

# Sistemi reticolari piani



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

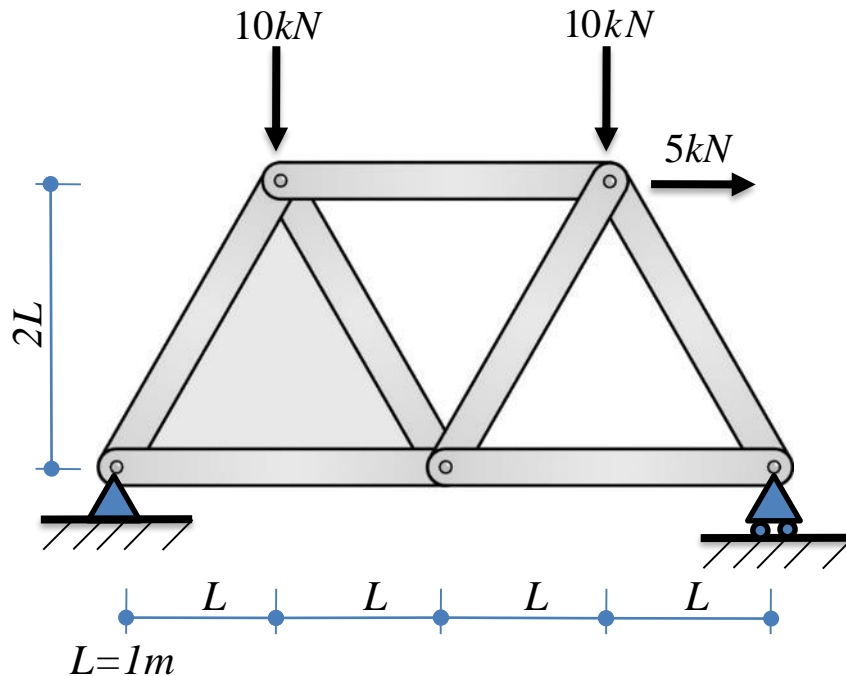


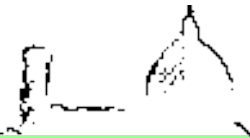
Metodo matriciale applicato a una struttura  
isostatica



## Esempio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

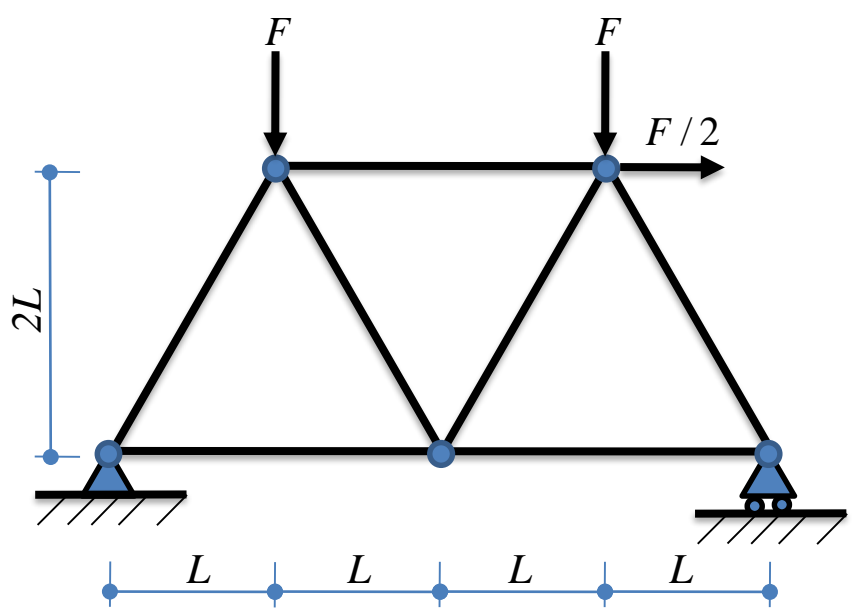
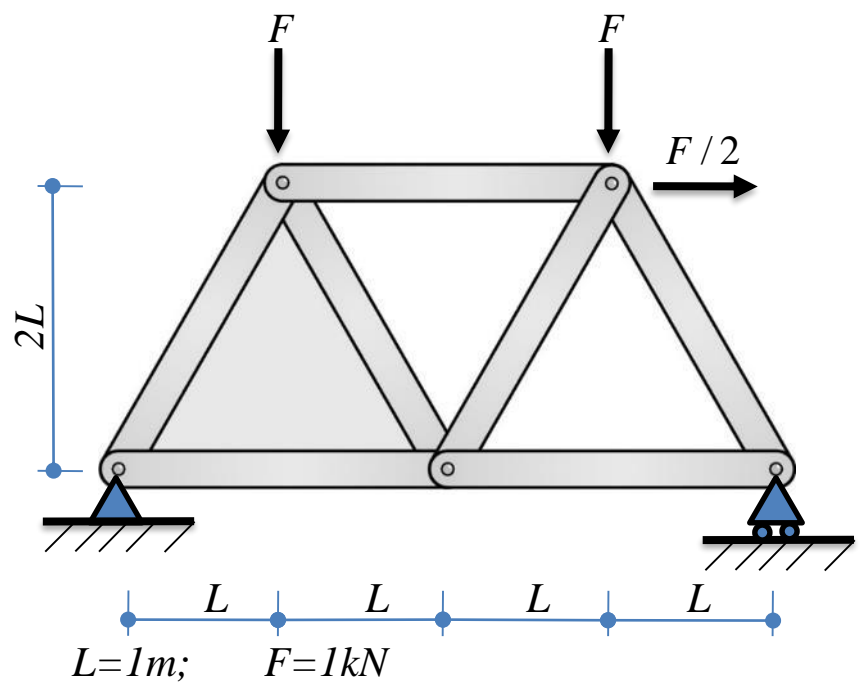


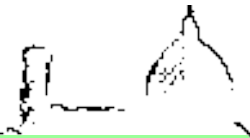


## Esempio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

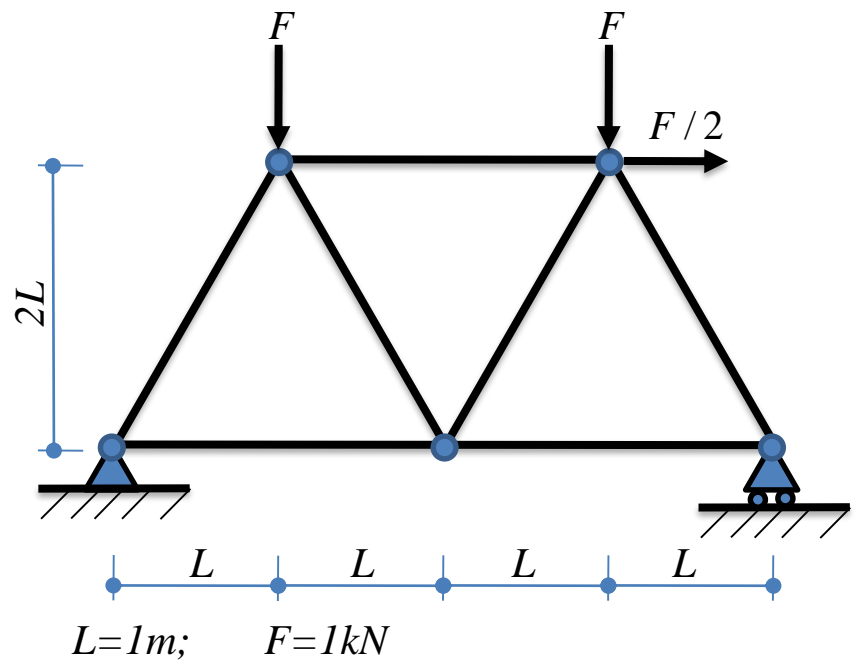
Lo schema strutturale è il seguente





## Esempio – verifica dell'isostaticità del sistema

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale



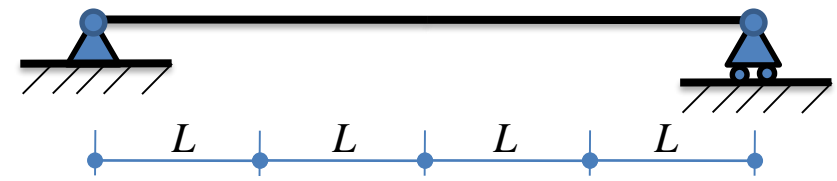
1. Verifica dell'isostaticità del sistema per il sistema in esame si ha

$$n=5; \quad b=7; \quad v=3$$

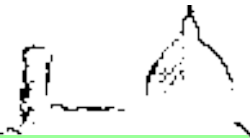
e quindi

$$l-i = 2n-b-v = 10-7-3=0 \rightarrow l=i$$

Il sistema è realizzato affiancando maglie triangolari e quindi è sicuramente internamente isostatico. Il suo comportamento globale è allora equivalente a quello della trave seguente



i vincoli esterni sono chiaramente disposti in modo che il sistema non abbia labilità globali e quindi si ha  $l=0 \rightarrow i=0$ . Il sistema è allora isostatico.

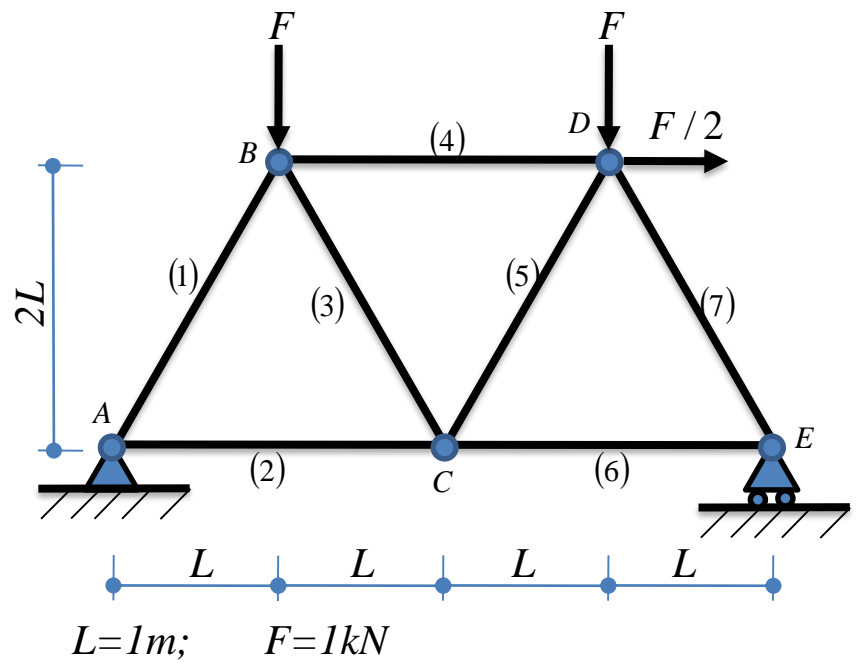


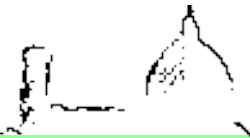
## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

### 2.0 Preliminari

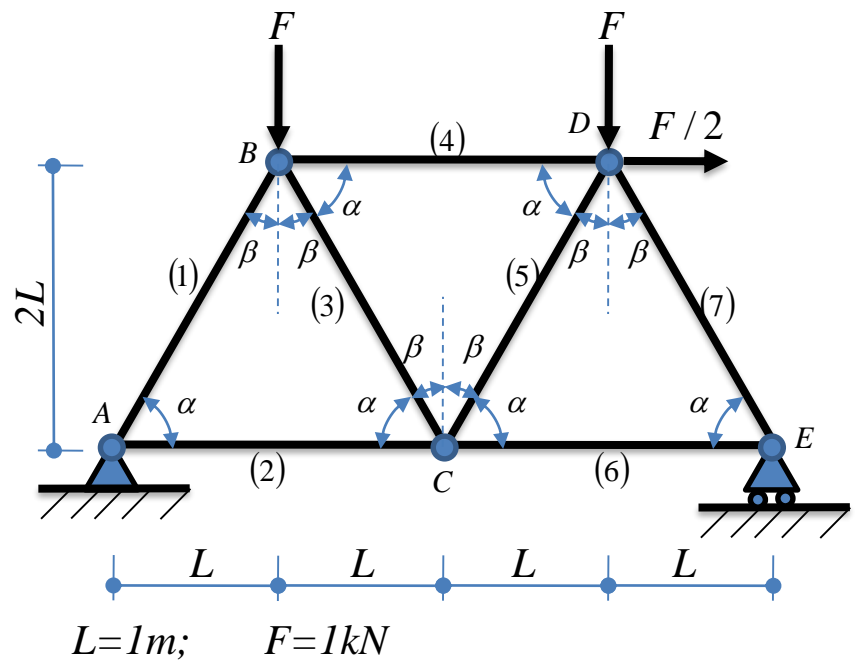
Si numerano le aste ed i nodi della struttura.





## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale



### 2.0 Preliminari

Si numerano le aste ed i nodi della struttura.

Il sistema strutturale è formato da maglie triangolari isosceli. La lunghezza delle aste del sistema è pari a:

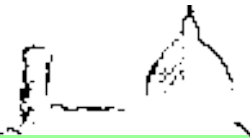
$$L_2 = L_4 = L_6 = 2L$$

$$L_1 = L_3 = L_5 = L_7 = L\sqrt{5}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{5}\sqrt{5} \quad \sin(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

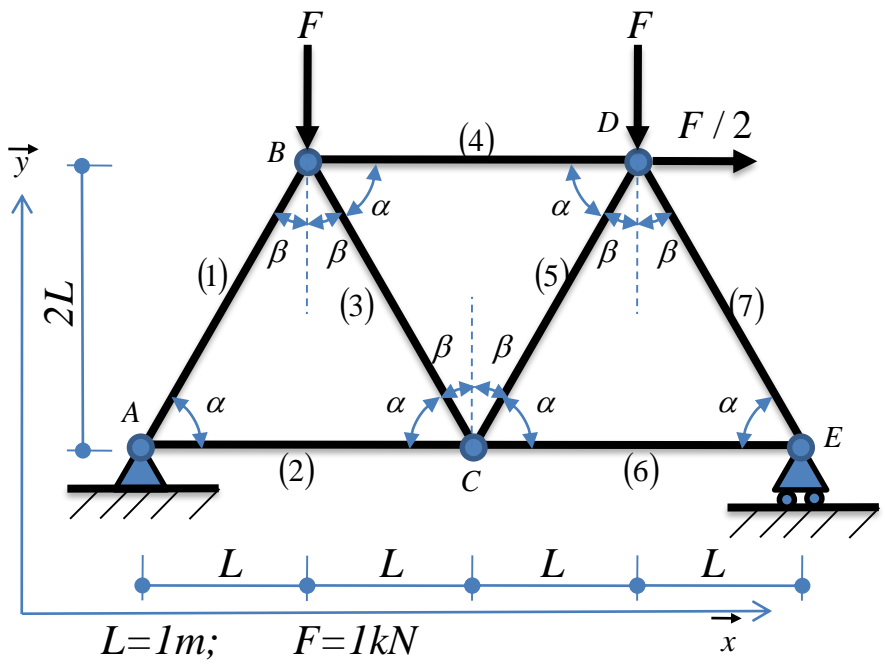
$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cos(\beta) = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\tan(\alpha) = 2 \quad \tan(\beta) = \frac{1}{2}$$



## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale



### 2.0 Preliminari

Si fissa un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e si definiscono i vettori degli sforzi normali e delle forze esterne

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_x^B \\ F_y^B \\ F_x^C \\ F_y^C \\ F_x^D \\ F_y^D \\ F_x^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ F/2 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Nel vettore dei carichi esterni si inseriscono solo le forze duali ai gradi di libertà non vincolati esternamente: per il nodo E non è stata considerata quindi una componente verticale del carico



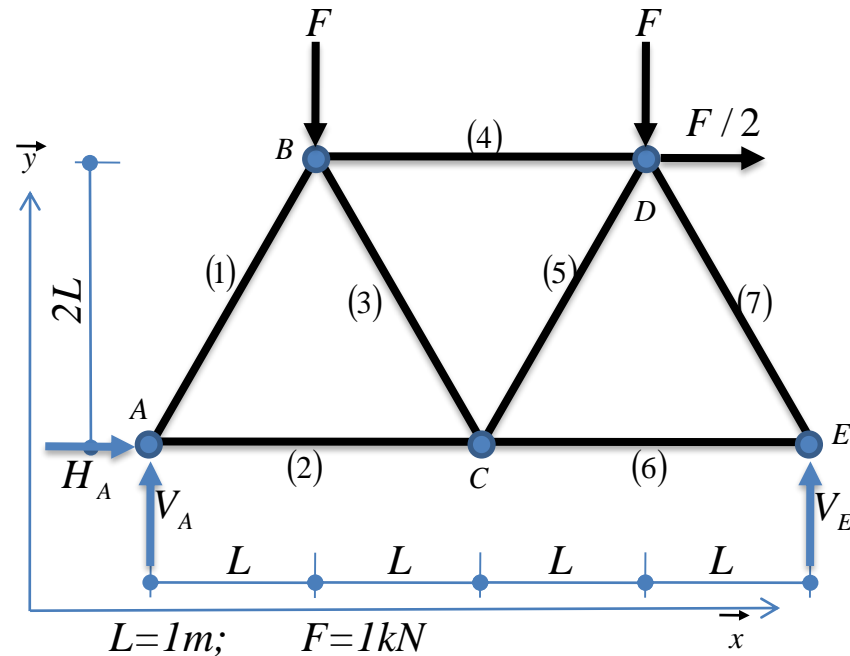
## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

### 2.0 Preliminari

Si definisce il vettore delle reazioni vincolari esterne

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_E \end{bmatrix}$$







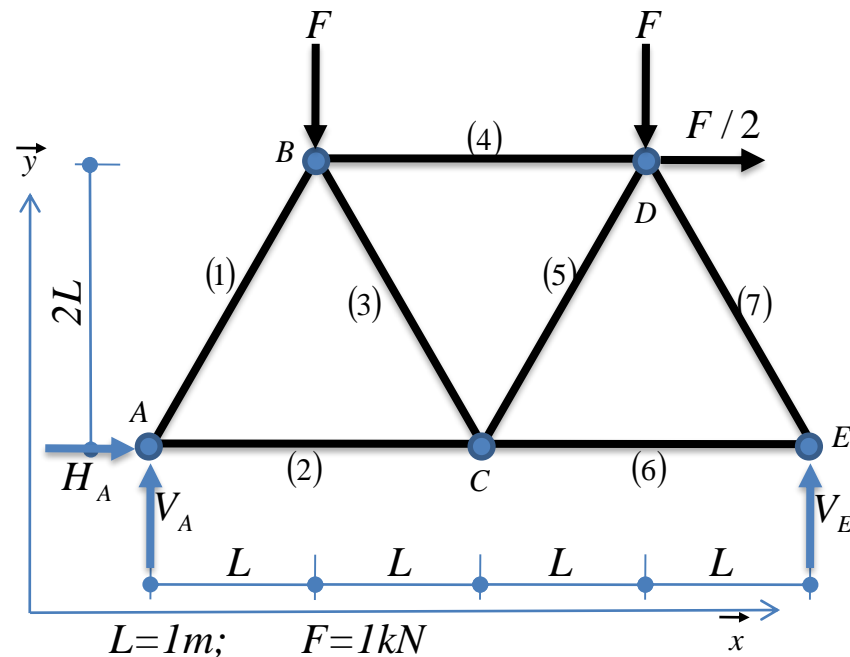
## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

2.1 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni non vincolate esternamente



Si vuole inizialmente determinare lo sforzo normale presente nelle aste. Si suppone che tutte le aste siano tese (tiranti) e si esplicitano le loro azioni sui nodi sui quali si scrivono le equazioni di equilibrio alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente.



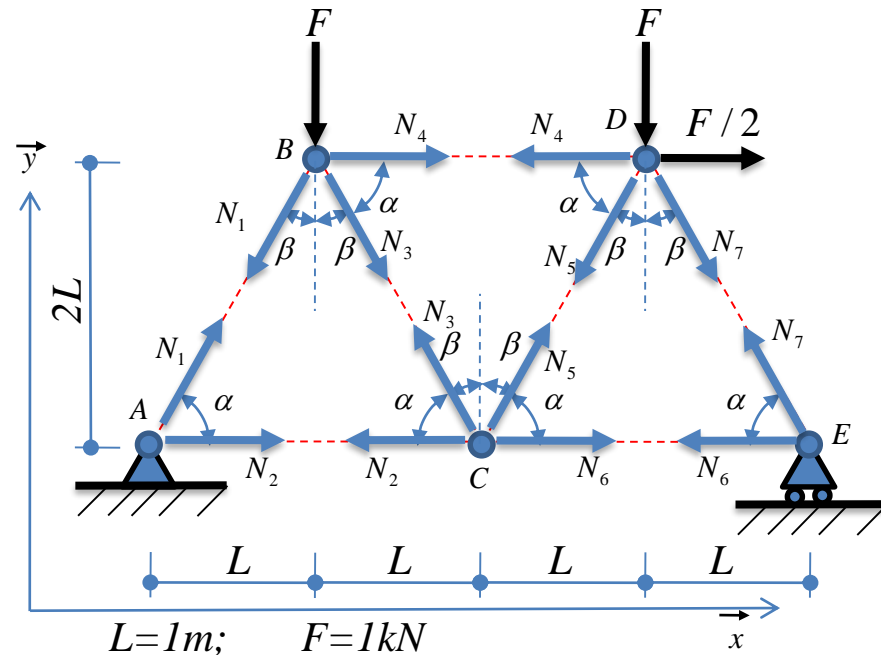


## Esempio – equilibrio

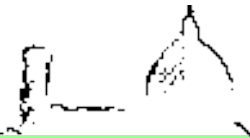
Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

2.1 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni non vincolate esternamente

Si ha il seguente sistema di equazioni



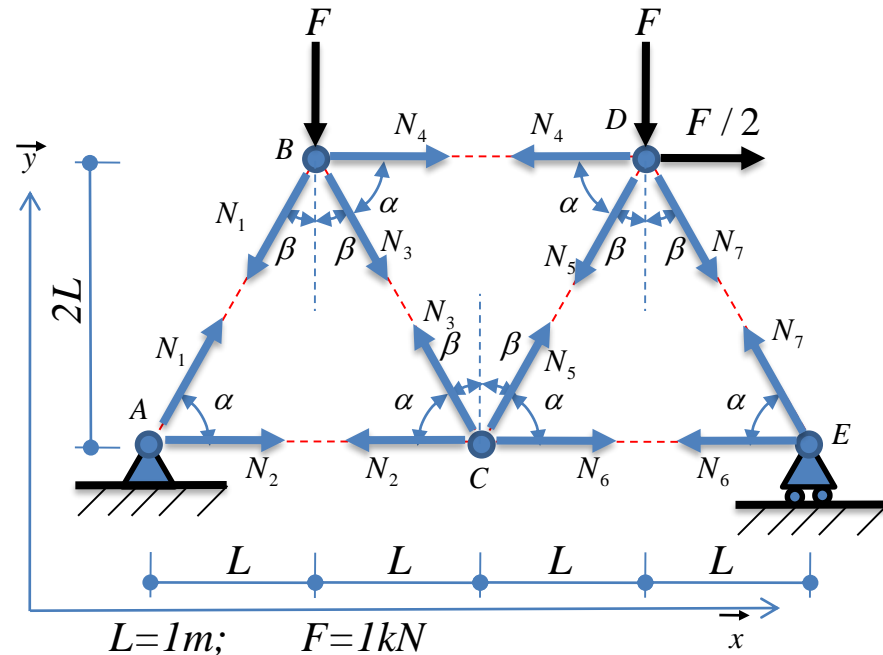
$$\left. \begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\rightarrow -N_1 \sin(\beta) + N_3 \sin(\beta) + N_4 = 0 \\
 \text{nodo B} \\
 \sum F_y = 0 &\rightarrow -N_1 \cos(\beta) - N_3 \cos(\beta) - F = 0 \\
 \text{nodo B} \\
 \sum F_x = 0 &\rightarrow -N_2 - N_3 \sin(\beta) + N_5 \sin(\beta) + N_6 = 0 \\
 \text{nodo C} \\
 \sum F_y = 0 &\rightarrow N_3 \cos(\beta) + N_5 \cos(\beta) = 0 \\
 \text{nodo C} \\
 \sum F_x = 0 &\rightarrow -N_4 - N_5 \sin(\beta) + N_7 \sin(\beta) + F/2 = 0 \\
 \text{nodo D} \\
 \sum F_y = 0 &\rightarrow -N_5 \cos(\beta) - N_7 \cos(\beta) - F = 0 \\
 \text{nodo D} \\
 \sum F_x = 0 &\rightarrow -N_6 - N_7 \cos(\alpha) = 0 \\
 \text{nodo E}
 \end{aligned} \right\}$$



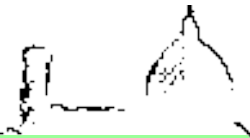
## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

2.1 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni non vincolate esternamente  
 Utilizzando i valori di seno e coseno degli angoli determinati precedentemente



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \rightarrow -N_1 \frac{\sqrt{5}}{5} + N_3 \frac{\sqrt{5}}{5} + N_4 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow -N_1 \frac{2\sqrt{5}}{5} - N_3 \frac{2\sqrt{5}}{5} - F = 0 \\ \sum F_x = 0 \rightarrow -N_2 - N_3 \frac{\sqrt{5}}{5} + N_5 \frac{\sqrt{5}}{5} + N_6 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow N_3 \frac{2\sqrt{5}}{5} + N_5 \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0 \\ \sum F_x = 0 \rightarrow -N_4 - N_5 \frac{\sqrt{5}}{5} + N_7 \frac{\sqrt{5}}{5} + F/2 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow -N_5 \frac{2\sqrt{5}}{5} - N_7 \frac{2\sqrt{5}}{5} - F = 0 \\ \sum F_x = 0 \rightarrow -N_6 - N_7 \frac{\sqrt{5}}{5} = 0 \end{array} \right.$$



## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

2.1 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni non vincolate esternamente

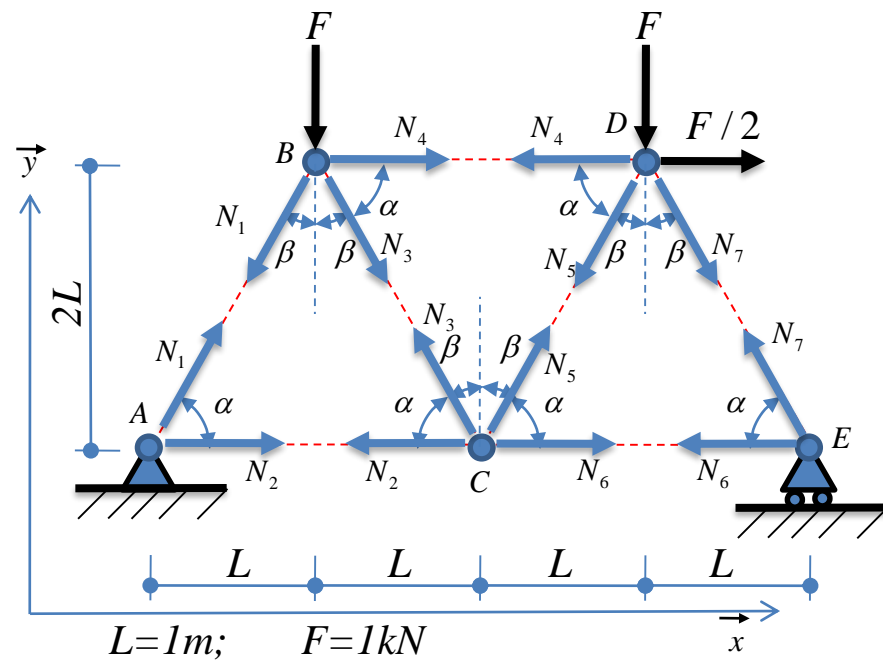


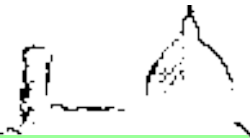
In forma matriciale si ha

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{5}{2\sqrt{5}} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}}{5}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 N_1 \\
 N_2 \\
 N_3 \\
 N_4 \\
 N_5 \\
 N_6 \\
 N_7
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -F \\
 0 \\
 0 \\
 F/2 \\
 -F \\
 0
 \end{bmatrix}$$

che in forma compatta si scrive:

$$[C_f]^T [N] = [F]$$



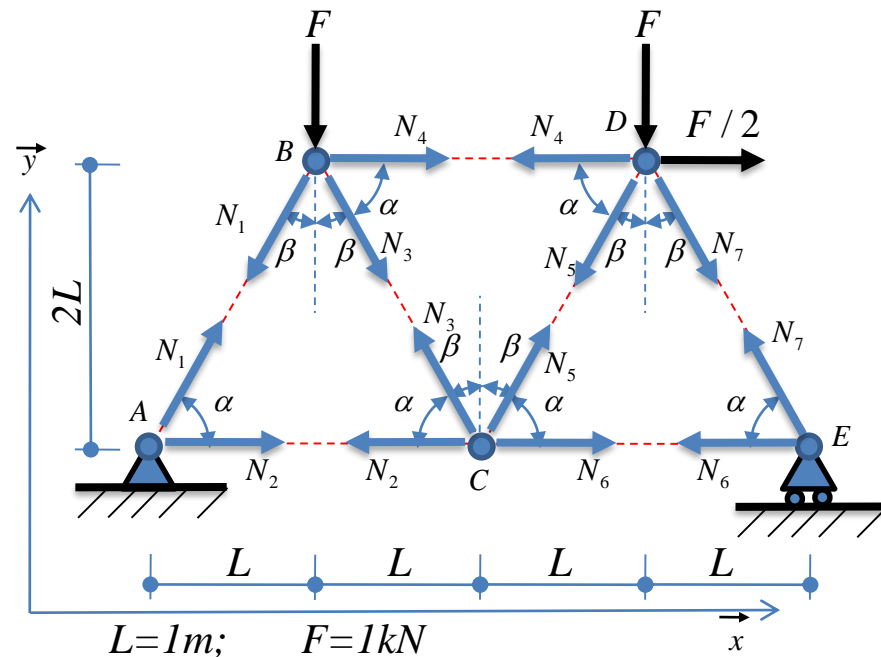


## Esempio – equilibrio

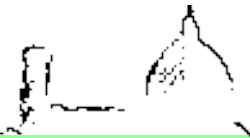
Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

2.1 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni non vincolate esternamente

Visto che **il sistema strutturale è isostatico (esiste l'inversa di  $[C_f]^T$ )**, le precedenti relazioni forniscono univocamente gli sforzi normali nelle aste

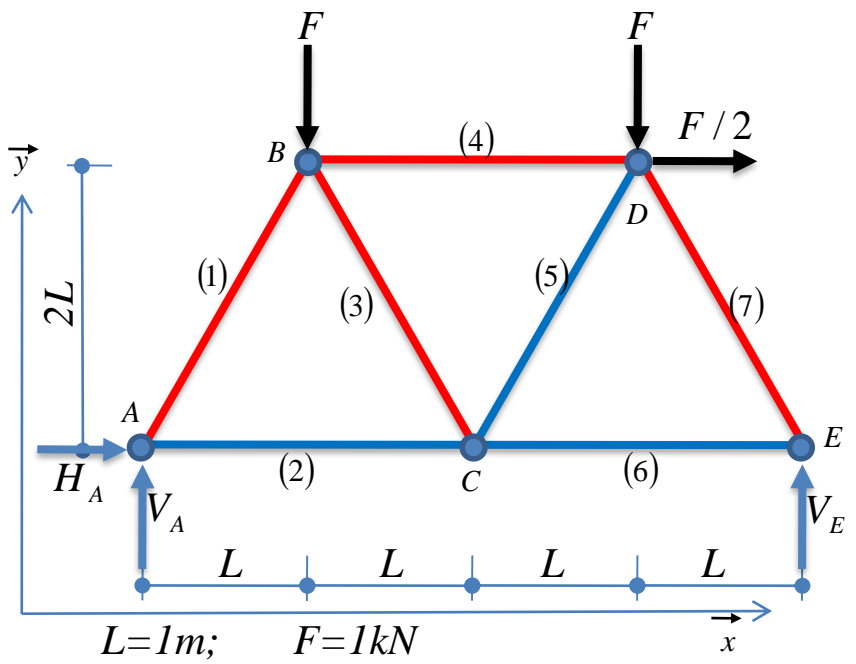


$$\underline{N} = [C_f]^{-T} \underline{F} \rightarrow \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{5}}{8} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{\sqrt{5}}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{5}}{8} \\ \frac{5\sqrt{5}}{8} \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{5}}{8} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{\sqrt{5}}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{5}}{8} \\ \frac{5\sqrt{5}}{8} \end{bmatrix} kN$$



## Esempio – equilibrio

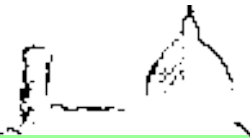
Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale



### 2.1 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni non vincolate esternamente

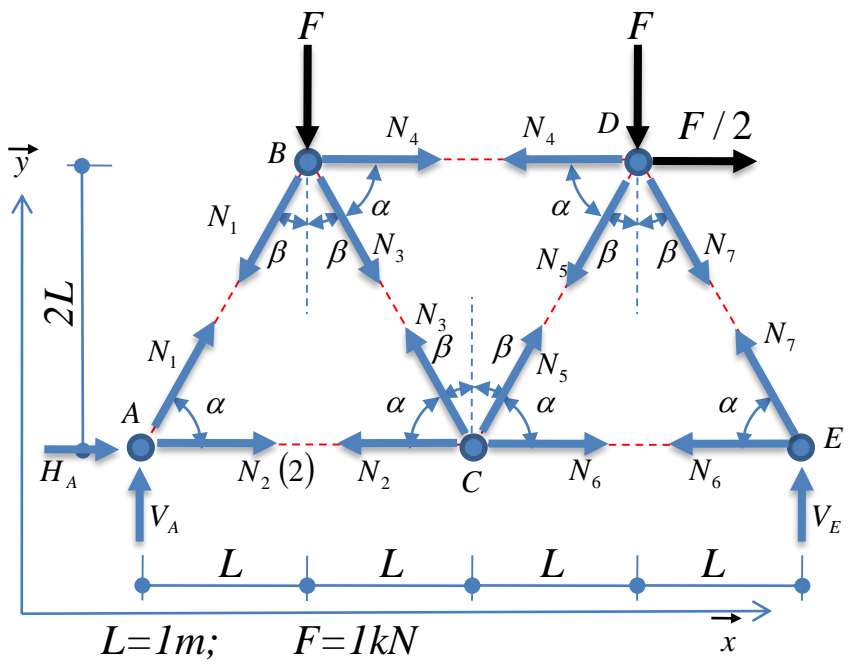
Sinteticamente

Asta	N	Tirante Puntone
(1)	$-\frac{3\sqrt{5}}{8}F$	<b>P</b>
(2)	$\frac{7}{8}F$	T
(3)	$-\frac{\sqrt{5}}{8}F$	<b>P</b>
(4)	$-\frac{1}{4}F$	<b>P</b>
(5)	$\frac{\sqrt{5}}{8}F$	T
(6)	$\frac{5}{8}F$	T
(7)	$-\frac{5\sqrt{5}}{8}F$	<b>P</b>



## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale



### 2.2 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni vincolate esternamente



$$\begin{cases} \sum_{nodo A} F_x = 0 \rightarrow H_A + N_1 \cos(\alpha) + N_2 = 0 \\ \sum_{nodo A} F_y = 0 \rightarrow V_A + N_1 \sin(\alpha) = 0 \\ \sum_{nodo E} F_y = 0 \rightarrow N_7 \sin(\alpha) + V_E = 0 \end{cases}$$

Sostituendo al seno e coseno di  $\alpha$  i valori precedentemente ricavati si ha

$$\begin{cases} \sum_{nodo A} F_x = 0 \rightarrow H_A + N_1 \frac{\sqrt{5}}{5} + N_2 = 0 \\ \sum_{nodo A} F_y = 0 \rightarrow V_A + N_1 \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0 \\ \sum_{nodo E} F_y = 0 \rightarrow N_7 \frac{2\sqrt{5}}{5} + V_E = 0 \end{cases}$$



## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

2.2 Equazioni di equilibrio dei nodi nelle direzioni vincolate esternamente

In forma matriciale il precedente sistema si scrive come segue

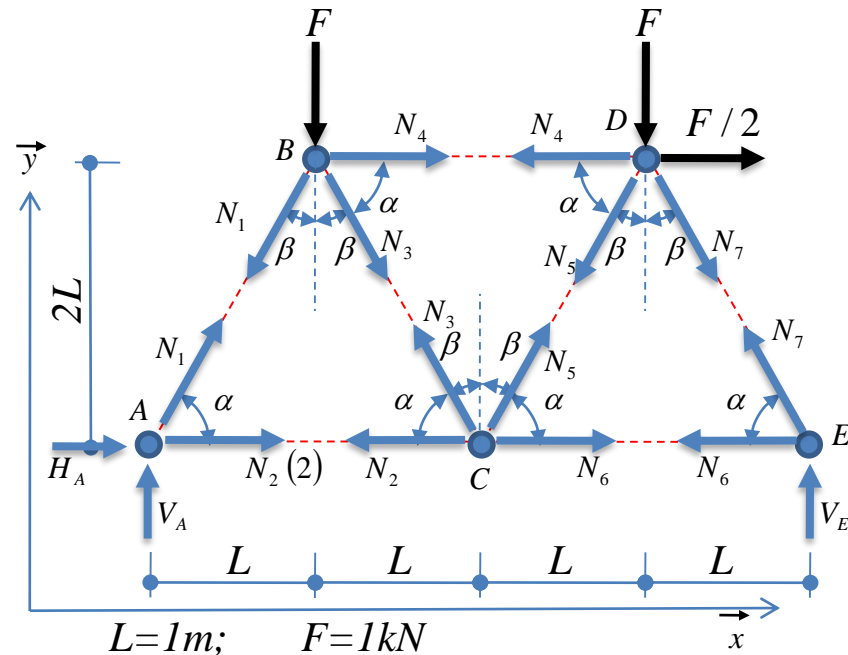
$$\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix}$$

In forma compatta si scrive

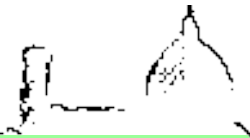
$$\underline{R} = [C_v]^T \underline{N}$$

da cui si ottiene

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} kN$$

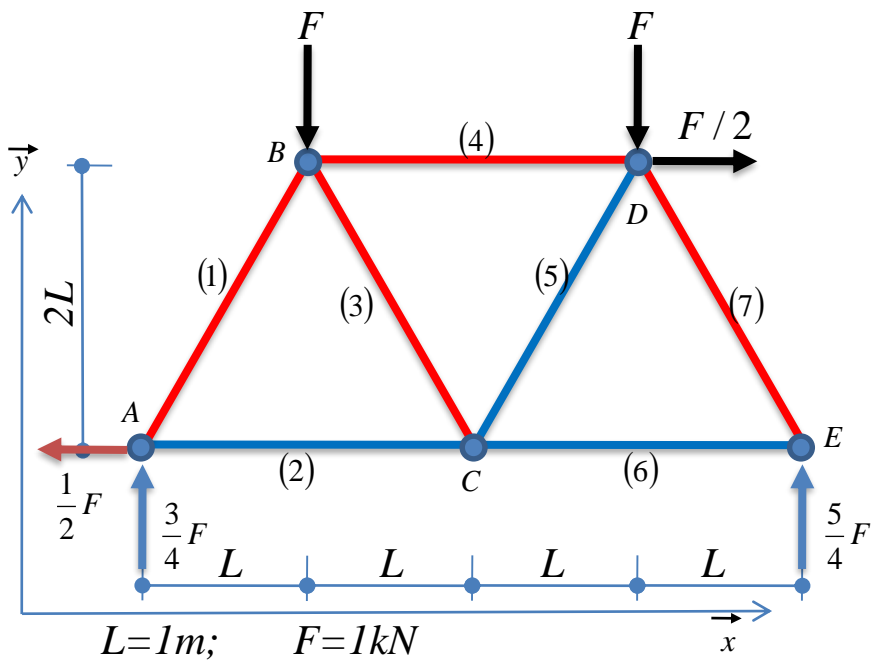






## Esempio – equilibrio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale



### 2.3 Verifica delle equazioni di equilibrio globale



Si disegna un diagramma di corpo libero della struttura indicando i versi corretti delle reazioni vincolari esterne e si verifica l'equilibrio globale

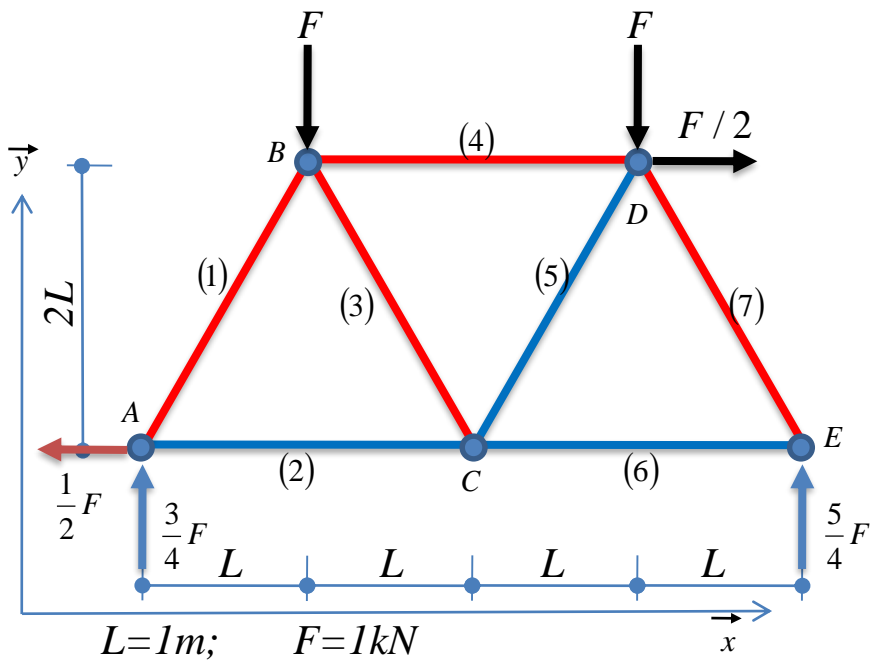
$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow -\frac{F}{2} + \frac{F}{2} = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow \frac{3}{4}F + \frac{5}{4}F - 2F = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 &\rightarrow -FL - F(3L) - \frac{F}{2}2L + \frac{5}{4}F(4L) = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned} \right.$$

Le equazioni di equilibrio globale sono allora identicamente soddisfatte



### Esempio – legami costitutivi

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale



### 3. Legami costitutivi

Si definisce il vettore degli allungamenti assiali in maniera duale al vettore degli sforzi normali

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix}$$

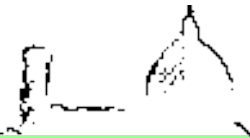
Si calcolano gli allungamenti nelle aste utilizzando la seguente relazione

$$\underline{\delta} = [D]\underline{N} + \underline{\delta}_a$$

dove

$$[D] = \text{matrice di deformabilità assiale} = \text{diag} \left[ \left( \frac{L}{EA} \right)_i \right]$$

$(\delta_a)_i = (\alpha \Delta t L)_i$  per l'esempio in esame non si hanno distorsioni termiche

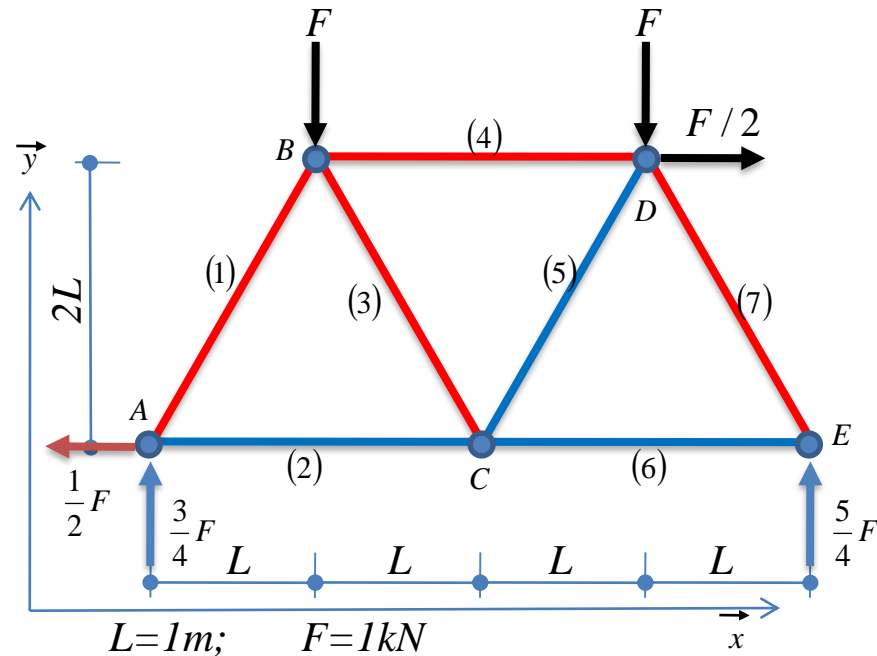


### Esempio – legami costitutivi

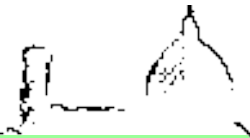
Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

### 3. Legami costitutivi

Tutte le aste della struttura hanno  $E=210GPa$  ed  $A=10mm^2$  per cui dalla precedente relazione si ottiene



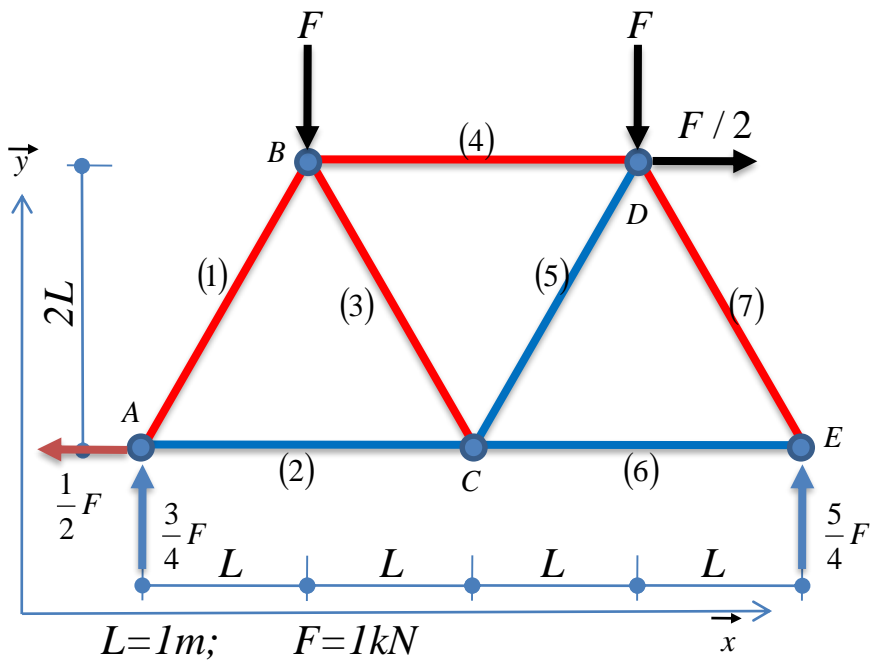
$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -0.893 \\ 0.833 \\ -0.298 \\ -0.238 \\ 0.298 \\ 0.595 \\ -1.488 \end{bmatrix} mm$$



## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

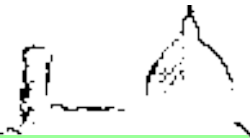
4. Equazioni di congruenza  
 Si definisce il vettore degli spostamenti nodali in maniera duale al vettore delle forze esterne



$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x^B \\ F_y^B \\ F_x^C \\ F_y^C \\ F_x^D \\ F_y^D \\ F_x^E \end{bmatrix} \rightarrow \underline{u}_f = \begin{bmatrix} u_x^B \\ u_y^B \\ u_x^C \\ u_y^C \\ u_x^D \\ u_y^D \\ u_x^E \end{bmatrix}$$

in tal caso, come si vedrà, l'operatore algebrico di congruenza è il trasposto dell'operatore algebrico di equilibrio per cui si potrà scrivere

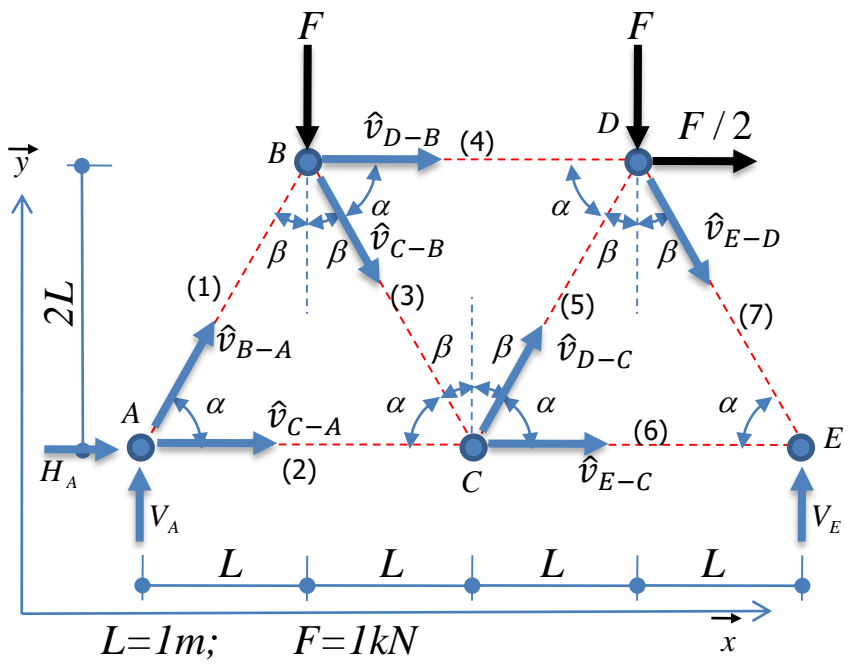
$$\underline{\delta} = [C_f] \underline{u}$$



## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

### 4. Equazioni di congruenza



$$\delta_1 = \hat{v}_{B-A} \cdot (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A)$$

$$\delta_2 = \hat{v}_{C-A} \cdot (\mathbf{u}_C - \mathbf{u}_A)$$

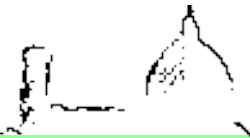
$$\delta_3 = \hat{v}_{C-B} \cdot (\mathbf{u}_C - \mathbf{u}_B)$$

$$\delta_4 = \hat{v}_{D-B} \cdot (\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_B)$$

$$\delta_5 = \hat{v}_{D-C} \cdot (\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_C)$$

$$\delta_6 = \hat{v}_{E-C} \cdot \left( \begin{bmatrix} u_x^E \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{u}_C \right)$$

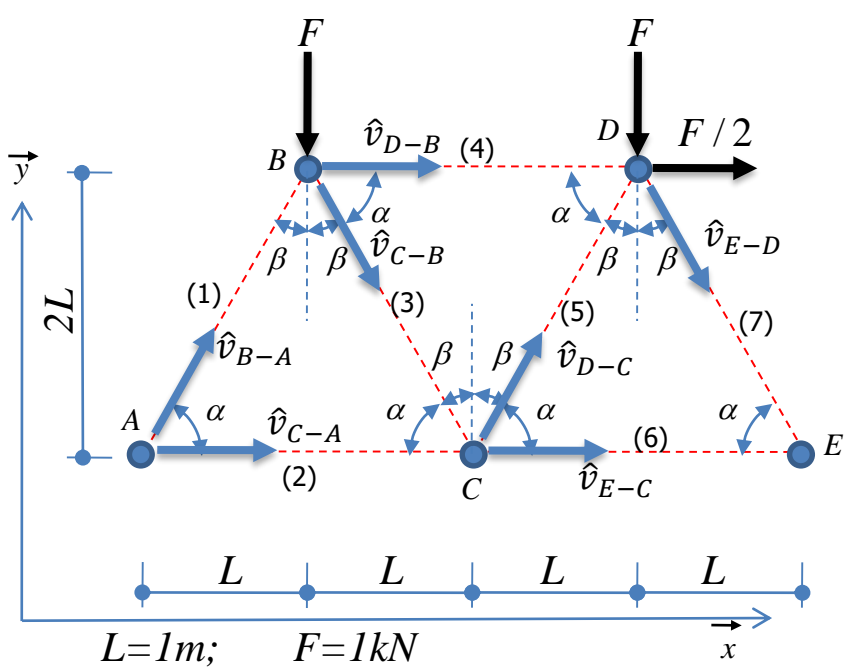
$$\delta_7 = \hat{v}_{E-D} \cdot \left( \begin{bmatrix} u_x^E \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{u}_D \right)$$



## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

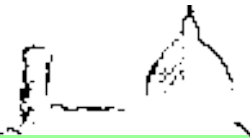
4. Equazioni di congruenza  
 In forma matriciale si ha:



$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^B \\ u_y^B \\ u_x^C \\ u_y^C \\ u_x^D \\ u_y^D \\ u_x^E \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta} = [C_f] \underline{u}_f$$

N.B. L'OPERATORE DI CONGRUENZA E' IL TRASPOSTO DELL'OPERATORE DI EQUILIBRIO



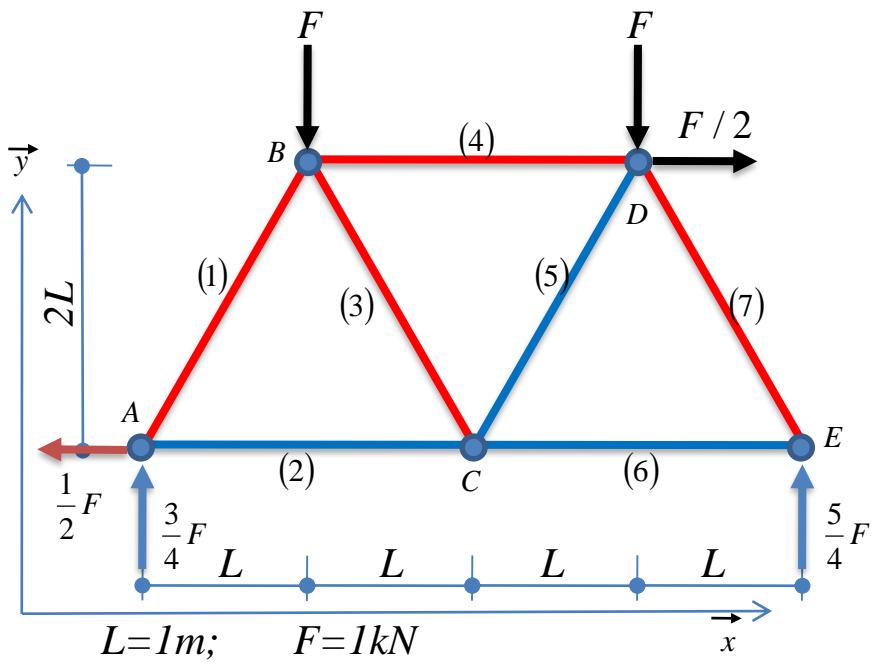
## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

### 4. Equazioni di congruenza

Dalla precedente relazione si ricava

$$\underline{u}_f = [C_f]^{-1} \underline{\delta} \rightarrow \begin{bmatrix} u_x^B \\ u_y^B \\ u_x^C \\ u_y^C \\ u_x^D \\ u_y^D \\ u_x^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.558 \\ -1.777 \\ 0.833 \\ -1.807 \\ 1.320 \\ -1.718 \\ 1.429 \end{bmatrix} mm$$

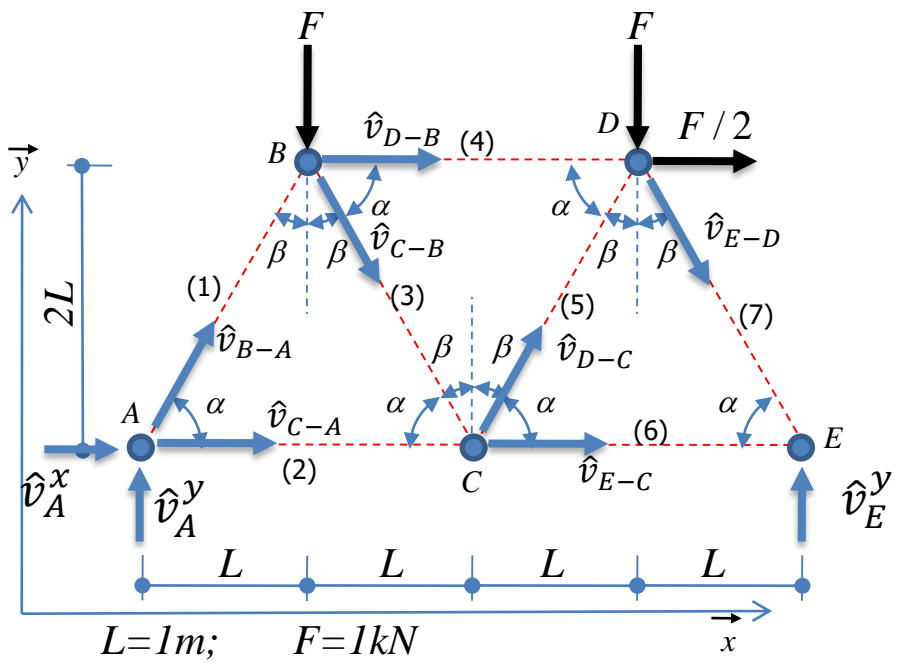




## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

- Equazioni di congruenza
- N.B. il sistema in esame è a vincoli fissi, ossia gli spostamenti permessi dai vincoli esterni sono nulli. Nel caso di sistemi a vincoli cedevoli, si avrebbero le seguenti condizioni di vincolo

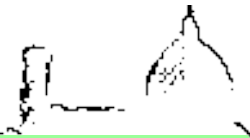


$$\Delta_1 = \hat{v}_A^x \cdot \mathbf{u}_A$$

$$\Delta_2 = \hat{v}_A^y \cdot \mathbf{u}_A$$

$$\Delta_3 = \hat{v}_E^y \cdot \mathbf{u}_E$$

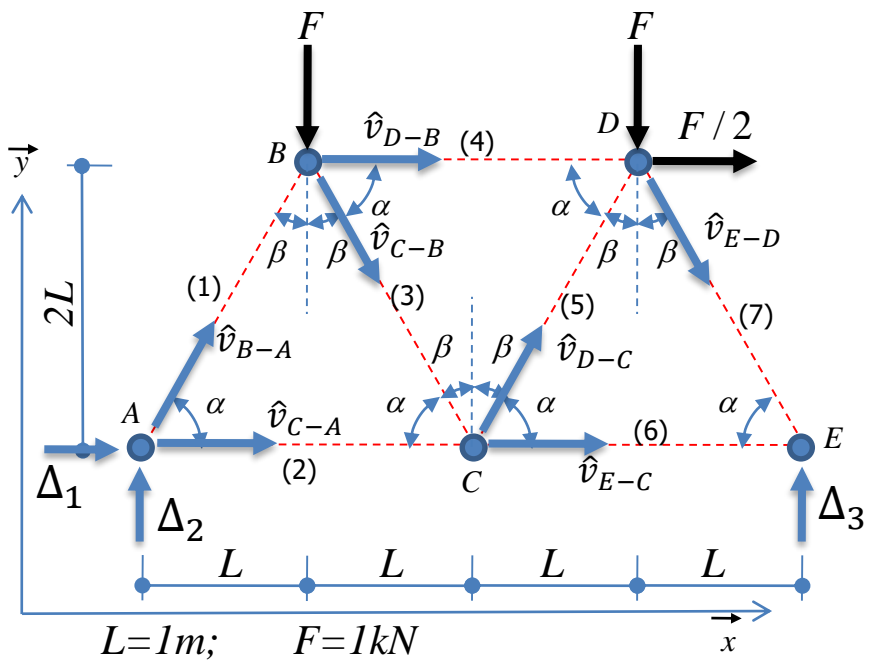




## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

- Equazioni di congruenza  
 ... questi provocherebbero nelle aste degli **incrementi** di allungamento pari a



$$\delta_1 = -\hat{v}_{B-A} \cdot \begin{bmatrix} u_x^A = \Delta_1 \\ u_y^A = \Delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta_2 = -\hat{v}_{C-A} \cdot \begin{bmatrix} u_x^A = \Delta_1 \\ u_y^A = \Delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta_7 = -\hat{v}_{E-D} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u_y^E = \Delta_3 \end{bmatrix}$$



## Esempio – equazioni di congruenza

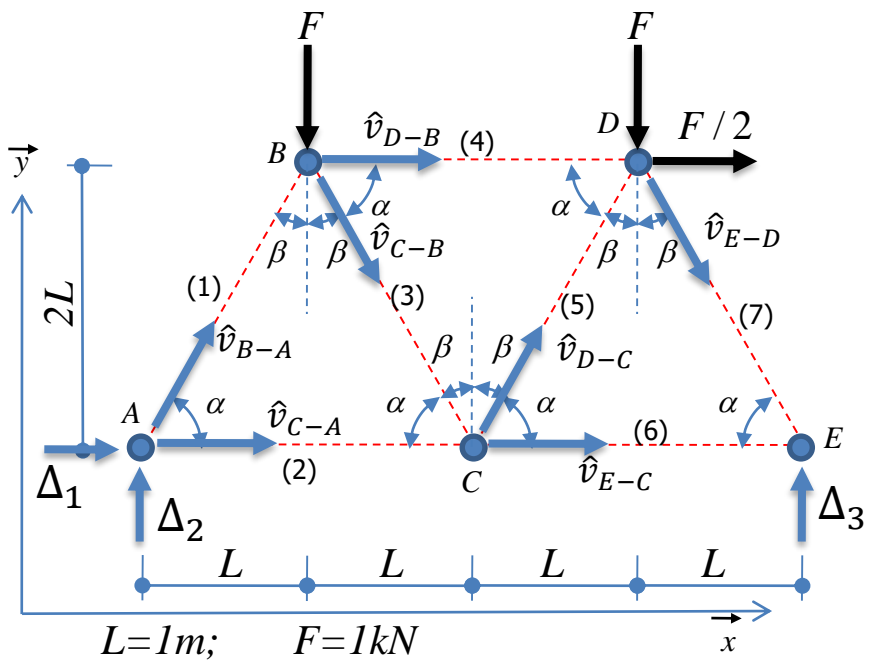
Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

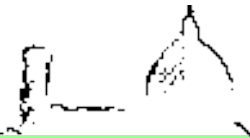
- Equazioni di congruenza ... che si possono esprimere in forma matriciale come segue:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix}$$

Sinteticamente:

$$\underline{\delta} = [C_v] \underline{\Delta}$$





## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

### 4. Equazioni di congruenza

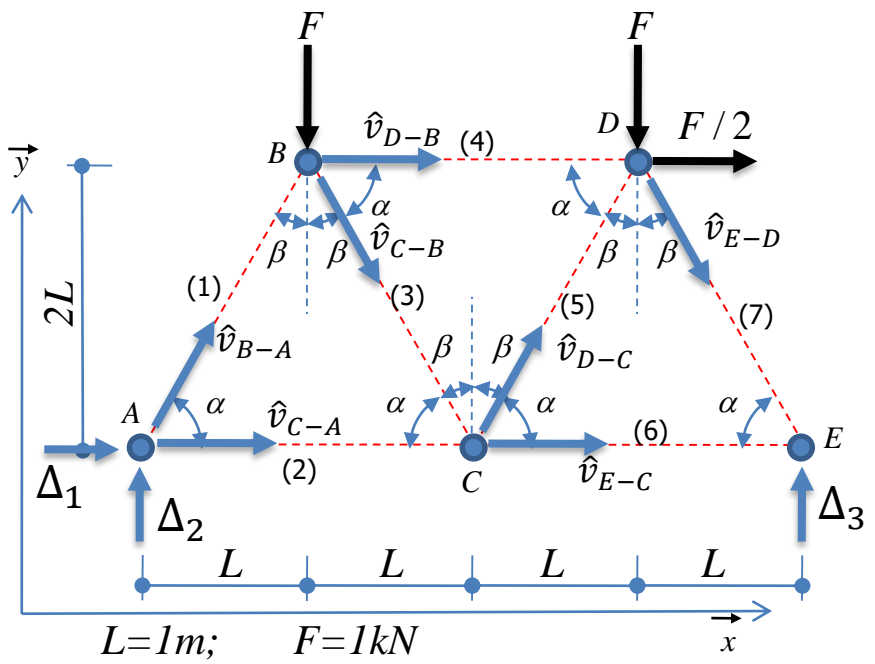
#### OSSERVAZIONE 1:

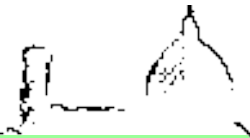
il precedente operatore  $[C_v]$ , che pone in relazione gli (eventuali) cedimenti vincolari esterni con gli (eventuali) incrementi di allungamento

$$\underline{\delta} = [C_v] \underline{\Delta}$$

è il trasposto dell'operatore di equilibrio che definisce la relazione tra gli sforzi normali e le reazioni dei vincoli esterni

$$\underline{R} = [C_v]^T \underline{N}$$





## Esempio – equazioni di congruenza

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi tutte sezione trasversale di area  $A=10mm^2$ . Si risolva il sistema strutturale

### 4. Equazioni di congruenza

#### OSSERVAZIONE 2:

gli allungamenti delle aste sono pari alla somma del contributo dovuto agli spostamenti non vincolati

$$\underline{\delta} = [C_f] \underline{u}_f$$

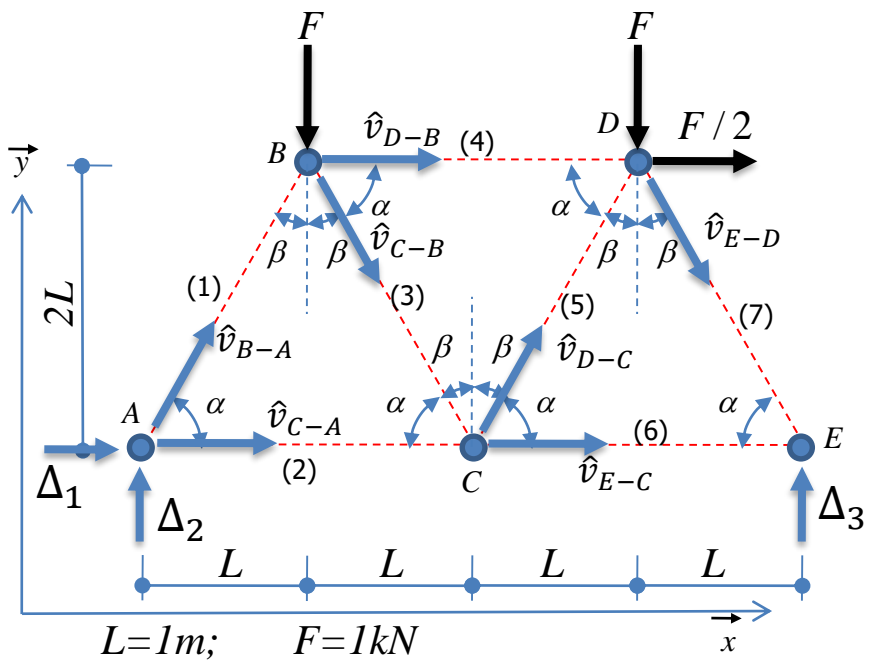
più il contributo (eventuale) dovuto ai cedimenti vincolari

$$\underline{\delta} = [C_v] \underline{\Delta}$$

Pertanto, complessivamente si ha:

$$\underline{\delta} = [C_f] \underline{u}_f + [C_v] \underline{\Delta}$$

**N.B. si ricorda che, in una struttura isostatica, i cedimenti vincolari producono solo moti rigidi**





## Una prima valutazione del livello di sicurezza

Si osservi che nei sistemi reticolari tutte le aste sono sollecitate in modo molto simile a quanto viene fatto in una prova di carico monoassiale. Al fine di valutare il livello di utilizzo del materiale (verifica di sicurezza rispetto alla crisi del materiale) è lecito allora confrontare la tensione normale presente in tutte le aste del sistema reticolare ( $\sigma=N/A$ ) con la tensione massima sopportabile dal materiale (ad esempio per i materiali duttili si considera la tensione di snervamento).

La struttura in esame è costituita da barre in acciaio. Per tale materiale la tensione di snervamento (sia per sollecitazioni di trazione che per sollecitazioni di compressione) è pari a circa  $235MPa$ . Utilizzando le caratteristiche geometriche delle aste del sistema analizzato ed i valori di sollecitazione normale determinati precedentemente è possibile valutare la tensione normale in tutte le aste effettuando semplicemente il rapporto fra lo sforzo normale e l'area della sezione trasversale.



## Una prima valutazione del livello di sicurezza

Asta	N	Tirante Puntone	Area [mm <sup>2</sup> ]	Tensione normale $\sigma=N/A$ [MPa]	Tensione di snervamento $\sigma_y$ [MPa]	$s=\sigma_y/\sigma$
(1)	-839N	<b>P</b>	10	-83.9	±235	2.8
(2)	875N	T	10	87.5	±235	2.7
(3)	-280N	<b>P</b>	10	-28.0	±235	8.4
(4)	-250N	<b>P</b>	10	-25.0	±235	9.4
(5)	280N	T	10	28.0	±235	8.4
(6)	625N	T	10	62.5	±235	3.8
(7)	-1398	<b>P</b>	10	-139.8	±235	1.7

Il rapporto  $s=\sigma_y/\sigma$  (coefficiente di sicurezza) rappresenta una misura della "distanza" fra la tensione normale presente nell'elemento analizzato e quella limite di snervamento.

SI OSSERVI CHE LA MODALITA' DI VERIFICA SOPRA RIPORTATA E' PURAMENTE INDICATIVA: NELLE VERIFICHE CONDOTTE CON IL METODO DEGLI STATI LIMITE, LA NORMA PREVEDE L'APPLICAZIONE DI OPPORTUNI COEFFICIENTI AMPLIFICATIVI PER LE AZIONI E RIDUTIVI PER LE RESISTENZE. LA TRATTAZIONE DETTAGLIATA DI TALE MODALITA' DI VERIFICA ESULA DAGLI SCOPI DEL PRESENTE CORSO.



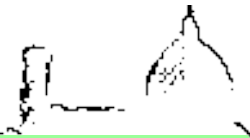
## Una prima valutazione del livello di sicurezza



La precedente stima del livello di sicurezza non tiene conto del segno della sollecitazione (trazione o compressione) ma solo dei valori di resistenza dei materiali. Come si vedrà meglio nella parte finale del corso, per sollecitazioni di compressione sono possibili crisi degli elementi strutturali non dovuti al raggiungimento della resistenza limite del materiale, ma legati alle caratteristiche geometriche dell'elemento strutturale analizzato (crisi per instabilità dell'equilibrio). Per tale motivo è importante individuare i puntoni presenti nei sistemi reticolari.

Figura tratta da M. Salvadori, R. Heller. "Structure in architecture"



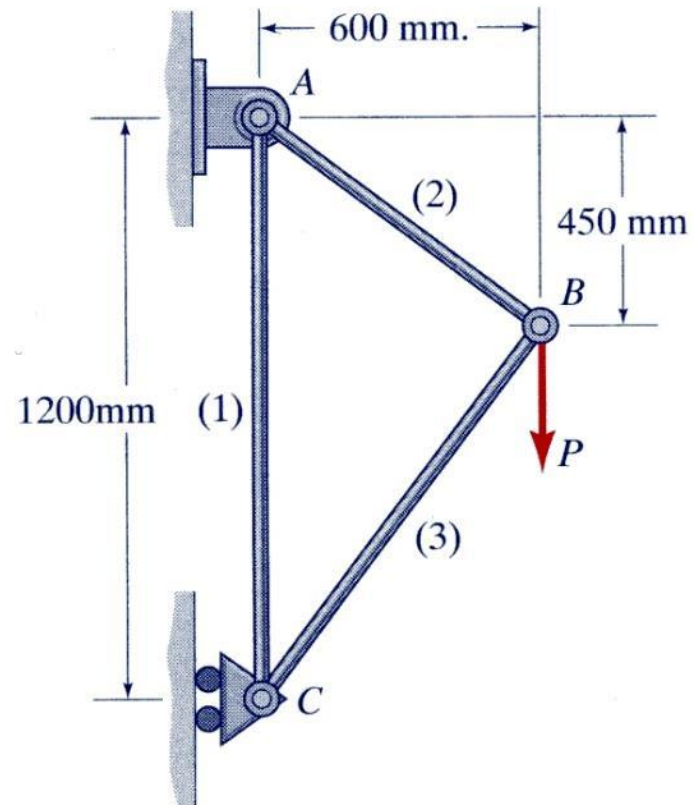


## Esercizio proposto

Il sistema reticolare in figura è realizzato mediante tre aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi sezione trasversale circolare di diametro rispettivamente pari a

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_2 = 40mm \\ \phi_3 &= 60mm\end{aligned}$$

Seguendo la metodologia di soluzione indicata nella sessione teorica della presente lezione si risolve il sistema reticolare piano schematizzato in figura



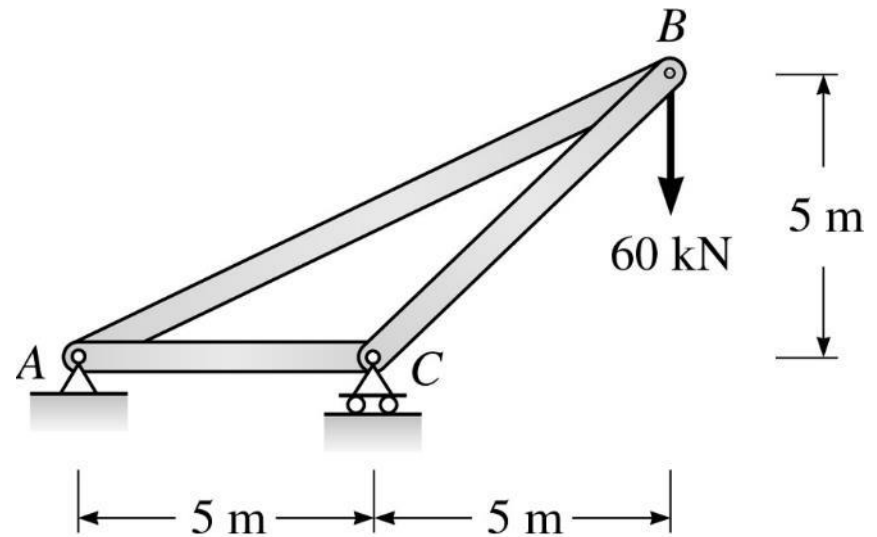




## Esercizio proposto

Il sistema reticolare in figura è realizzato mediante tre aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi sezione trasversale rettangolare di dimensioni  $30 \times 80 mm$

Seguendo la metodologia di soluzione indicata nella sessione teorica della presente lezione si risolve il sistema reticolare piano schematizzato in figura





## Esercizio proposto

Il sistema reticolare in figura è realizzato mediante quattro aste in acciaio ( $E=210GPa$ ) aventi sezione trasversale circolare di diametro rispettivamente pari a

$$\begin{aligned}\phi_1 = \phi_4 &= 40mm \\ \phi_2 = \phi_3 &= 80mm\end{aligned}$$

Seguendo la metodologia di soluzione indicata nella sessione teorica della presente lezione si risolve il sistema reticolare piano schematizzato in figura

