Meccanica del continuo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Analisi dello stato tensionale

Sommario

- saranno definite le componenti di tensione normale e tangenziale presenti in un punto materiale
- sarà introdotto il tensore delle tensioni di Cauchy come misura dello stato tensionale presente in un punto materiale

Augustin Louis Cauchy

- nato a Parigi il 21 agosto 1789
- morì a Sceaux, Seine, il 23 maggio del 1857
- si formò all'*École des Ponts et Chaussées*
- esercitò la professione di ingegnere fino al 1823
- successivamente, su insistenza di Lagrange e Laplace rivolse ogni sua attività alla ricerca scientifica nel campo della matematica e della fisica

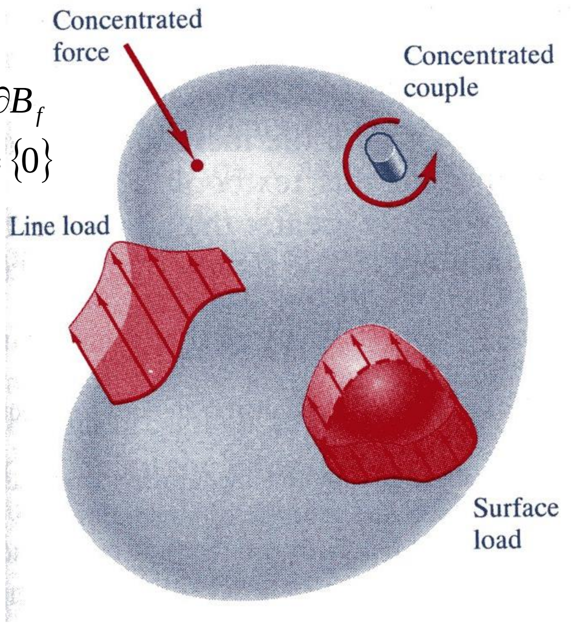
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il solido di Cauchy

B

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_f$$

$$\partial B_u \cap \partial B_f = \{0\}$$



Si consideri un solido tridimensionale di forma qualsiasi, caricato da un sistema di forze. Si ipotizzi che il sistema sia in equilibrio. Il solido in esame può essere assimilato ad un qualsiasi elemento strutturale (trave, colonna, piastra, …). Ai fini di una trattazione più generale si considera un solido della forma schematizzata in figura.

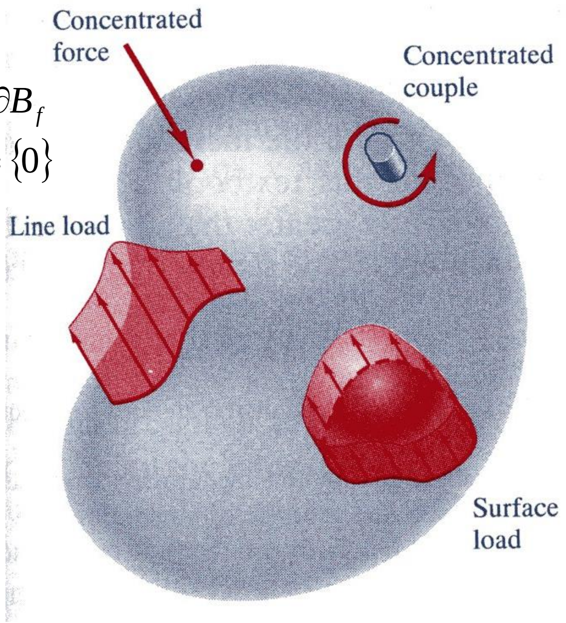
Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"

Il solido di Cauchy

B

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_f$$

$$\partial B_u \cap \partial B_f = \{0\}$$



Nel modello del *solido di Cauchy* si ipotizza che ai punti materiali del continuo non siano applicate né forze concentrate, né coppie concentrate.

Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"

Il solido di Cauchy

B

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_f$$

$$\partial B_u \cap \partial B_f = \{0\}$$

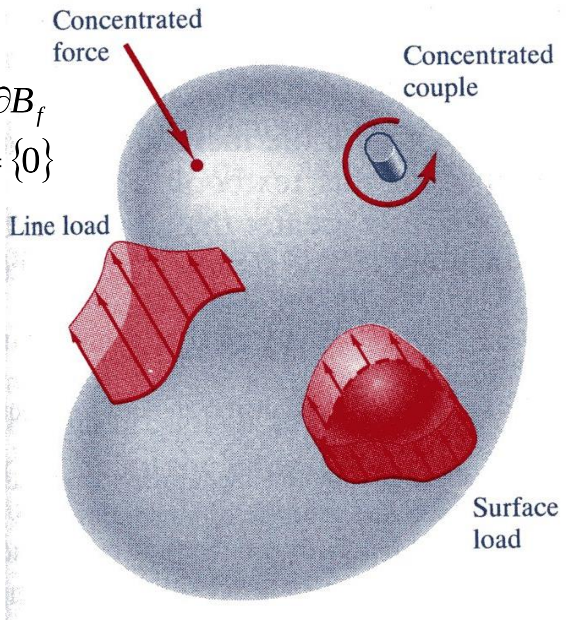


Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"

Si ipotizzi che in corrispondenza del generico punto materiale del solido (*di Cauchy)* siano applicati al più forze dei seguenti tipi:

- forze di volume [F/L^3] (azioni a distanza, es. forza di gravità, azioni elettromagnetiche, forze d'inerzia) in corrispondenza dei punti interni del solido

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_b}{\Delta V} \qquad \forall \mathbf{x} \in B$$

- forze di superficie [F/L^2] (azioni di contatto)

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_p}{\Delta A} \qquad \forall \mathbf{x} \in \partial B_f$$

N.B. si assume che esistano e siano finiti i precedenti limiti.

Il solido di Cauchy

B

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_f$$

$$\partial B_u \cap \partial B_f = \{0\}$$

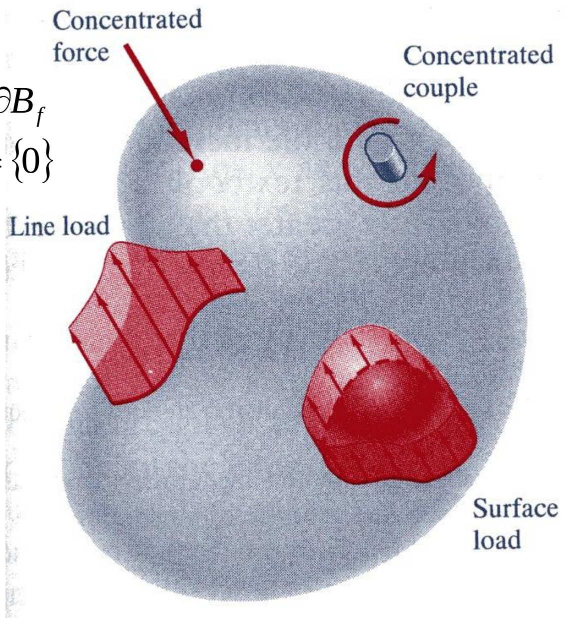


Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"

Analogamente, il valore specifico delle reazioni vincolari $\Delta\mathbf{R}_r$ presenti nell'intorno di area ΔA di un generico punto appartenente alla frontiera vincolata si definisce come segue:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_r}{\Delta A} \qquad \forall \mathbf{x} \in \partial B_u$$

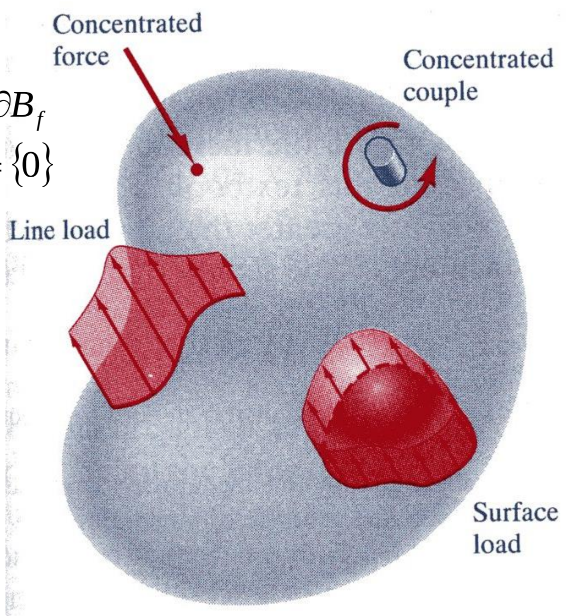
N.B. si assume che esistano e siano finiti i precedenti limiti.

Il solido di Cauchy: equazioni cardinali della statica.

B

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_f$$

$$\partial B_u \cap \partial B_f = \{0\}$$



Ip. che il solido sia in equilibrio, ossia che siano soddisfatte le equazioni cardinali della statica

$$\int_B \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}(\mathbf{x})dA + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}(\mathbf{x})dA = \mathbf{0}$$

$$\int_B (\mathbf{x}-\mathbf{O}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \int_{\partial B_f} (\mathbf{x}-\mathbf{O}) \times \mathbf{p}(\mathbf{x})dA + \int_{\partial B_u} (\mathbf{x}-\mathbf{O}) \times \mathbf{r}(\mathbf{x})dA = \mathbf{0}$$

Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"

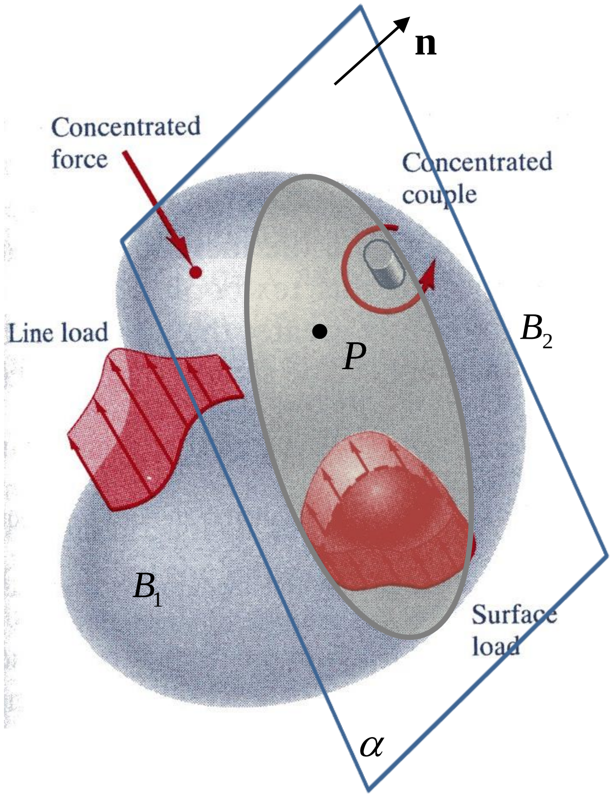
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il concetto di tensione

ANALISI DELLO STATO TENSIONALE

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

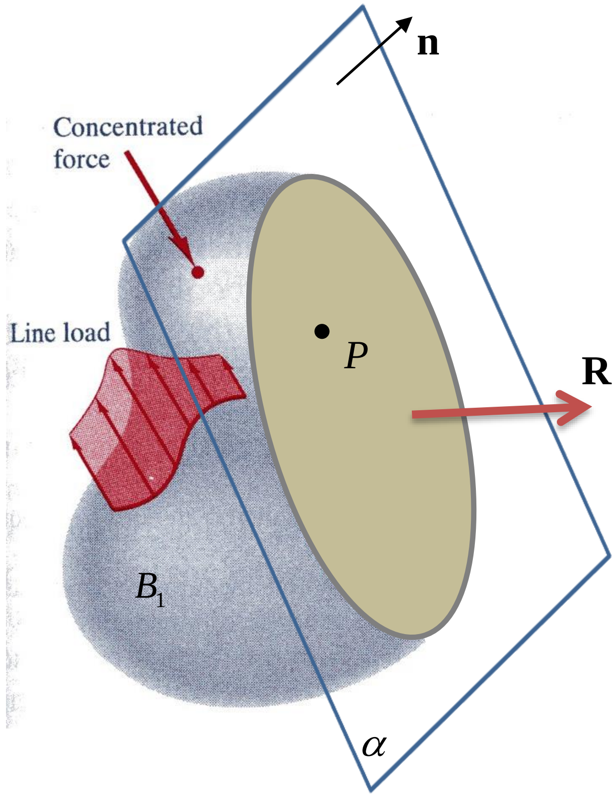
Il solido di Cauchy: il concetto di tensione



Si sezioni il solido in esame con una superficie (sezione di Eulero) passante per un punto P interno al solido per il quale si vuole investigare lo stato tensionale. Per semplicità si assuma che tale superficie sia piana. Per il punto materiale P in esame passano ∞^2 piani. In ogni caso per ora focalizziamo la nostra attenzione sul piano α avente versore normale **n**.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

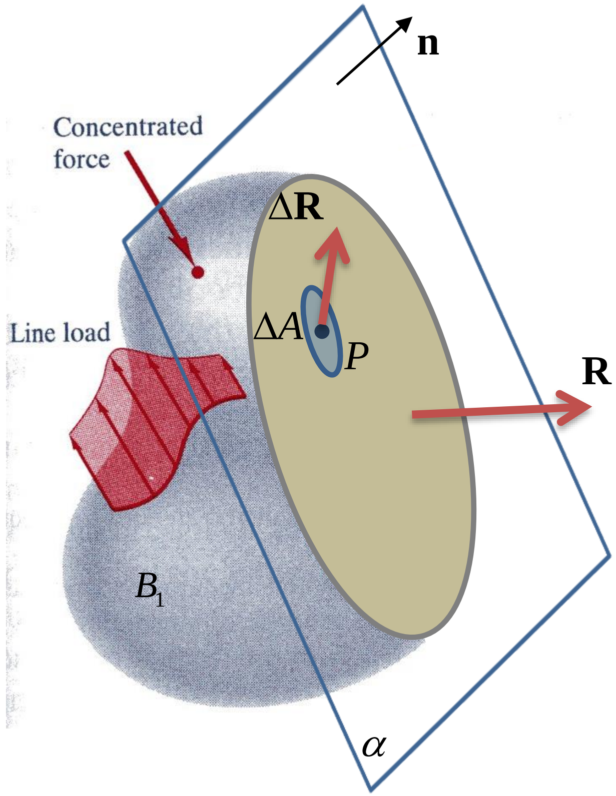
Il solido di Cauchy: il concetto di tensione



Principio di separazione di Eulero

Si suddivida idealmente il solido in due parti secondo il piano precedentemente individuato. Per il *principio di separazione di Eulero*, si può assumere che nei punti materiali appartenenti alla superficie di separazione sia presente un campo di forze interne (superficiali di contatto) tale che la sua risultante **R** equilibri i carichi presenti sulla parte di solido che stiamo considerando.

Il solido di Cauchy: il concetto di tensione



Si suddivida idealmente il solido in due parti secondo il piano precedentemente individuato. Per il *principio di separazione di Eulero*, si può assumere che nei punti materiali appartenenti alla superficie di separazione sia presente un campo di forze interne (superficiali di contatto) tale che la sua risultante $\mathbf{R}$ equilibri i carichi presenti sulla parte di solido che stiamo considerando.

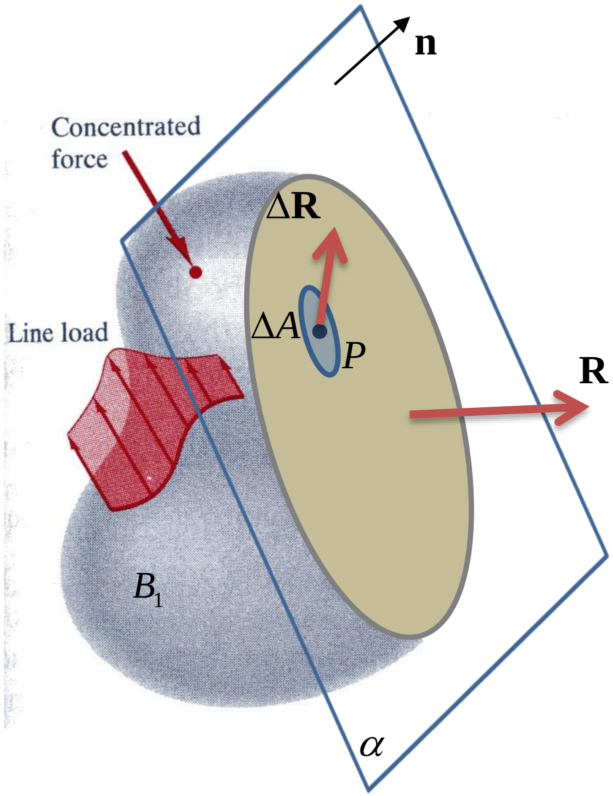
Sia $\Delta\mathbf{R}$ la risultante delle tensioni superficiali presenti in una superficie nell'intorno del punto P, avente area ΔA.

Il vettore tensione presente nel punto materiale P rispetto alla giacitura α di normale $\mathbf{n}$ si definisce come segue:

Si assume che il limite esista e sia finito

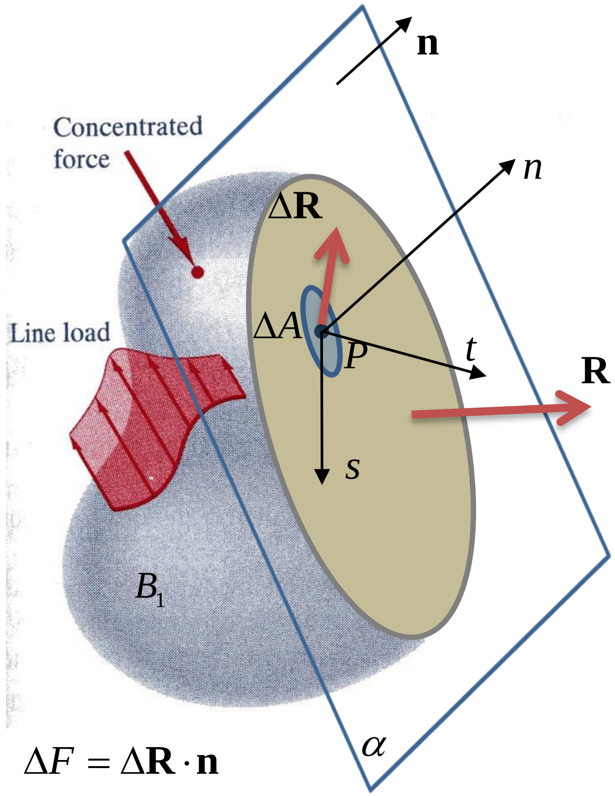
$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta A}$$

Definizione di tensione normale e tangenziale



La tensione così come definita nella precedente slide è allora un vettore. Può essere conveniente determinarne le componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Definizione di tensione normale e tangenziale



$$\Delta F = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$$

$$\Delta V_s = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}$$

$$\Delta V_t = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{t}$$

La tensione così come definita nella precedente slide è allora un vettore. Può essere conveniente determinarne le componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

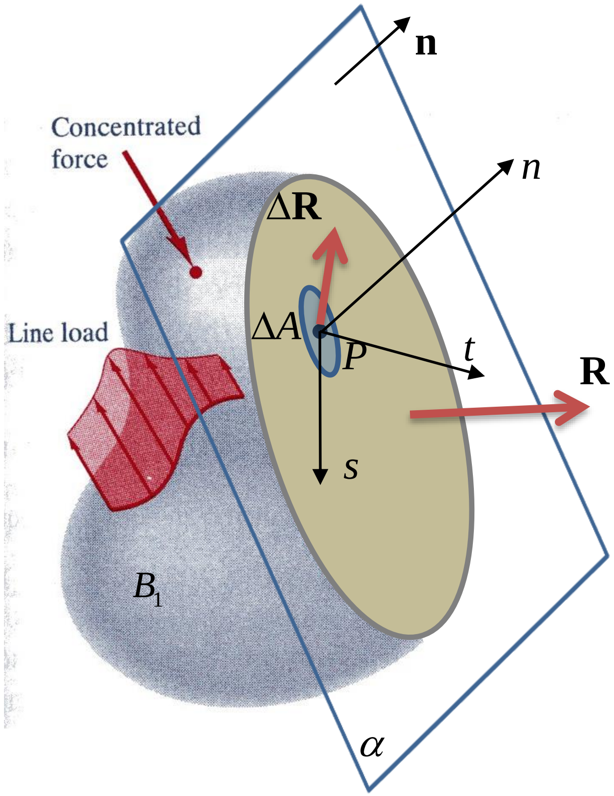
Consideriamo allora tre direzioni n, s e t, passanti per il punto P, una delle quali ortogonale al piano di sezione e le altre due contenute in tale piano e tali da formare una terna cartesiana destrorsa.

Siano ΔF, ΔV_s, ΔV_t le componenti della forza $\Delta \boldsymbol{R}$ rispetto a tali assi. Si definisce <u>tensione normale</u> nel punto P corrispondente alla giacitura di normale $\mathbf{n}$ la seguente quantità

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Definizione di tensione normale e tangenziale



Le componenti di <u>tensione tangenziale</u> presenti nel punto P in corrispondenza della giacitura di normale $\mathbf{n}$ nelle direzioni s e t si definiscono invece come segue

$$\tau_{ns} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_s}{\Delta A}$$

$$\tau_{nt} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_t}{\Delta A}$$

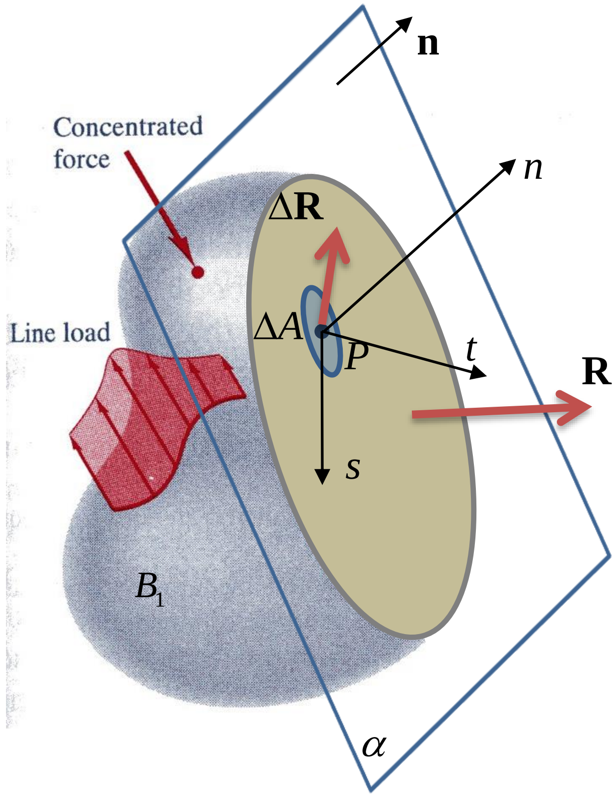
Definendo la componente tagliante della forza $\Delta\mathbf{R}$ come segue

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta \mathbf{V}_s + \Delta \mathbf{V}_t = \Delta \mathbf{R} - \sigma_n \mathbf{n} \qquad \text{(somma vettoriale)}$$

Si può definire la tensione tangenziale totale

$$\tau_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta A} \qquad\qquad \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t}_n - \sigma_n \mathbf{n}$$

Definizione di tensione normale e tangenziale

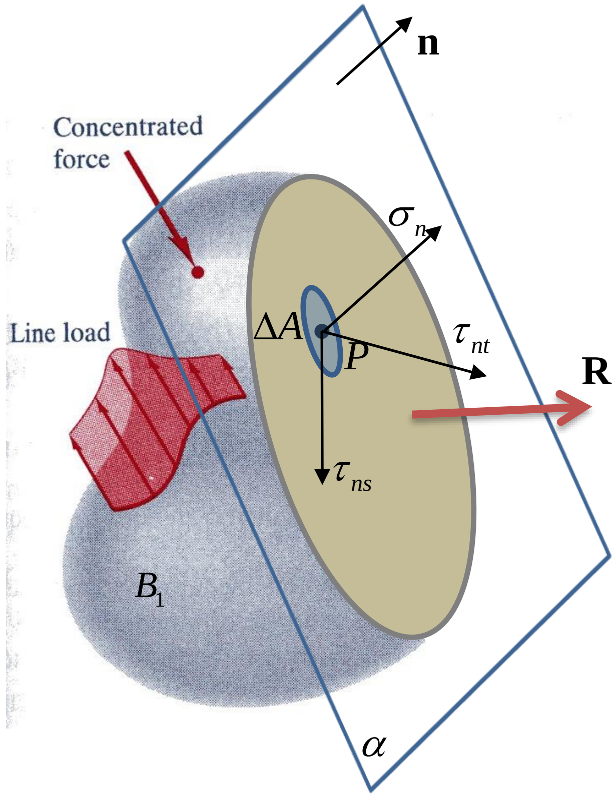


In definitiva allora, sono state definite le seguenti componenti di tensione

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$
$$\tau_{ns} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_s}{\Delta A}$$
$$\tau_{nt} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_t}{\Delta A}$$

Nella definizione della tensione normale σ_n, il pedice indica il versore normale alla giacitura che si sta considerando. Esso ovviamente coincide con la direzione della componente di tensione normale. Nella definizione delle tensioni tangenziali invece, il primo pedice indica la normale alla giacitura, mentre il secondo indica la direzione della componente di tensione.

Definizione di tensione normale e tangenziale

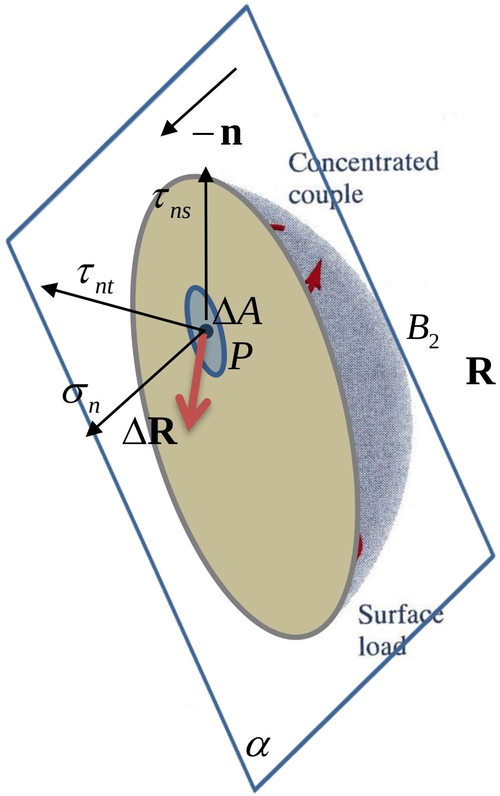


Convenzione sui segni:

superficie di normale **n**

si conviene che le componenti di tensione sopra definite siano positive se concordi con gli assi rispetto ai quali esse sono determinate. Pertanto si assume che la tensione normale σ_n sia positiva se concorde con l'asse n (trazione), la tensione tangenziale τ_{ns} positiva se concorde con l'asse s ed analogamente per la tensione tangenziale τ_{nt} che si assume positiva se concorde con l'asse t.

Definizione di tensione normale e tangenziale



Convenzione sui segni:

superficie di normale -**n**

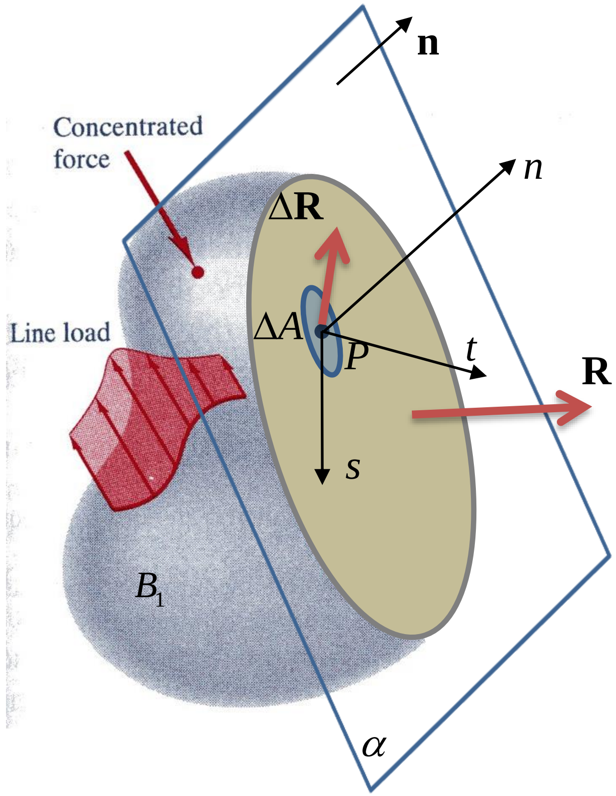
Sui punti che si trovano sulla superficie α, ma appartenenti all'altra parte del solido, saranno presenti delle tensioni uguali ed opposte a quelle precedentemente indicate. La normale alla superficie di sezione α in questo caso è pari a $-\mathbf{n}$ (si considerano sempre versori normali *uscenti dal solido*). Per i punti materiali appartenenti a tale superficie si assumono positive le tensioni normali e tangenziali indicate in figura (uguali ed opposte a quelle presenti sulla faccia di normale $\mathbf{n}$ indicate nella precedente slide).

Il tensore di Cauchy

ANALISI DELLO STATO TENSIONALE

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

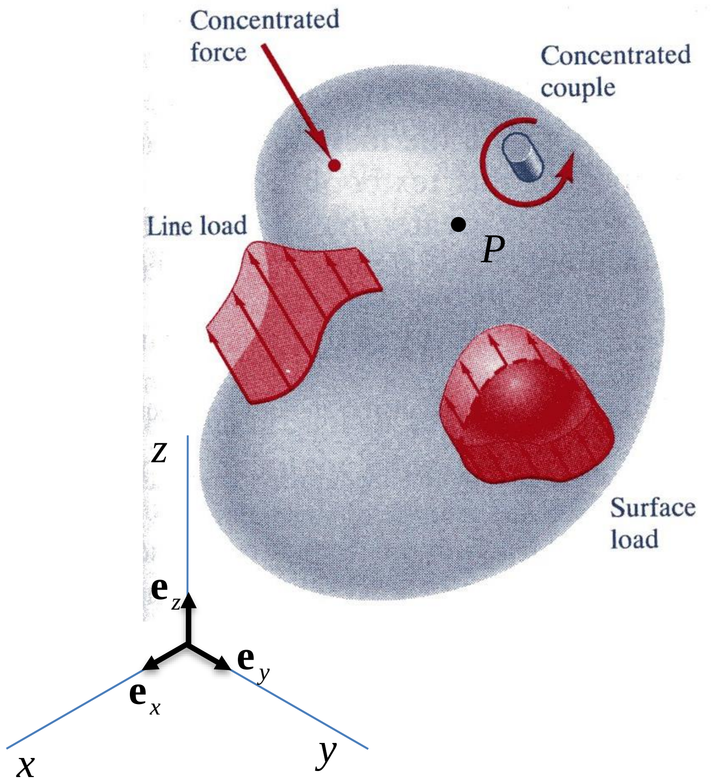
Definizione di tensione normale e tangenziale



Come si è detto, per un generico punto materiale passano ∞^2 piani differenti, ai quali possono corrispondere diversi valori di tensione normale e tangenziale (si veda quanto descritto nella lezione precedente in riferimento ad un'asta sollecitata assialmente).

Nasce allora l'esigenza di definire una misura dello stato tensionale presente in un punto materiale, mediante la quale sia possibile determinare le componenti di tensione relative ad una qualunque altra giacitura. Tale misura è il *tensore delle tensioni di Cauchy* che si costruisce come di seguito descritto.

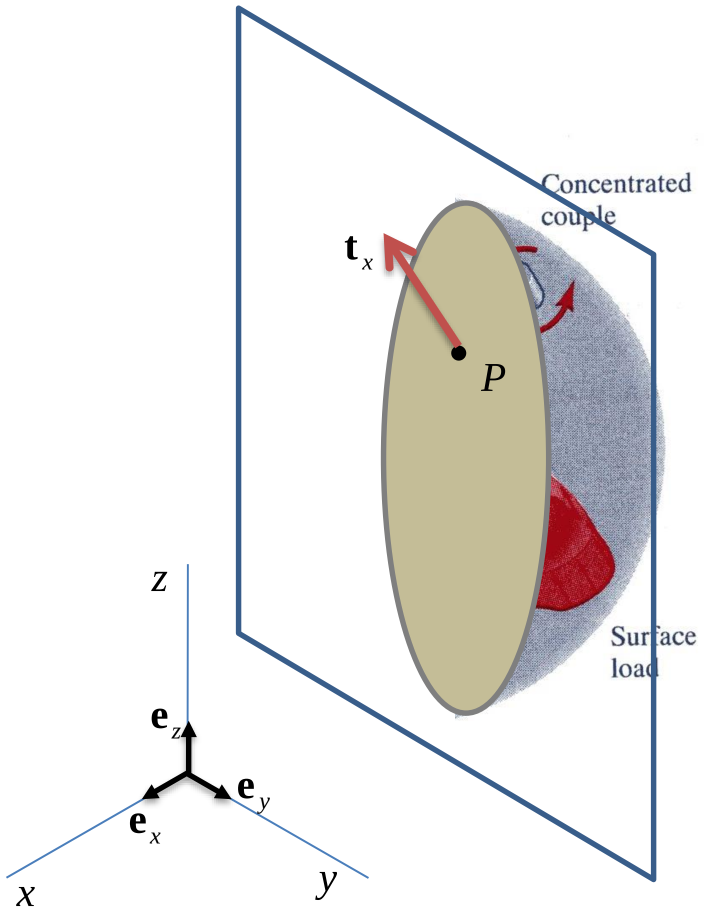
Il tensore di tensione di Cauchy



Si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente versori di base $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ ed $\mathbf{e}_z$.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

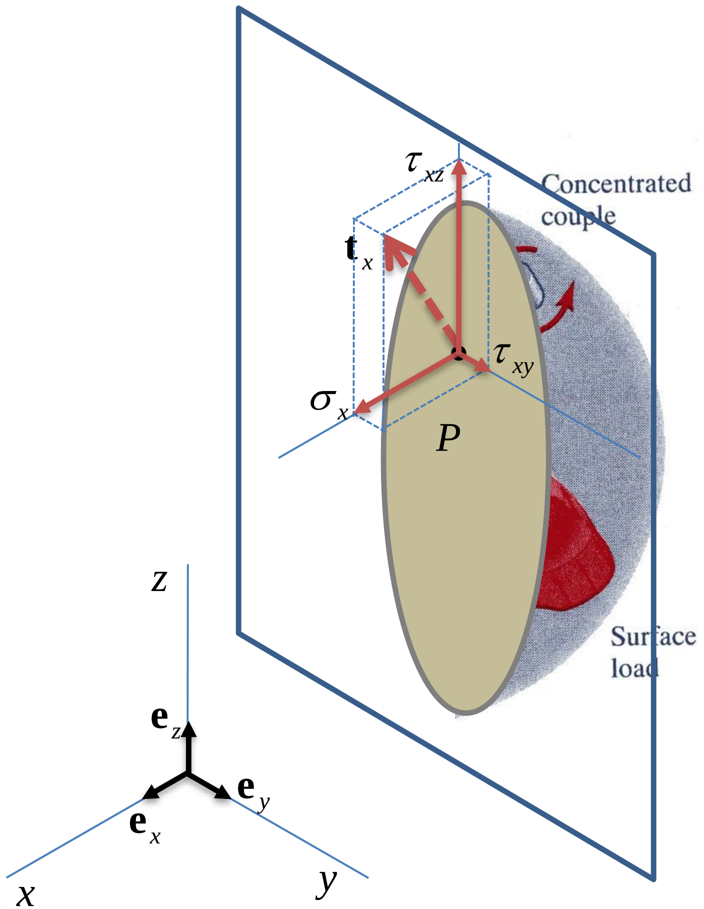
Il tensore di tensione di Cauchy



Si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente versori di base $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ ed $\mathbf{e}_z$. Sia $\mathbf{t}_x$ il vettore tensione presente nel punto P e relativo ad una giacitura di normale $\mathbf{e}_x$.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il tensore di tensione di Cauchy



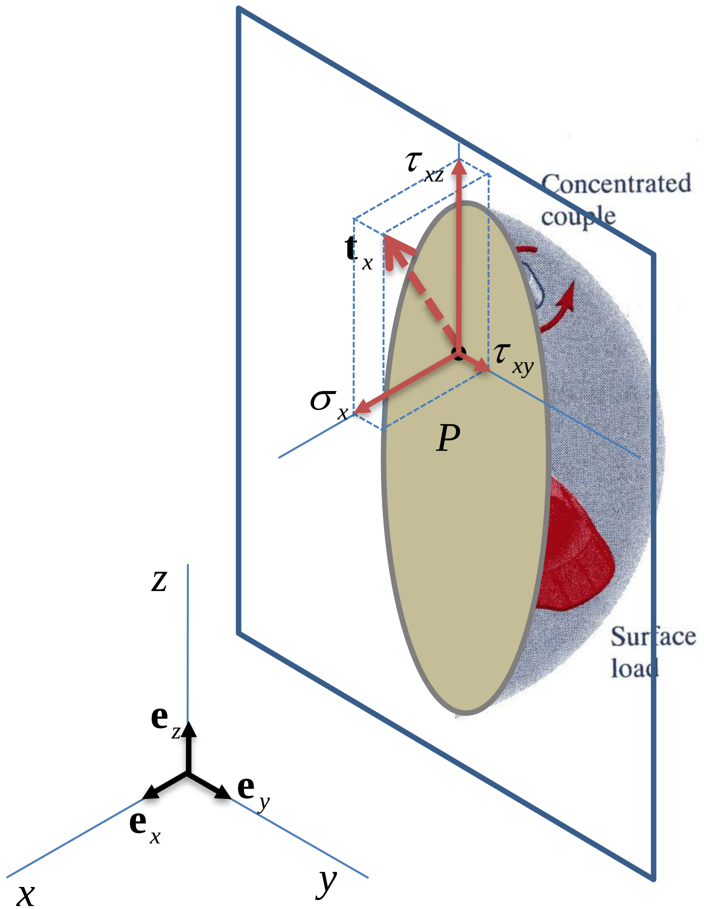
Si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente versori di base $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ ed $\mathbf{e}_z$. Sia $\mathbf{t}_x$ il vettore tensione presente nel punto P e relativo ad una giacitura di normale $\mathbf{e}_x$. Le sue componenti rispetto al sistema di riferimento fissato sono le seguenti

$$\mathbf{t}_x = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Analogamente, siano $\mathbf{t}_y$ e $\mathbf{t}_z$ i vettori tensione presenti nel punto P e relativi rispettivamente alle giaciture di normale $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{t}_y = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t}_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

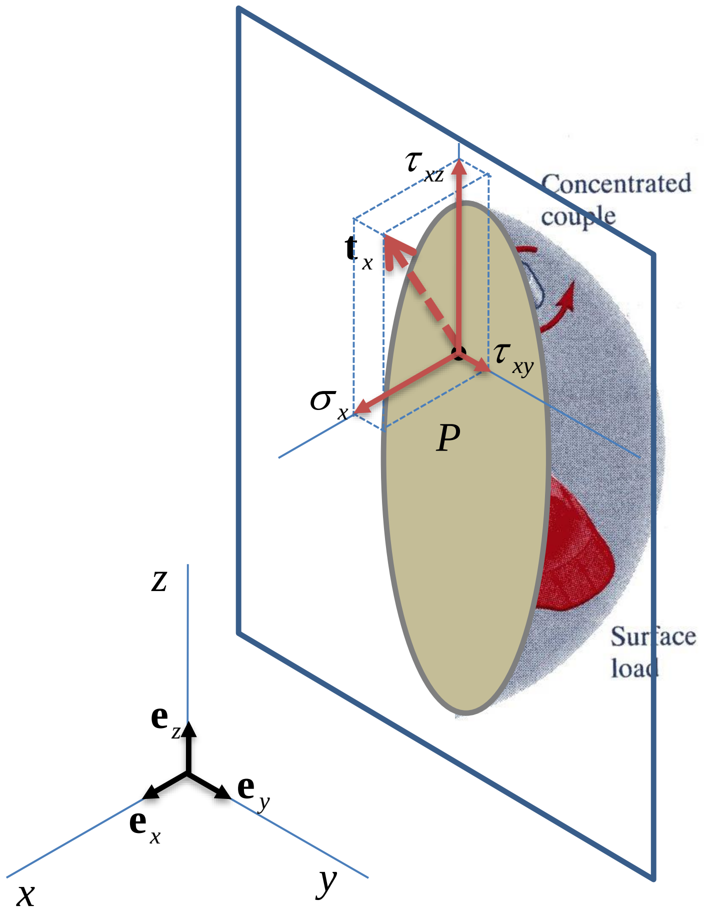
Il tensore di tensione di Cauchy



Lo stato di sforzo presente nel punto P in esame può essere rappresentato mediante la seguente matrice

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Il tensore di tensione di Cauchy



Lo stato di sforzo presente nel punto P in esame può essere rappresentato mediante la seguente matrice

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{t}_x & \mathbf{t}_y & \mathbf{t}_z \end{array}$$

le componenti contenute nelle colonne di tale matrice sono uguali alle componenti dei vettori di tensione presenti nel punto P in esame e riferiti a tre giaciture aventi normale coincidente con i versori di base del sistema di riferimento fissato.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il tensore di tensione di Cauchy

Si può dimostrare che la matrice sopra definita è la **rappresentazione in componenti di un tensore** (di ordine due e dimensione tre) detto *tensore degli sforzi di Cauchy*. Tale dimostrazione, omessa in questa sede per brevità, può essere effettuata ad esempio verificando che, al variare del sistema di riferimento, i termini contenuti nella matrice sopra definita variano con la stessa legge di variazione delle componenti di un tensore.

Il *tensore di Cauchy* è una *misura locale di tensione* in quanto esso dipende solo dalle tensioni presenti localmente nel punto P in cui è definito.

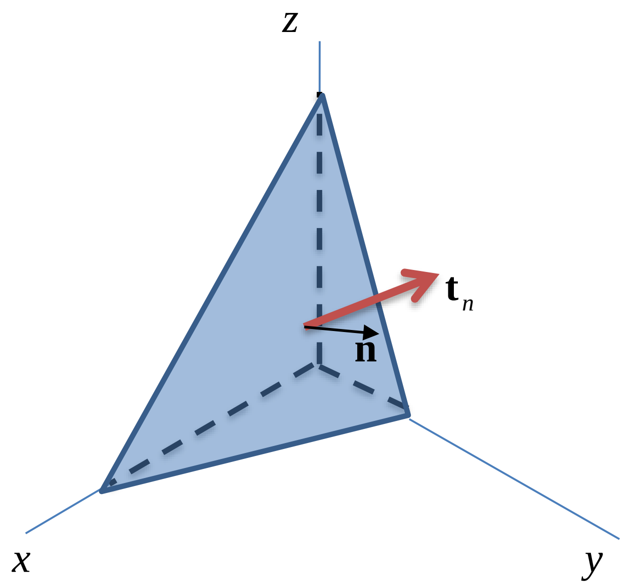
Si dice che il tensore di Cauchy è una misura dello stato tensionale in quanto attraverso di esso è possibile determinare le componenti di tensione presenti nel punto in cui esso è definito e relative ad una generica giacitura comunque inclinata.

Teorema di Cauchy

ANALISI DELLO STATO TENSIONALE

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

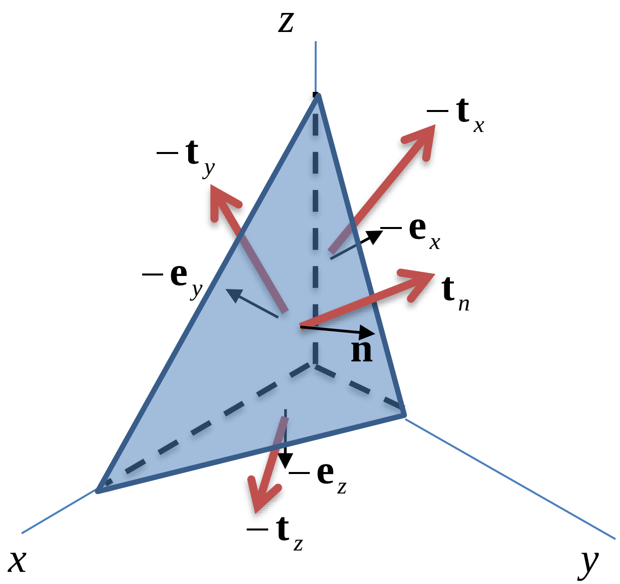
Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy



Siano note le componenti del tensore di Cauchy per un punto materiale P. Si consideri un tetraedro nell'intorno di tale punto, avente tre facce ortogonali agli assi del sistema di riferimento come indicato in figura. Sia $\mathbf{n}$ il versore normale alla quarta faccia e $\mathbf{t}_n$ il relativo vettore tensione incognito.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

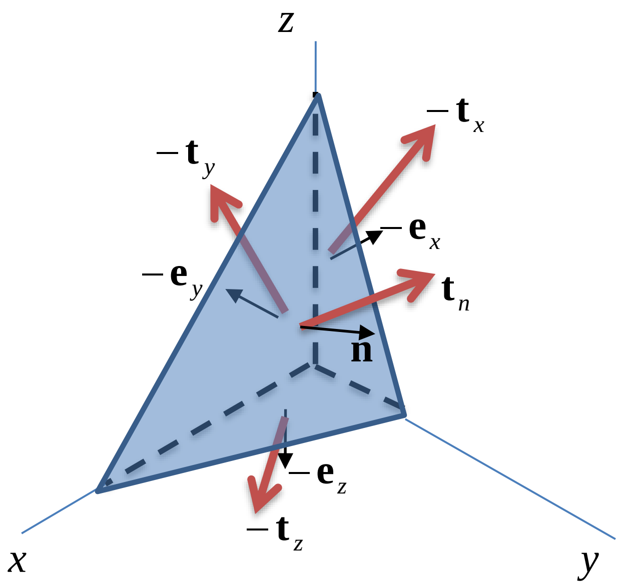
Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy



Siano note le componenti del tensore di Cauchy per un punto materiale P. Si consideri un tetraedro nell'intorno di tale punto, avente tre facce ortogonali agli assi del sistema di riferimento come indicato in figura. Sia $\mathbf{n}$ il versore normale alla quarta faccia e $\mathbf{t}_n$ il relativo vettore tensione incognito.

Visto che le tre facce del tetraedro ortogonali fra loro hanno *normale uscente opposta al versore degli assi del sistema di riferimento,* su tali facce sarà presente un vettore di tensione pari all'opposto di quello presente sulle facce a normale concorde con i versori di base.

Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy



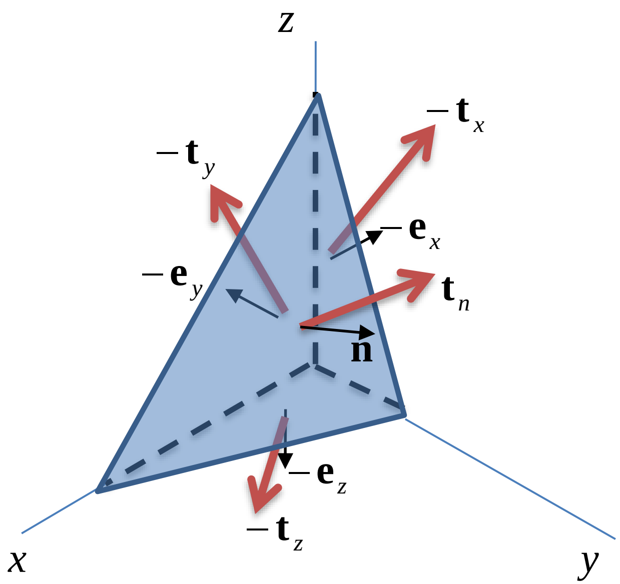
Sia inoltre $\mathbf{b}$ il vettore ceh rappresenta eventuali forze di volume (ad esempio forze gravitazionali o d'inerzia) presenti del tetraedro in esame. La loro risultante è pari a $\mathbf{b}\Delta V$ dove ΔV è il volume del tetraedro.

Sia ΔA l'area della faccia ortogonale al versore $\mathbf{n}$ e ΔA_x, ΔA_y e ΔA_z le aree delle facce del tetraedro ortogonali agli assi del sistema di riferimento. Si dimostra che valgono le seguenti relazioni

$$\Delta A_x = \Delta A\, n_x \qquad \Delta A_y = \Delta A\, n_y \qquad \Delta A_z = \Delta A\, n_z$$

dove n_x, n_y ed n_z sono le componenti del versore $\mathbf{n}$ (coseni direttori).

Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy



Per l'equilibrio alla traslazione del tetraedro in figura si ha

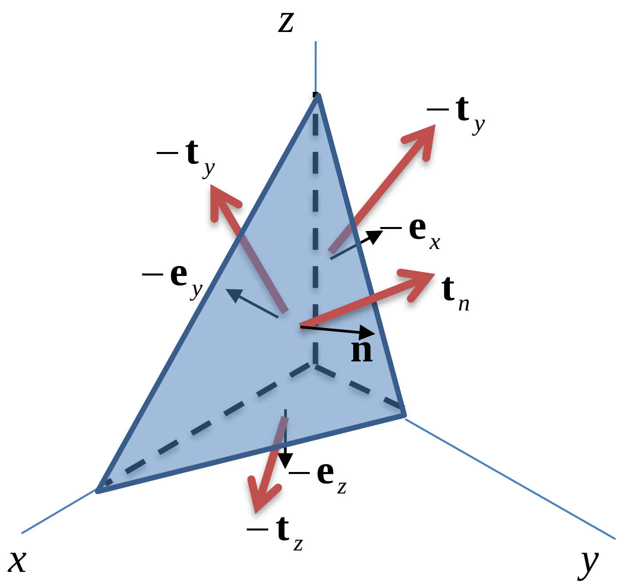
$$-\mathbf{t}_x \Delta A_x - \mathbf{t}_y \Delta A_y - \mathbf{t}_z \Delta A_z + \mathbf{t}_n \Delta A + \mathbf{b} \Delta V = \mathbf{0}$$

Vogliamo esprimere le precedenti condizioni di equilibrio localmente nel punto P in cui sono note le componenti del tensore di tensione di Cauchy. Per tale motivo facciamo tendere a zero il tetraedro in figura. Il volume ΔV rappresenta un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ΔA per cui il suo contributo nelle precedenti condizioni di equilibrio, al limite, risulta trascurabile. Utilizzando le relazioni fra le aree delle facce del tetraedro si ha

$$-\mathbf{t}_x n_x - \mathbf{t}_y n_y - \mathbf{t}_z n_z + \mathbf{t}_n = \mathbf{0}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy

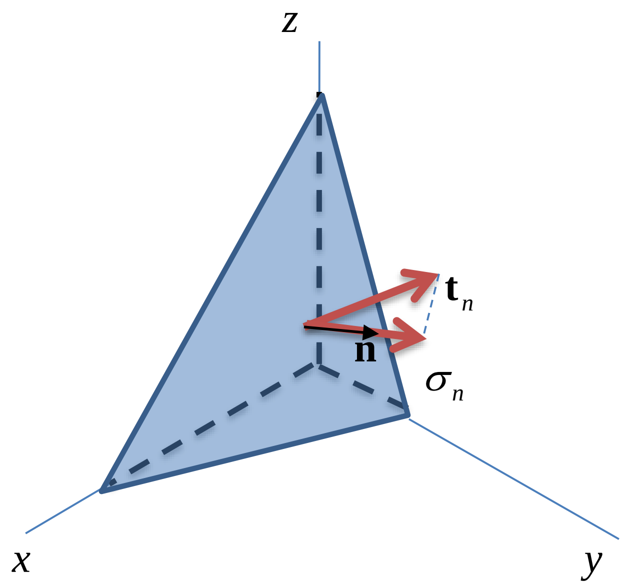


In forma compatta la precedente relazione si scrive come segue

$$[\mathbf{t}_x \quad \mathbf{t}_y \quad \mathbf{t}_z]\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \mathbf{t}_n \rightarrow \underline{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t}_n$$

Attraverso la precedente relazione è allora possibile determinare il vettore tensione relativo ad una generica giacitura passante per il punto P, note le componenti del tensore di Cauchy e la normale alla giacitura in esame.

Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy

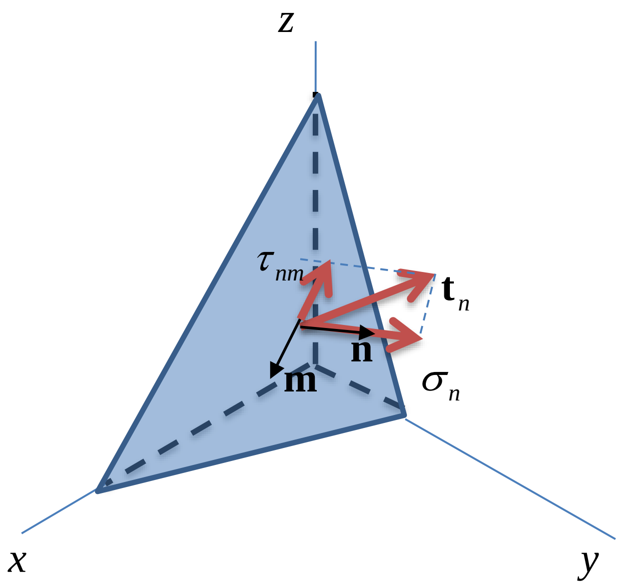


La componente di tensione normale presente sulla giacitura in esame si ottiene moltiplicando scalarmente il vettore tensione per il versore normale alla giacitura

$$\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} \rightarrow \sigma_n = \underline{\sigma}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy



La componente di tensione normale presente sulla giacitura in esame si ottiene moltiplicando scalarmente il vettore tensione per il versore normale alla giacitura

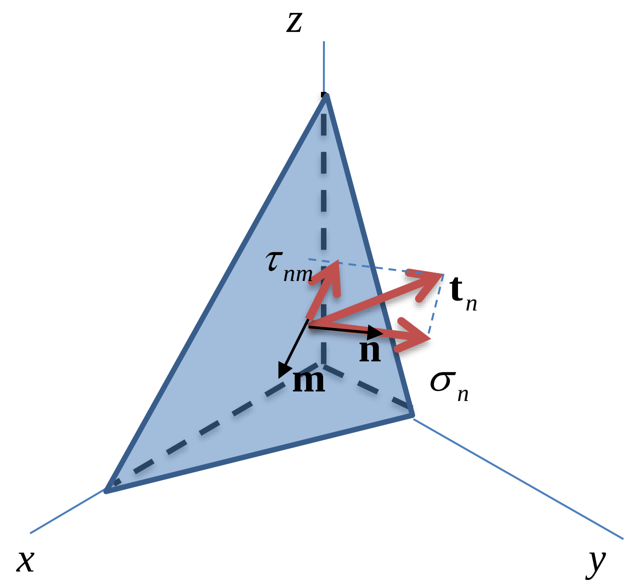
$$\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} \rightarrow \sigma_n = \underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$$

In maniera analoga, la componente di tensione tangenziale nella direzione $\mathbf{m}$ indicata in figura si ottiene moltiplicando scalarmente il vettore $\mathbf{t}_n$ per il versore $\mathbf{m}$ come segue

$$\tau_{nm} = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{m} \rightarrow \tau_{nm} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Tensione su una giacitura qualunque – teorema di Cauchy



In particolare, la precedente relazione vale anche per le giaciture coincidenti con i piani del sistema di riferimento. Per la giacitura avente normale pari ad $\mathbf{e}_x$ si ha ad esempio

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \mathbf{t}_x$$

ed analogamente si ottiene

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{t}_y$$

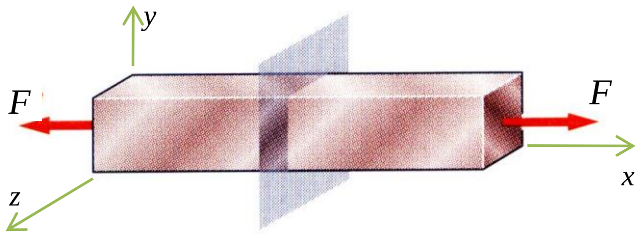
$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{t}_z$$

Esempi

ANALISI DELLO STATO TENSIONALE

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

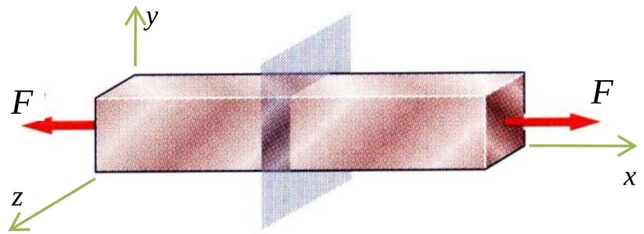
Esempio – asta sollecitata assialmente



Esaminiamo un punto materiale interno all'asta sollecitata assialmente considerata precedentemente. Le componenti del tensore tensione rispetto al sistema di riferimento indicato in figura sono le seguenti

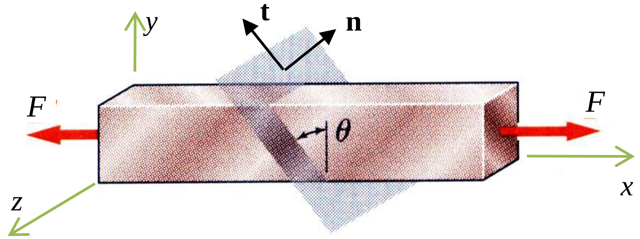
$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dove} \quad \sigma_x = F/A$$

Esempio – asta sollecitata assialmente



Esaminiamo un punto materiale interno all'asta sollecitata assialmente considerata precedentemente. Le componenti del tensore tensione rispetto al sistema di riferimento indicato in figura sono le seguenti

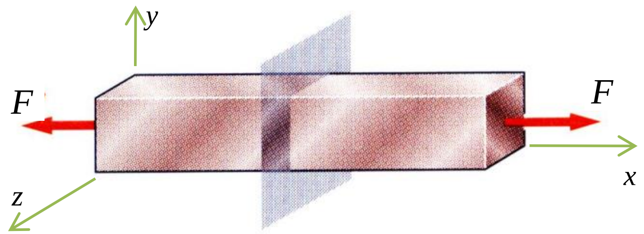
$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dove} \quad \sigma_x = F / A$$



Vogliamo determinare le componenti di tensione normale σ_n e tangenziale τ_{nt} su una giacitura inclinata applicando il teorema di Cauchy. Le componenti dei versori indicati in figura sono le seguenti

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio – asta sollecitata assialmente



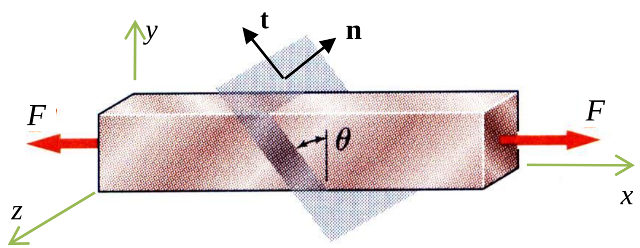
Per il teorema di Cauchy si ha che

$$\mathbf{t}_n = \underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le componenti normali e tangenziali di tensione si calcolano come segue

$$\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_x \cos^2\theta$$

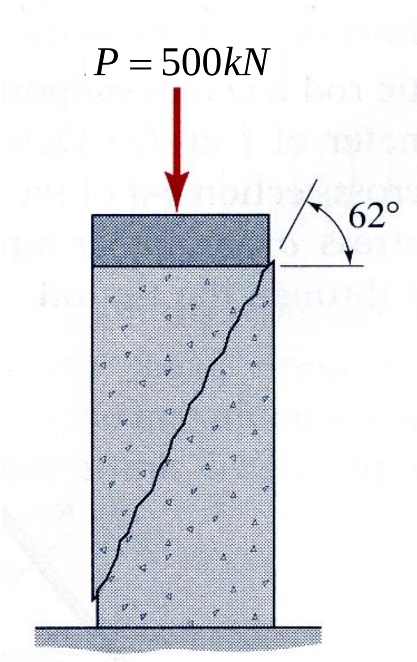
$$\tau_{nm} = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{m} = -\sigma_x \sin\theta \cos\theta$$



I precedenti valori locali di tensione coincidono, per l'esempio qui considerato, con le componenti di tensioni medie determinate nella precedente lezione.

Questo risultato non è ovviamente generale in quanto non sempre i valori locali di tensione coincidono con i valori medi (solo per stati omogenei).

Esercizio



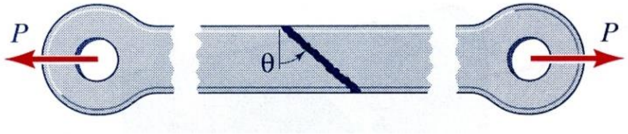
Un cilindro in calcestruzzo avente diametro di base pari a $15cm$ è sollecitato da un carico di compressione P=$500kN$. In corrispondenza di tale carico il cilindro si fessura lungo un angolo inclinato di $62°$ rispetto alle basi. Si determini:

- il valore della tensione normale di compressione presente, a rottura, in corrispondenza di una sezione trasversale del cilindro;
- il valore delle tensioni normali e tangenziali presenti sulla superficie di rottura.

SI RISOLVA APPLICANDO IL TEOREMA DI CAUCHY

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio



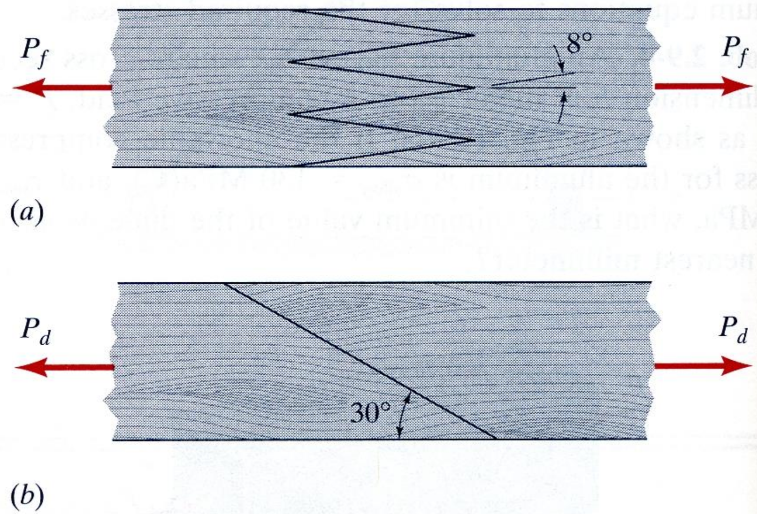
La barra in acciaio schematizzata in figura ha una sezione trasversale rettangolare di dimensioni pari a $25x100mm$. Al fine di ottenere una barra abbastanza lunga è necessario saldare due tratti in corrispondenza di un giunto inclinato di un angolo θ rispetto alla sezione trasversale. Le tensioni normale e tangenziale limite che possono essere presenti sulla saldatura sono rispettivamente pari a $125MPa$ e $75MPa$. Si determini:

- l'angolo θ ottimale per la saldatura ($0 \leq \theta \leq 45°$);
- il carico assiale P massimo applicabile alla barra saldata secondo l'angolo ottimale.

SI RISOLVA APPLICANDO IL TEOREMA DI CAUCHY

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio



P2.9-13

Due aste in legno lamellare possono essere incollate secondo i due schemi riportati in figura. Si determini il apporto fra i massimi carichi applicabili ($P_{f\,max}/P_{d\,max}$) corrispondenti ai seguenti due casi:

1. la tensione tangenziale ammissibile per la colla è pari alla metà della tensione normale ammissibile ($\tau_{amm}=0.5\sigma_{amm}$);
2. la tensione tangenziale ammissibile per la colla è pari al doppio della tensione normale ammissibile ($\tau_{amm}=2\sigma_{amm}$).

SI RISOLVA APPLICANDO IL TEOREMA DI CAUCHY