)=[10-10\ln 10,+\infty)$.

**Esercizio 3**
L'insieme di definizione di $f$ è $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica. I limiti sono

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty\\
\lim_{x\to 0^-}f(x) &= \frac{-8}{0^-}, \text{ dunque } \lim_{x\to 0^-}f(x)=+\infty\\
\lim_{x\to 0^+}f(x) &= \frac{-8}{0^+}, \text{ dunque } \lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty\\
\lim_{x\to+\infty}f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty
\end{aligned}$$

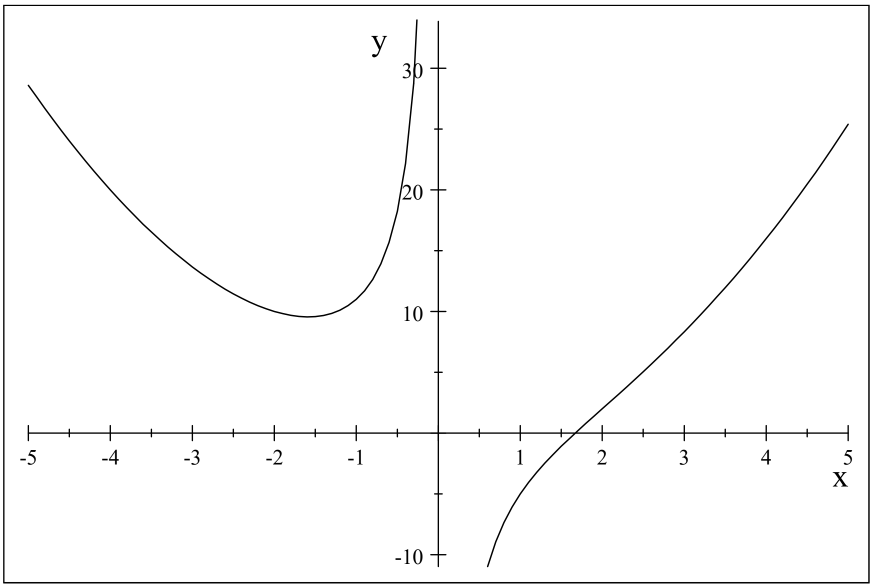
Dunque non esistono asintoti orizzontali, ma la retta verticale di equazione $x=0$ è asintoto verticale. La derivata prima di $f$ è

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2)x-(x^3+2x-8)}{x^2}=\frac{2}{x^2}(x^3+4)$$

La disequazione $x^3+4>0$ equivale a $x>\sqrt[3]{-4}$ e $x^3+4<0$ equivale a $x<\sqrt[3]{-4}$. Quindi $f'(x)<0$ nell'intervallo $(-\infty,\sqrt[3]{-4})$ e $f'(x)>0$ per $x\in(\sqrt[3]{-4},0)\cup(0,+\infty)$: $f$ è strettamente decrescente in $(-\infty,\sqrt[3]{-4})$, è strettamente crescente in $(\sqrt[3]{-4},0)$, è strettamente crescente in $(0,+\infty)$. La derivata seconda di $f$ è

$$f''(x)=2\cdot\frac{3x^2\cdot x^2-2x(x^3+4)}{x^4}=\frac{2}{x^3}\left(x^3-8\right)$$

La disequazione $x^3 - 8 > 0$ equivale a $x > 2$ e $x^3 - 8 < 0$ equivale a $x < 2$. Poiché $x^3 < 0$ se $x < 0$ e $x^3 > 0$ se $x > 0$, risulta che $f''(x) > 0$ nell'intervallo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (0, 2)$, $f''(x) > 0$ per $x \in (2, +\infty)$. Dunque $f$ è convessa in $(-\infty, 0)$, concava in $x \in (0, 2)$, convessa in $(2, +\infty)$. Il grafico di $f$ è




**Esercizio 4**

(a) Si veda il teorema 8.5 nel libro di testo.

(b) La funzione $f_1$ è continua in $[0, 5]$, è derivabile in $(0, 5)$, ma $f_1(0) = 0$, $f_1(5) = 5 \neq f_1(0)$. Dunque $f_1$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

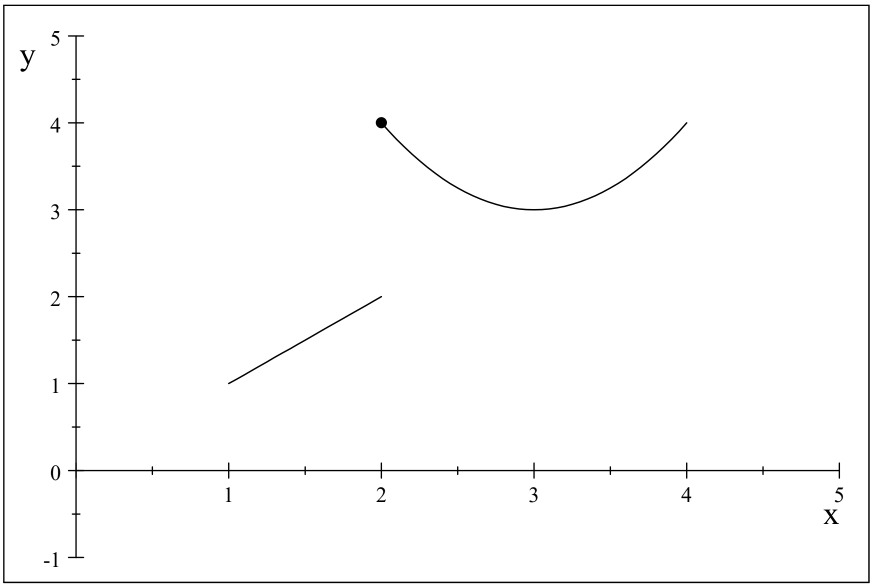
La funzione $f_2$ è continua in $[-1, 1]$ ma non è derivabile in $(-1, 1)$ (poiché non è derivabile nel punto 0), dunque $f_2$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

La funzione $f_3$ è continua in $[-\pi, \pi]$, è derivabile in $(-\pi, \pi)$, e $f_3(-\pi) = f_3(\pi) = 0$. Dunque $f_3$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e $f_3'(x) = \cos x$; pertanto $x_0 = \frac{\pi}{2}$ soddisfa $f_3'(x_0) = 0$, come descritto dalla tesi del teorema di Rolle.

(c) La funzione

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

è discontinua nel punto 2 ma $x_0 = 3$ è tale che $f'(x_0) = 0$.




**Esercizio 5** (a) Risulta che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+x^2)+4(\sin x)^2+5x^2}{6(\tan x)^2+7x^3} = \frac{0}{0}$$

ed è utile dividere numeratore e denominatore per $x^2$, ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+4\frac{(\sin x)^2}{x^2}+5}{6\frac{(\tan x)^2}{x^2}+7x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+5}{6\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2+7x} = \frac{3+4+5}{6+0} = 2,$$

avendo adottato per $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ il cambio di variabile $z = x^2$: poiché la funzione $g(x)$, che non è iniettiva, è tale per cui comunque $g^{-1}(z_0) = g^{-1}(0) = \{0\}$ contiene un numero finito di punti, per il terzo teorema riguardante il calcolo dei limiti in caso di cambiamento di variabile è assicurato che $1 = \lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

(b) Risulta che

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{|x-x^5|+11}{3+x^2-e^x+\cos x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-x^5+11}{3+x^2-e^x+\cos x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^5}{x^2} = \lim_{x\to -\infty}(-x^3) = +\infty$$