Sistemi reticolari piani

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Metodo matriciale applicato a strutture isostatiche: strategia di soluzione

Il problema strutturale per i sistemi reticolari - definizioni

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
$f=2n-v$	*gdl* non vincolati esternamente

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ \dots \\ \underline{R} \end{bmatrix}$$

Array delle forze esterne: $\underline{F}$

Array delle reazioni vincolari: $\underline{R}$

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_f \\ \dots \\ \underline{u}_v \end{bmatrix}$$

Array degli spostamenti nodali non vincolati esternamente: $\underline{u}_f$

Array degli spostamenti nodali vincolati esternamente: $\underline{u}_v$

$$\underline{u}_v = \underline{\Delta}$$

Spostamenti impressi, eventualmente nulli per sistemi a vincoli fissi

Array degli sforzi normali: $[\underline{N}]$

Array degli allungamenti assiali: $[\underline{\delta}]$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema strutturale per i sistemi reticolari generici

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
$f=2n-v$	*gdl* non vincolati esternamente

Dati (arancione)
Incognite (verde)

Reazioni vincolari esterne $\underline{R}$

$\underline{F}$

Spostam. nodali $\underline{u}_f$

Cedim. vincolari $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente

$$\underset{[v\times1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

$$\underset{[f\times1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times f]}{[C_f]}\ \underset{[f\times1]}{\underline{u}_f}$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Sforzi normali $\underline{N}$

legami costitutivi

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[D]}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}} + \underset{[b\times1]}{\underline{\delta}_a}$$

$$\underset{[b\times1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times1]}{\underline{\delta}_a}\right)$$

Allungamenti delle aste

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times f]}{[C_f]}\ \underset{[f\times1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema strutturale per i sistemi reticolari isostatici

n numero di nodi
b numero di aste
v vincoli esterni
$f=2n-v$ *gdl* non vincolati esternamente

Nei sistemi isostatici
- si ha $2n-b-v=0 \rightarrow f-b=0$
- la soluzione delle equazioni di equilibrio esiste ed è unica ($\exists\, [C_f]^{-T}$)

Dati

Incognite

Reazioni vincolari esterne $\underline{R}$

$\underline{F}$

Spostam. nodali $\underline{u}_f$

Cedim. vincolari $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente

$$\underset{[v\times1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

$$\underset{[b\times1]}{\underline{F}} = \underset{[b\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times f]}{[C_f]}\ \underset{[f\times1]}{\underline{u}_f}$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Sforzi normali $\underline{N}$

legami costitutivi

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[D]}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}} + \underset{[b\times1]}{\underline{\delta}_a}$$

$$\underset{[b\times1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times1]}{\underline{\delta}_a}\right)$$

Allungamenti delle aste

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[C_f]}\ \underset{[b\times1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Il problema strutturale per i sistemi reticolari isostatici

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
$f=2n-v$	*gdl* non vincolati esternamente

Nei sistemi isostatici
- si ha $2n\text{-}b\text{-}v=0 \rightarrow f\text{-}b=0$
- la soluzione delle equazioni di equilibrio esiste ed è unica ($\exists\, [C_f]^{-T}$)

Dati

Incognite

Reazioni vincolari esterne $\underline{R}$

$\underline{F}$

Spostam. nodali $\underline{u}_f$

Cedim. vincolari $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente

$$\underset{[v\times1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\,\underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

$$\underset{[b\times1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[C_f]^{-T}}\,\underset{[b\times1]}{\underline{F}}$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{u}_f} = \underset{[b\times b]}{[C_f]^{-1}}\left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}\right)$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Sforzi normali $\underline{N}$

legami costitutivi

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[D]}\,\underset{[b\times1]}{\underline{N}} + \underset{[b\times1]}{\underline{\delta_a}}$$

$$\underset{[b\times1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times1]}{\underline{\delta_a}}\right)$$

Allungamenti delle aste

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[C_f]}\,\underset{[b\times1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani isostatici

OSSERVAZIONI

1. per il calcolo degli sforzi normali nelle aste si utilizzano solo delle equazioni di equilibrio: <u>le deformazioni anelastiche (distorsioni termiche) o i cedimenti dei vincoli non producono infatti sollecitazioni nei sistemi isostatici</u>;
2. gli operatori algebrici di equilibrio $\{[C_f]^T, [C_v]^T\}$ e di congruenza $\{[C_f], [C_v]\}$ <u>dipendono solo dalla geometria del sistema e dai vincoli</u>, non dalla particolare condizione di carico: possono allora essere utilizzati per risolvere la struttura in esame per differenti condizioni di carico.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Strategia di soluzione dei sistemi reticolari piani isostatici

Sia dato un sistema reticolare piano formato da n nodi, b aste e vincolato esternamente da v vincoli fissi (gradi di vincolo). Si può procedere alla sua risoluzione utilizzando il seguente schema:

1. Verifica dell'isostaticità del sistema

   un sistema reticolare piano è isostatico se e soltanto se $2n\text{-}b\text{-}v=0$ ed inoltre $\ell=0$

   OSS.

   peri sistemi reticolari piani isostatici, la somma del numero di bielle e dei vincoli esterni è pari al doppio del numero di nodi presenti nella struttura

   $$2n=b+v \rightarrow f=2n\text{-}v=b$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Strategia di soluzione dei sistemi reticolari piani isostatici

2. Equazioni di equilibrio

2.0 si numerano le aste presenti nella struttura da 1 a b

si indicano tutti i nodi della struttura con delle lettere

si assume che nelle aste sia presente uno sforzo normale positivo (di trazione) e si ordinano gli sforzi normali presenti nelle aste in un vettore: nel sistema sono presenti b aste per cui il vettore degli sforzi normali ha b termini

$$\underset{[b\times 1]}{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_b \end{bmatrix}$$

si fissa un sistema di riferimento cartesiano ortogonale esterno e si ordinano le forze nodali esterne in un vettore colonna assumendo positive le componenti delle forze concordi con gli assi del sistema di riferimento (ovviamente per i nodi scarichi si pone $F=0$). Visto che i nodi vincolati esternamente non possono essere caricati nella direzione vincolata (principio di mutua esclusione), al più nel sistema (isostatico) sono presenti $2n\text{-}v=b$ forze esterne

$$\underset{[b\times 1]}{F} = \begin{bmatrix} F_x^A \\ F_y^A \\ \vdots \end{bmatrix}$$

si ordinano le reazioni vincolari esterne in un vettore colonna di v termini

$$\underset{[v\times 1]}{R}$$

Strategia di soluzione dei sistemi reticolari piani isostatici

2. Equazioni di equilibrio

2.1 calcolo degli sforzi normali presenti nelle aste attraverso l'equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente.

Nel sistema sono presenti n nodi. Per ogni nodo è possibile scrivere due equazioni di equilibrio linearmente indipendenti e quindi in totale si avrebbero $2n$ equazioni. Al momento si prendono in considerazione solo le equazioni di equilibrio alla traslazione dei nodi nelle direzioni non vincolare esternamente e quindi si scrivono $2n\text{-}v=b$ equazioni di equilibrio linearmente indipendenti

$$\underset{[b\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times 1]}{\underline{F}}$$

$[C_f]^T$ = operatore algebrico di equilibrio

Il sistema strutturale in esame è isostatico per cui il precedente sistema di b equazioni in b incognite (gli sforzi normali) fornisce univocamente gli sforzi normali presenti nelle aste

$$\underline{N} = [C_f]^{-T}\underline{F}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Strategia di soluzione dei sistemi reticolari piani isostatici

2. Equazioni di equilibrio

 2.2 calcolo delle reazioni vincolari esterne attraverso l'equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente.

 Si ottiene un sistema di v equazioni linearmente indipendenti da cui è possibile determinare il valore delle reazioni vincolari esterne

$$\underset{[v\times 1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{\left[C_v\right]^T} \underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

 2.3 verifica delle equazioni di equilibrio globali del sistema

 utilizzando i valori delle reazioni vincolari determinati al punto precedente e considerando tutti i carichi esterni applicati al sistema si verifica l'equilibrio globale. Tali equazioni devono essere identicamente soddisfate.

 È sempre conveniente fare delle verifiche per evitare errori grossolani.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Strategia di soluzione dei sistemi reticolari piani isostatici

3. Legami costitutivi

noti gli sforzi normali presenti nelle aste, le loro caratteristiche geometriche ed il materiale di cui sono costituite, si può calcolare l'allungamento (accorciamento se il risultato è negativo) della i-esima asta mediante la seguente relazione

$$\delta_i = \left(\frac{L}{EA}\right)_i N_i + (\alpha \Delta t L)_i$$

E = modulo elastico del materiale

α = coefficiente di dilatazione termica del materiale

A = area della sezione trasversale dell'asta

L = lunghezza dell'asta

in forma compatta si ha

$$\underline{\delta} = [D]\underline{N} + \underline{\delta}_a$$

$[D]$ = matrice di deformabilità assiale

$\underline{\delta}_a$ = vettore degli allungamenti anelastici delle aste

$\underline{\delta}$ = vettore degli allungamenti totali delle aste

N.B. i vettori di allungamento totale e anelastico sono ordinati secondo la stessa sequenza utilizzata per il vettore degli sforzi normali

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Strategia di soluzione dei sistemi reticolari piani isostatici

4. Equazioni di congruenza

nel sistema si hanno $2n\text{-}v=b$ gradi di libertà nodali non vincolati esternamente. Si considerano positive le componenti di spostamento concordi con gli assi del sistema di riferimento cartesiano fissato inizialmente. Tali componenti di spostamento si ordinano in un vettore colonna $\underline{u}$ secondo la stessa sequenza utilizzata nella definizione del vettore delle forze esterne $\underline{F}$.

$$\underset{[b\times1]}{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_x^A \\ F_y^A \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \underset{[b\times1]}{\underline{u}_f} = \begin{bmatrix} u_x^A \\ u_y^A \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\underset{[f\times1]}{\underline{u}_f} = \underset{[b\times f]}{[C_f]}^{-1} \left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times v]}{[C_v]} \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}} \right)$$

Si calcola, quindi:

$$\underset{[b\times1]}{\underline{u}_f} = \underset{[b\times b]}{[C_f]}^{-1} \left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times v]}{[C_v]} \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}} \right)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831