Esercizio 1

Rispetto ad una terna cartesiana ortogonale di origine O e versori $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ due vettori spostamento $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno componenti $\boldsymbol{a} = (6,-8,0)$ e $\boldsymbol{b} = (2,-1,\sqrt{11})$. Le componenti sono espresse in metri. Si determini:

1) il modulo dei vettori, il valore del loro prodotto scalare, l'angolo tra i due vettori.
2) uno dei vettori forma un angolo di $\pi/3$ con $\hat{\boldsymbol{i}}$: quale?
3) esprimere le componenti dei versori. Se si misurano le distanze in centimetri come cambiano le componenti dei vettori e dei relativi versori?
4) si scrivano le componenti dei vettori $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.
5) se i due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono applicati ad un medesimo punto *P,* quanto vale la distanza tra i punti estremi.
6) se $\boldsymbol{a}$ è applicato in *P*, mentre $\boldsymbol{b}$ è applicato all'estremità di $\boldsymbol{a}$, quanto vale la distanza tra *P* e l'estremo di $\boldsymbol{b}$
7) se $\boldsymbol{a}$ è applicato nell'origine O e $\boldsymbol{b}$ nel punto P di coordinate $OP = (2,0,0)$, quanto vale la distanza fra gli estremi di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
8) determinare le componenti dei versori perpendicolari al piano formato da $\boldsymbol{a}$ e da $\hat{\boldsymbol{i}}$.
9) determinare le componenti dei versori perpendicolari ad $\boldsymbol{a}$ e a $\hat{\boldsymbol{k}}$.
10) utilizzando i versori trovati in 8) e 9) si costruisca una nuova terna cartesiana ortogonale e si scrivano le nuove componenti di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
11) con le nuove componenti cosa cambia nelle risposte alle domande 1) ….9)?

Soluzione esercizio 1

1) Dalla definizione di modulo di un vettore si ricava:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \ \ m$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (\sqrt{11})^2} = \sqrt{16} = 4 \ \ m \ .$$

Il prodotto scalare fra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ vale:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (6)(8) + (-8)(-1) + (0)(\sqrt{11}) = 20 \ \ m^2 \ .$$

L'angolo tra i due vettori si ricava dalla seguente identità:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\boldsymbol{a}| \ |\boldsymbol{b}| \cos\alpha \ ,$$

ossia:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \ |\boldsymbol{b}|} = \frac{20}{(10)(4)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^o = \frac{\pi}{3} \ .$$

2) Per rispondere a questa domanda è necessario calcolare il prodotto scalare di ciascun vettore con il versore $\hat{\boldsymbol{i}}$ dell'asse *x*. Dalla definizione di prodotto scalare si ha:

$$\cos(\theta_{\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{i}}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}}{|\boldsymbol{a}| \ |\hat{\boldsymbol{i}}|} = \frac{a_x}{|\hat{\boldsymbol{i}}| \ |\boldsymbol{a}|} = \frac{6}{(1)(10)} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{i}}} = 53.1^o$$

$$\cos(\theta_{\boldsymbol{b},\hat{\boldsymbol{i}}}) = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}}{|\boldsymbol{b}| \ |\hat{\boldsymbol{i}}|} = \frac{b_x}{|\hat{\boldsymbol{i}}| \ |\boldsymbol{b}|} = \frac{2}{(1)(4)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\boldsymbol{b},\hat{\boldsymbol{i}}} = 60^o = \frac{\pi}{3} .$$

3) I versori $\hat{\boldsymbol{a}}$ e $\hat{\boldsymbol{b}}$ risultano:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{10}(6,-8,0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{4}(2,-1,\sqrt{11}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}\right) .$$

Se le distanze si misurano in centimetri i moduli dei vettori diventano:

$$|\boldsymbol{a}| = 1000 \ cm \qquad\qquad |\boldsymbol{b}| = 400 \ cm \ .$$

Le componenti dei versori non cambiano.

4) Siano $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, rispettivamente, i vettori somma e differenza dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Le componenti del vettore somma $\boldsymbol{c}$ sono:

$$\boldsymbol{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = (6+2, -8-1, 0+\sqrt{11}) = (8, -9, \sqrt{11}) \ .$$

Le componenti del vettore differenza $\boldsymbol{d}$ sono invece:

$$d = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) = (6-2, -8-(-1), 0-\sqrt{11}) = (4, -7, -\sqrt{11}) .$$

5) Se i vettori sono applicati nello stesso punto P, la distanza fra i loro estremi è uguale a $|\boldsymbol{d}|$, ossia

$$distanza = |\boldsymbol{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{(4)^2 + (-7)^2 + (-\sqrt{11})^2} = \sqrt{76} \ m \ .$$

6) La distanza fra l'estremo libero del vettore $\boldsymbol{b}$ e il punto P è uguale a $|\boldsymbol{c}|$, ossia

$$distanza = |\boldsymbol{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(8)^2 + (-9)^2 + (\sqrt{11})^2} = \sqrt{156} \ m \ .$$

7) In questo caso la distanza fra la punta del vettore $\boldsymbol{a}$ e la punta del vettore $\boldsymbol{b}$ risulta:

$$distanza = |\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{OP} + \boldsymbol{b})| = \sqrt{(4-2-2)^2 + (-8-(-1))^2 + (-(\sqrt{11}))^2} = \sqrt{64} = 8 \ m \ .$$

8) Indichiamo con $\hat{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ il generico versore ortogonale sia al vettore $\boldsymbol{a}$ che al versore $\hat{\boldsymbol{i}}$. Affinché $\hat{\boldsymbol{u}}$ risulti contemporaneamente ortogonale sia al vettore $\boldsymbol{a}$ che al versore $\hat{\boldsymbol{i}}$ dovrà risultare

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{a} = u_x a_x + u_y a_y + u_z a_z = 6u_x - 8u_y = 0 \qquad (1)$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = u_x 1 + u_y 0 + u_z 0 = u_x = 0 \qquad (2)$$

Inoltre, poiché $\hat{\boldsymbol{u}}$ è un versore, il suo modulo è unitario e pertanto dovrà essere verificata anche l'ulteriore condizione:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \qquad (3)$$

Dalla condizione (2) si ricava il valore $u_x = 0$, che sostituito nell'equazione (2) dà $u_y = 0$. Dalla condizione (3) si deduce allora il risultato $u_z = \pm 1$. I versori cercati sono dunque $\hat{\boldsymbol{u}} = (0, 0, \pm 1) = \pm\hat{\boldsymbol{k}}$, avendo indicato con $\hat{\boldsymbol{k}}$ il versore dell'asse *z*. Si osservi che a questa domanda si poteva rispondere immediatamente osservando che, oltre al versore $\hat{\boldsymbol{i}}$, anche il vettore $\boldsymbol{a}$ giace nel piano *(x,y)* .

9) Sia $\hat{\boldsymbol{n}} = (n_x, n_y, n_z)$ il generico versore ortogonale sia al vettore $\boldsymbol{a}$ che al versore $\hat{\boldsymbol{k}}$. Procedendo come al punto 7) si ricava:

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{a} = n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z = 6n_x - 8n_y = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = n_x 0 + n_y 0 + n_z 1 = n_z = 0$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Risolvendo questo sistema nelle incognite (n_x, n_y, n_z) si ricava:

$$n_x = \pm\frac{4}{5}, \ n_y = \pm\frac{3}{5}, \ n_z = 0 .$$

I versori cercati sono dunque: $\hat{\boldsymbol{n}} = \left(\pm\frac{4}{5}, \pm\frac{3}{5}, 0\right)$.

10) La nuova terna cartesiana è costruita con i versori $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ e $\hat{\boldsymbol{n}}$. In questa nuova terna le componenti del vettore $\boldsymbol{a}$ sono immediate: $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\hat{a} = (10, 0, 0)$. Le componenti del vettore $\boldsymbol{b}$ rispetto a questa nuova terna risultano invece:

$$b_{\hat{a}} = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{(6)(2) + (-8)(-1) + (0)(\sqrt{11})}{10} = \frac{20}{10} = 2 \ m$$

$$b_{\hat{u}} = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = (2)(0) + (-1)(0) + (\sqrt{11})(\pm 1) = \pm\sqrt{11} \ m$$

$$b_{\hat{n}} = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = (2)\left(\pm\frac{4}{5}\right) + (-1)\left(\pm\frac{3}{5}\right) + (0)(\sqrt{11}) = \pm\frac{8}{5} \mp \frac{3}{5} = \pm 1 \ m \ .$$