$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{\log_2(x^2-1)}$;

2. $f(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{3x-1}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

1. Abbiamo:

$$I.E.(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \log_2(x^2-1) \geq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} x^2-1 \geq 1 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2-1 \geq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \geq 2 \right\} =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[;$$

2. abbiamo:

$$I.E.(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ 3x-1 \neq 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{3} \end{cases} \right\}$$

$$= \left[0, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, 1\right].$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni e riconoscere eventuali simmetrie del grafico al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $f_\alpha(x) = 2\,|x|^{\left(3x^2+\alpha\right)}$;

2. $f_\alpha(x) = \dfrac{\sinh \alpha x}{x}$;

3. $f_\alpha(x) = \dfrac{2\alpha \sin 2x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |\cos 2x|}}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

1. Essendo $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$I.E.(f_\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[;$$

osserviamo che:

$$f_\alpha(-x) = 2\,|-x|^{\left(3(-x)^2+\alpha\right)} = 2\,|x|^{\left(3x^2+\alpha\right)} = f_\alpha(x)$$

pertanto f_α è pari per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;

2. abbiamo:

$$I.E.(f_\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\};$$

inoltre:

$$f_\alpha(-x) = \frac{\sinh(-\alpha x)}{-x} = \frac{e^{-\alpha x} - e^{\alpha x}}{2(-x)} = f_\alpha(x)$$

pertanto f è pari per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;

3. abbiamo:

$$I.E.(f_\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |\cos 2x|} \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} |\cos 2x| \geq 0 \\ |\cos 2x| > 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} |\cos 2x| \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} |\cos 2x| \geq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} |\cos 2x| > 0 \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} |\cos 2x| < 1 \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \cos 2x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 1 \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} 2x \neq \pi + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ x \neq k\frac{\pi}{4} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\} \right\};$$

osserviamo che:

$$f_\alpha(-x) = \frac{2\alpha \sin 2\,(-x)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |\cos 2\,(-x)|}} = \frac{-2\alpha \sin x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |\cos 2x|}} = -f_\alpha(x)$$

pertanto f_α è dispari per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; inoltre risulta:

$$f_\alpha(x+\pi) = \frac{2\alpha \sin 2\,(x+\pi)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |\cos 2\,(x+\pi)|}} = \frac{2\alpha \sin (2x+2\pi)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |\cos (2x+2\pi)|}} = f_\alpha(x)$$

in particolare f_α è periodica ed essendo 2π il periodo di seno e coseno f_α ha periodo π.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni e riconoscere eventuali simmetrie del grafico:

1. $f(x) = \dfrac{\log_3(x^2-1)}{\sqrt{3^{x^2}}}$;
2. $f(x) = \dfrac{2 \sin x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |x^3|}}$.

SOLUZIONE

1. Essendo $3^{x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$I.E.(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;

osserviamo che:

$$f(-x) = \frac{\log_3((-x)^2 - 1)}{\sqrt{3^{(-x)^2}}} = \frac{\log_3(x^2 - 1)}{\sqrt{3^{x^2}}} = f(x)$$

pertanto f è pari;

2. abbiamo:

$$I.E.(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |x^3|} \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} \left|x^3\right| \geq 0 \\ \left|x^3\right| > 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} \left|x^3\right| \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} \left|x^3\right| \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} \left|x^3\right| > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \left|x^3\right| < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \right\} =]-1, 0[\cup]0, 1[;$$

osserviamo che:

$$f(-x) = \frac{2\sin(-x)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left|(-x)^3\right|}} = \frac{-2\sin x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |-x^3|}} = -\frac{2\sin x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |x^3|}} = -f(x)$$

pertanto f è dispari.

ESERCIZIO 4

Determinare l'insieme di esistenza e l'immagine delle seguenti funzioni, discuterne inoltre l'invertibilità e, in caso esista, determinarne la funzione inversa:

1. $f(x) = 3^{(2x-1)}$;
2. $f(x) = 3\log_3(3x - 1)$;
3. $f(x) = 2x^2 - 2x$.

SOLUZIONE

1. $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre, essendo $3^{(2x-1)} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$, in particolare f è illimitata superiormente e limitata inferiormente, non ammette massimo assoluto e neppure minimo assoluo; per quello che riguarda l'invertibilità osserviamo che, posto:

$$y = 3^{(2x-1)}$$

si ricava:

$$2x-1=\log_3 y, \text{ ossia } x=\frac{(\log_3 y)+1}{2}$$

quindi $f:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ è invertibile e l'inversa è la funzione $f^{-1}:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definita da:

$$f^{-1}(x)=\frac{(\log_3 x)+1}{2};$$

2. $f(x)$ è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$ tale che $3x-1>0$ ossia $x>\frac{1}{3}$ inoltre, dalle proprietà del logaritmo naturale si ha che $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$; per quello che riguarda l'invertibilità osserviamo che, posto:

$$y=3\log_3(3x-1)$$

si ricava:

$$\frac{y}{3}=\log_3(3x-1)\,, \text{ ossia } 3x-1=3^{\frac{y}{3}}, \text{ da cui } x=\frac{3^{\frac{y}{3}}+1}{3}$$

quindi f è invertibile e l'inversa è la funzione $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da:

$$f^{-1}(x)=\frac{3^{\frac{x}{3}}+1}{3};$$

si osservi che $I.E.(f^{-1})=\mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f^{-1}=I.E.(f)=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$;

3. $f(x)$ è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$ inoltre, posto $y=2x^2-2x$ si ha che l'equazione nell'indeterminata $x\in\mathbb{R}$:

$$2x^2-2x-y=0$$

ammette soluzioni se e solo se

$$\frac{\Delta}{4}=1+2y\geq 0, \text{ ossia se e solo se } y\geq-\frac{1}{2}$$

in particolare si ottiene che $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$; per quello che riguarda l'invertibilità osserviamo che f non è iniettiva e quindi non invertibile.

ESERCIZIO 5

Siano $f(x)=2^x-1$ e $g(x)=\sqrt{x^2-2}$; calcolare $f\circ g$ e $g\circ f$ determinandone gli insiemi di esistenza e le loro immagini.

SOLUZIONE

Abbiamo:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x^2-2}\right)=2^{\sqrt{x^2-2}}-1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x - 1) = \sqrt{(2^x-1)^2 - 2};$$

per quello che riguarda gli insiemi di esistenza risulta:

$I.E.(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 2 \geq 0 \right\} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[;$

$I.E.(g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (2^x-1)^2 - 2 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (2^x-1)^2 \geq 2 \right\}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (2^x - 1) \leq -\sqrt{2} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (2^x - 1) \geq \sqrt{2} \right\}$

$= \emptyset \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2^x \geq \sqrt{2} + 1 \right\}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \log_2\left(\sqrt{2}+1\right) \right\};$

per quello che riguarda le immagini si verifica subito che:

$\mathrm{Im}(f \circ g) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \};$

$\mathrm{Im}(g \circ f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}.$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 6}}$

Scrivere la seguente funzione come funzione definita a tratti e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{|x| + |x-3|}{2} - |2x - 1|.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Dalla definizione di valore assoluto si ha:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{per} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{per} \quad x < 3 \end{cases}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{per} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{per} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi otteniamo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x+3}{2} + (2x-1) & \text{per} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{3}{2} + (2x-1) & \text{per} \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} - (2x-1) & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 3 \\ \dfrac{2x-3}{2} - (2x-1) & \text{per} \quad x > 3 \end{cases}$$

ossia:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x \leq 0 \\ 2x + \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ -2x + \dfrac{5}{2} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 3 \\ -x - \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x > 3 \end{cases}$$

il grafico è il seguente:

ESERCIZIO 7

Sia f la funzione definita nell'esercizio 9. disegnare i grafici dele seguenti funzioni:

1. $y = f(-x)$;
2. $y = -f(x)$;
3. $y = f(|x|)$;
4. $y = |f(x)|$;
5. $y = f(x+1)$;
6. $y = f(x) + 3$.

SOLUZIONE

Si ha:

1. $$f(-x) = \begin{cases} -x + \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x \leq 0 \\ -2x + \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2x + \dfrac{5}{2} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 3 \\ x - \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x > 3 \end{cases}$$

2. $$-f(x) = \begin{cases} -x - \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x \leq 0 \\ -2x - \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2x - \dfrac{5}{2} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 3 \\ x + \dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x > 3 \end{cases}$$

3. $f(|x|) = \begin{cases} -x+\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x \le 0 \\ 2x+\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ -2x+\dfrac{5}{2} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 3 \\ -x-\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x > 3 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} -x-\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x < -\dfrac{1}{2} \\ x+\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 0 \\ 2x+\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ -2x+\dfrac{5}{2} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{5}{4} \\ 2x-\dfrac{5}{2} & \text{per} \quad \dfrac{5}{4} < x \le 3 \\ x+\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x > 3 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x+\dfrac{3}{2} & \text{per} \quad x \le -1 \\ 2x+\dfrac{5}{2} & \text{per} \quad -1 < x \le -\dfrac{1}{2} \\ -2x+\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad -\dfrac{1}{2} < x \le 2 \\ -x-\dfrac{3}{2} & \text{per} \quad x > 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} x+\dfrac{7}{2} & \text{per} \quad x \le 0 \\ 2x+\dfrac{7}{2} & \text{per} \quad 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ -2x+\dfrac{11}{2} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 3 \\ -x+\dfrac{5}{2} & \text{per} \quad x > 3 \end{cases}$