ESERCIZIO 1.

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$

SVOLGIMENTO.

Osserviamo innanzitutto che la funzione f ha come dominio naturale l'insieme $\mathbb{R}$. Quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Inoltre f è una funzione periodica di periodo 2π in quanto si ha

$$f(x+2\pi) = \arcsin\left(\sin(x+2\pi)\right) = \arcsin(\sin x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Perciò, per disegnare il grafico di f basta disegnare tale grafico in un opportuno intervallo di ampiezza 2π e farne l'estensione. A tale scopo ricordiamo che, dal momento che la funzione arcoseno è l'inversa della restrizione a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ della funzione seno,

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ per ogni } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

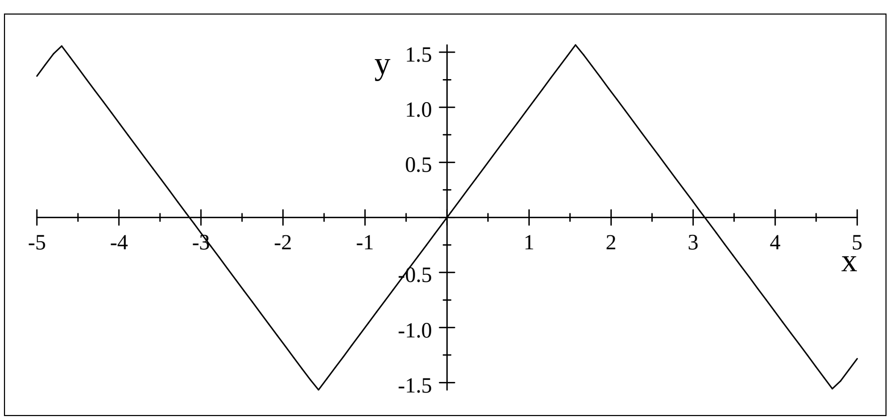
D'altra parte, se $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ allora $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e poiché si ha $\sin(\pi - x) = \sin x$ otteniamo

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin\left(\sin(\pi - x)\right) = \pi - x, \text{ per ogni } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Pertanto

$$f_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & \text{se } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Poiché l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ha ampiezza 2π, il grafico di f risulta quello tracciato in figura



ESERCIZIO 2.
Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \arccos(\cos x)$$

SVOLGIMENTO
Come nell'esercizio precedente, si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ e f periodica di periodo 2π. D'altra parte

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \text{per ogni } x \in [0, \pi]$$

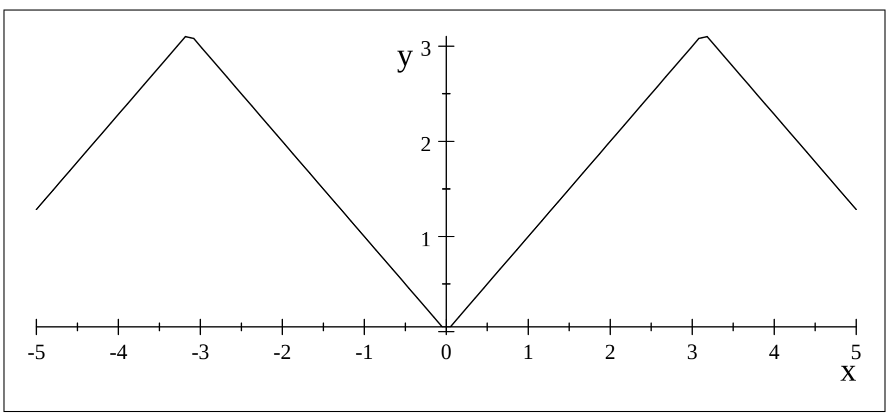
e se $x \in (\pi, 2\pi]$ allora $2\pi - x \in [0, 2\pi)$ ed inoltre $\cos x = \cos(2\pi - x)$. Quindi

$$\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2\pi - x)) = 2\pi - x, \text{ per ogni } x \in (\pi, 2\pi].$$

Pertanto

$$f_{|[0,2\pi]}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x, & \text{se } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases} .$$

Poiché l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ha ampiezza 2π, il grafico di f risulta quello tracciato in figura



ESERCIZIO 3.
a) Verificare che

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{per ogni } x \in [-1, 1] \tag{1}$$

b) Utilizzare la relazione ottenuta in a) per disegnare i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = \arcsin(\cos x) \quad , \quad f_2(x) = \arccos(\sin x) .$$

SVOLGIMENTO.

a) Per dimostrare 1 basta mostrare che

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \text{per ogni } x \in [-1,1]\,. \tag{2}$$

Ora abbiamo

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin\left(\arcsin x\right) = x, \quad , \quad \text{per ogni } x \in [-1,1]\,. \tag{3}$$

Ricordando che $\cos(\arccos x) = x$ abbiamo dalla 3

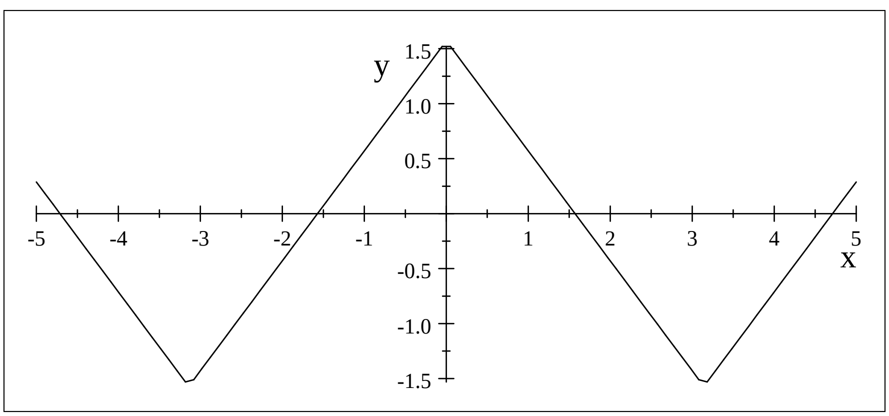
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \cos\left(\arccos x\right), \quad \text{per ogni } x \in [-1,1] \tag{4}$$

Inoltre, poiché $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\arccos x \in [0,\pi]$ e poiché la funzione coseno è iniettiva nell'intervallo $[0,\pi]$, dalla 4 si ha la 2 e ciò conclude la dimostrazione.

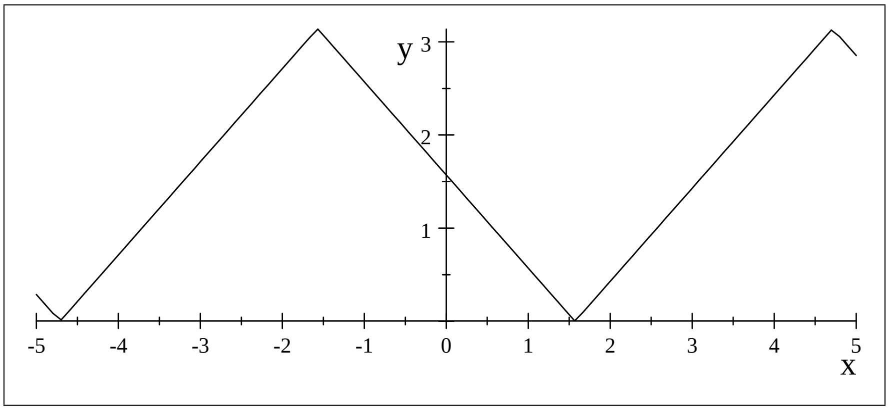
b) Per quanto riguarda f_1 si ha dalla 1

$$f_1(x) = \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos x\right).$$

Pertanto il grafico della f_1 può essere facilmente ottenuto dal grafico di $\arccos(\cos x)$ (vedi esercizio 2) usando semplici trasformazioni geometriche e si ottiene il grafico riportato qui



Per il grafico di $f_2(x) = \arccos(\sin x)$ si procede in modo analogo e si ottiene il grafico riportato qui di seguito


y
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x