Meccanica del continuo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Gli stati tensionali piani

Sommario

Nelle precedenti lezioni

- sono state introdotte le equazioni indefinite di equilibrio. Si è visto che un continuo è in equilibrio se e soltanto se tali equazioni sono soddisfatte in ogni suo punto materiale. Si è visto che l'equilibrio locale alla rotazione implica la simmetria del tensore delle tensioni di Cauchy (condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio alla rotazione di un elemento di volume infinitesimo);
- è stato mostrato come determinare le massime componenti normali di tensione presenti in un punto materiale e le relative giaciture, dette principali. Tali valori possono essere utili ad esempio per una eventuale verifica di resistenza del materiale.

Adesso,

- i metodi di trasformazione dello stato tensionale descritti nelle precedenti lezioni saranno particolarizzati a stati tensionali piani;
- **la procedura che sarà descritta può essere applicata a qualunque grandezza di natura tensoriale, in particolare per l'analisi degli stati di deformazione piana.**

Introduzione

Si consideri un continuo in equilibrio. Si immagini che, per un certo punto materiale del continuo, le componenti del tensore di Cauchy rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $(O,\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$ siano del seguente tipo

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

È facile verificare che in questo caso la direzione $\mathbf{e}_z$ è direzione principale di tensione ed il valore principale di tensione ad essa associato è σ_z. Si ha infatti

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \sigma_z \mathbf{e}_z$$

Visto che, come è ben noto, gli autovalori di un tensore sono ortogonali tra loro, le altre due direzioni principali relative allo stato tensionale in esame devono essere contenute nel piano xy

$$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ n_y^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ n_y^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Introduzione

Analogamente si dimostra che, se le componenti del tensore di Cauchy sono le seguenti

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

una direzione principale di tensione è $\mathbf{e}_y$, associata al valore principale σ_y, mentre le altre due direzioni principali di tensione saranno contenute nel piano xz

$$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ 0 \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ 0 \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix}$$

Ed infine, se le componenti del tensore di Cauchy sono le seguenti

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

una direzione principale di tensione è $\mathbf{e}_x$, associata al valore principale σ_x, mentre le altre due direzioni principali di tensione saranno contenute nel piano yz

$$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y^{(1)} \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y^{(2)} \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Introduzione

In tutti questi casi, la ricerca degli autovalori ed autovettori non immediatamente determinabili può essere effettuata risolvendo un problema agli autovalori "ridotto".

Si consideri, ad esempio, lo stato tensionale del tipo

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Le direzioni principali "non immediatamente determinabili" sono contenute nel piano xy e pertanto risolvono il seguente problema

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_n \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le precedenti relazioni rappresentano un sistema di tre equazioni per il quale la terza equazione è l'identità $0=0$. Le rimanenti relazioni si possono scrivere come segue

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \sigma_n \begin{bmatrix} n_y \\ n_y \end{bmatrix}$$

e quindi le componenti significative degli autovettori del tensore di tensione soddisfano il precedente problema agli autovalori che possiamo dire "ridotto" in quanto coinvolge solo alcune componenti del tensore di tensione

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani

In particolare, quanto detto vale anche nei casi in cui tutte le componenti del tensore di Cauchy contenute in una riga e nell'omologa colonna sono nulle, compreso il termine che si trova sulla diagonale principale. Stati tensionali siffatti si dicono piani ed il piano di tensione ad essi relativo è quello corrispondente ai termini non nulli del tensore di tensione

Componenti dello stato tensionale	Piano di tensione	Valori principali noti	Altre direzioni principali
$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	xy	$\sigma_z = 0 \leftrightarrow \mathbf{e}_z$	$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ n_y^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ n_y^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}$
$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$	xz	$\sigma_y = 0 \leftrightarrow \mathbf{e}_y$	$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ 0 \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ 0 \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix}$
$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$	yz	$\sigma_x = 0 \leftrightarrow \mathbf{e}_x$	$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y^{(1)} \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y^{(2)} \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix}$

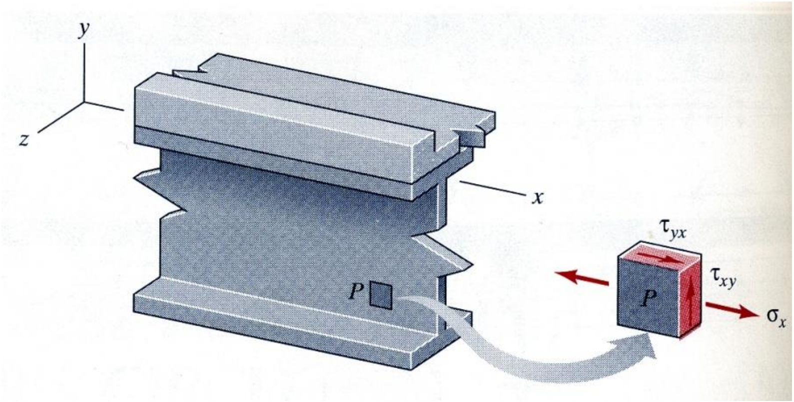
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani – definizione generale

In generale uno stato tensionale si dice piano se il tensore di tensione ha un autovalore nullo. In tal caso il piano delle tensioni è quello contenente le due direzioni principali corrispondenti ai valori principali di tensione non nulli.

Nella presente lezione analizzeremo stati tensionali piani per i quali il piano delle tensioni coincide con il piano xy del sistema di riferimento. I risultati qui ottenuti possono però essere facilmente generalizzati a stati tensionali piani qualsiasi, ad esempio semplicemente definendo in maniera opportuna il sistema di riferimento.

Gli stati tensionali piani



Gli stati tensionali piani sono molto frequenti negli impieghi ordinari di molti elementi strutturali quali ad esempio travi a spessore sottile, lastre, piastre, etc.

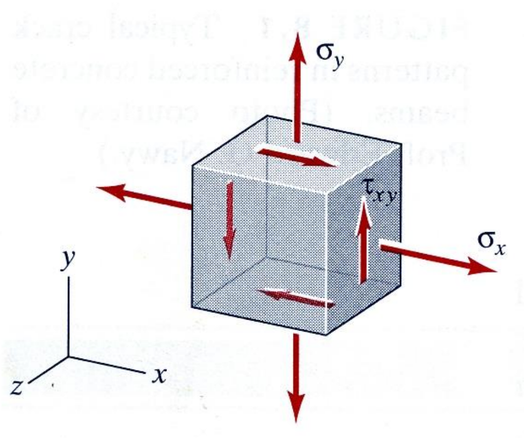
Si consideri ad esempio un elemento di volume nell'intorno del punto P del tratto di trave schematizzato in figura. Visto che non vi sono carichi direttamente applicati sulle facce di normale $\pm\mathbf{e}_z$, si avrà

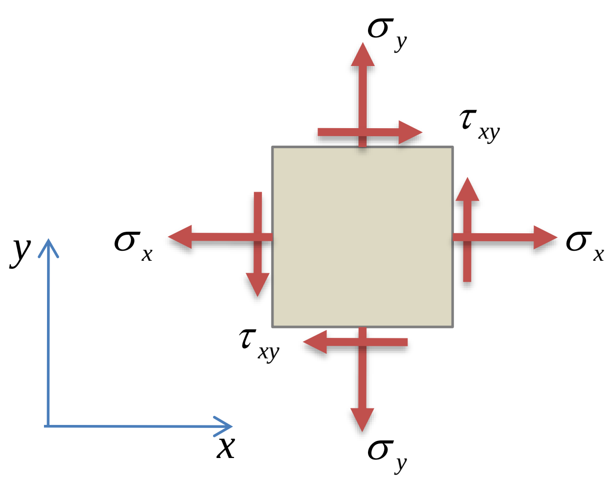
$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

per cui lo stato tensionale presente nel punto materiale in esame è piano ed il piano delle tensioni è xy.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani



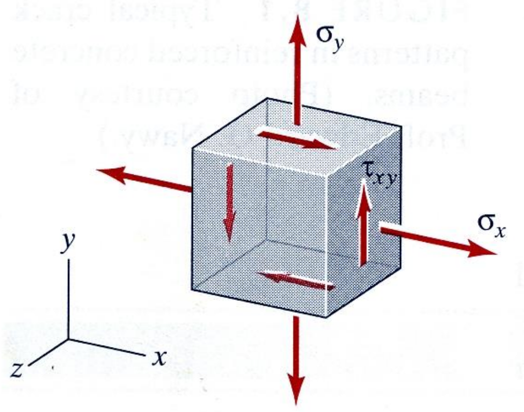


Per il caso in esame allora, le componenti di tensione non nulle sono le seguenti

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Esse possono essere agevolmente rappresentate su un elemento piano come schematizzato in figura.

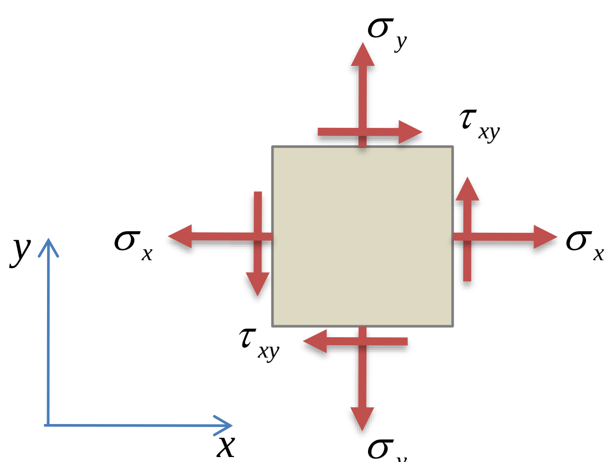
Gli stati tensionali piani



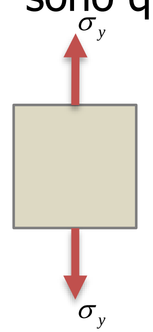
Per il caso in esame allora, le componenti di tensione non nulle sono le seguenti

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

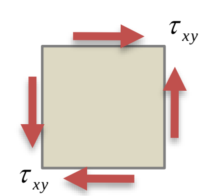
Esse possono essere agevolmente rappresentate su un elemento piano come schematizzato in figura.



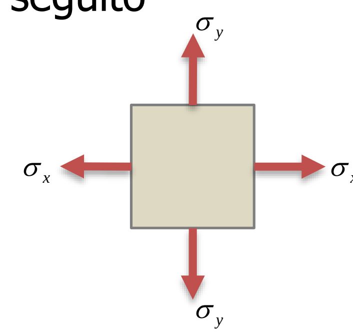
Casi particolari di stati tensionali piani sono quelli schematizzati di seguito



uniassiale



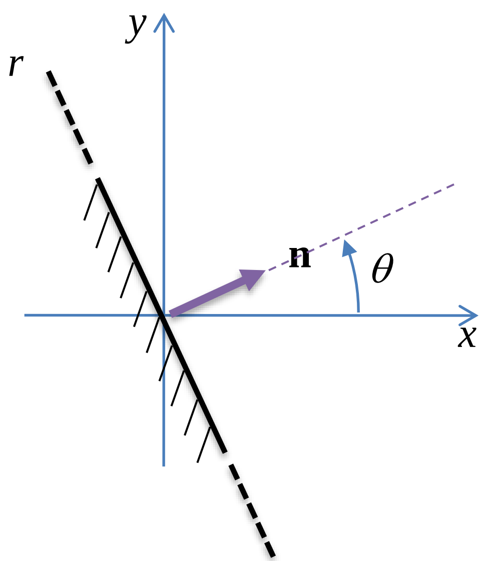
puro taglio



biassiale

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani

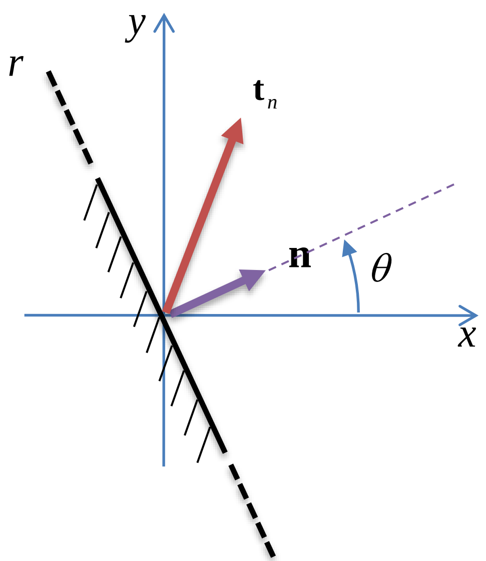


Si consideri una generica giacitura contenente l'asse z. La sua intersezione con il piano xy, al quale è ortogonale, è la retta r indicata in figura. Il versore $\mathbf{n}$ normale a tale giacitura ha la terza componente nulla. Le sue componenti rispetto agli assi xy sono le seguenti

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

θ positivo se antiorario

Gli stati tensionali piani



Si consideri una generica giacitura contenente l'asse z. La sua intersezione con il piano xy, al quale è ortogonale, è la retta r indicata in figura. Il versore $\mathbf{n}$ normale a tale giacitura ha la terza componente nulla. Le sue componenti rispetto agli assi xy sono le seguenti

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

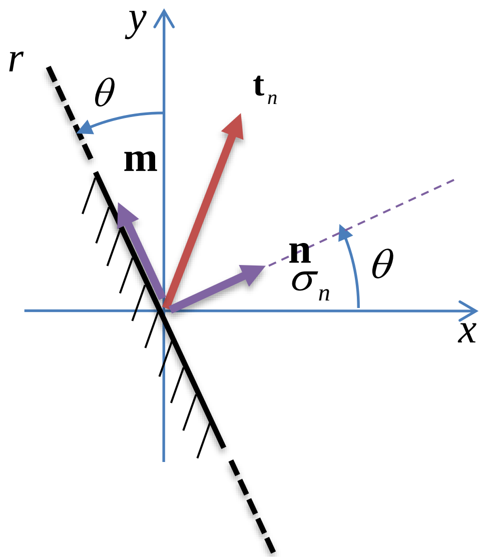
Le componenti (non nulle) rispetto agli assi del sistema di riferimento fissato in figura del vettore tensione relativo alla giacitura in esame sono le seguenti

θ positivo se antiorario

$$\mathbf{t}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{bmatrix}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani

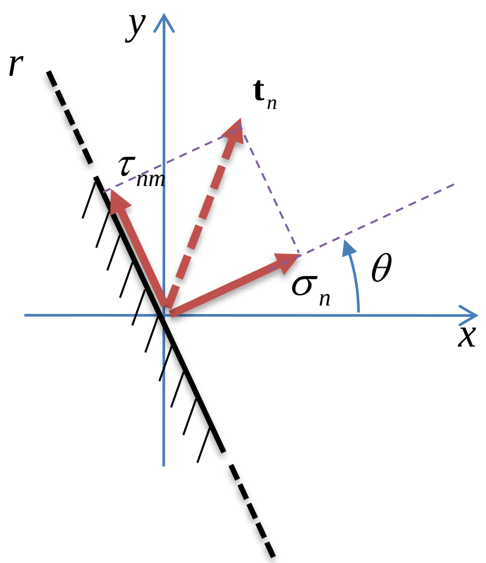


Si consideri adesso il versore $\mathbf{m}$ contenuto nel piano xy e tangente alla giacitura in esame. Le sue componenti rispetto al sistema di riferimento indicato in figura sono le seguenti

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

θ positivo se antiorario

Gli stati tensionali piani



θ positivo se antiorario

Si consideri adesso il versore $\mathbf{m}$ contenuto nel piano xy e tangente alla giacitura in esame. Le sue componenti rispetto al sistema di riferimento indicato in figura sono le seguenti

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

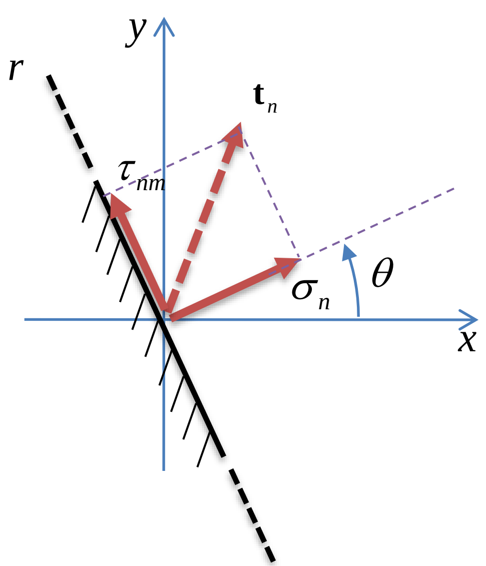
Le componenti normale e tangenziale di tensione si calcolano come segue

$$\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$\tau_{nm} = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{m} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Nella precedente relazione, si assumono positive le componenti di tensione concordi con quelle indicate in figura

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani



θ positivo se antiorario

Utilizzando le seguenti relazioni trigonometriche

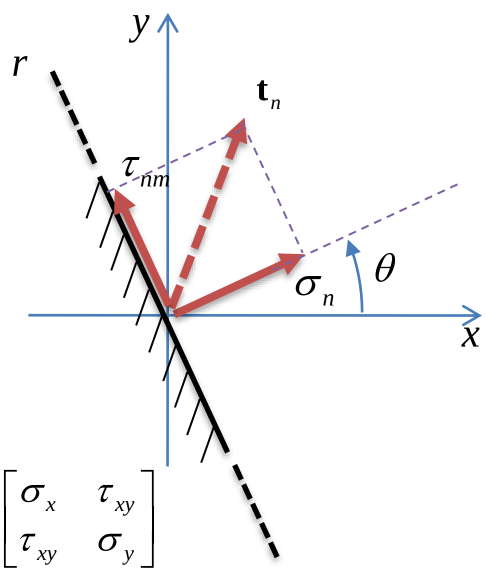
$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$
$$\sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$$
$$\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$$

Le precedenti espressioni delle componenti normali e tangenziali di tensione si scrivono come segue

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$
$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Esse forniscono le componenti di tensione per uno stato tensionale piano, relative ad una generica giacitura avente versore normale contenuto nel piano di tensione.

Gli stati tensionali piani – valori e direzioni principali



$$\underline{\sigma}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Le espressioni che sono state determinate per le componenti di tensione hanno evidentemente un andamento periodico. È facile in questo caso verificare che, come per gli stati tensionali generici, le componenti di tensione normale massima si hanno in corrispondenza di giaciture rispetto alle quali le componenti di tensione tangenziale si annullano. Le massime tensioni normali soddisfano infatti la seguente condizione

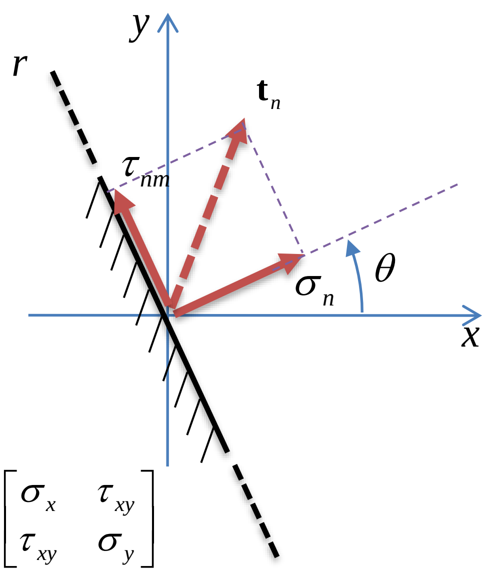
$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} = 0 \rightarrow 2\left(-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right) = 0$$

Tale derivata è pari al doppio della componente tangenziale di tensione e quindi si ha

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} = 0 \rightarrow 2(\tau_{mn}) = 0 \rightarrow \tau_{nm} = 0$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani – valori e direzioni principali



$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

In corrispondenza delle giaciture principali si ha allora

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r \mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n} \rightarrow \left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r - \sigma_n \underline{\mathbf{I}}\right)\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

I valori e le direzioni principali di tensione sono allora pari agli autovalori ed agli autovettori del tensore di tensione ridotto.

I valori principali di tensione si calcolano come segue

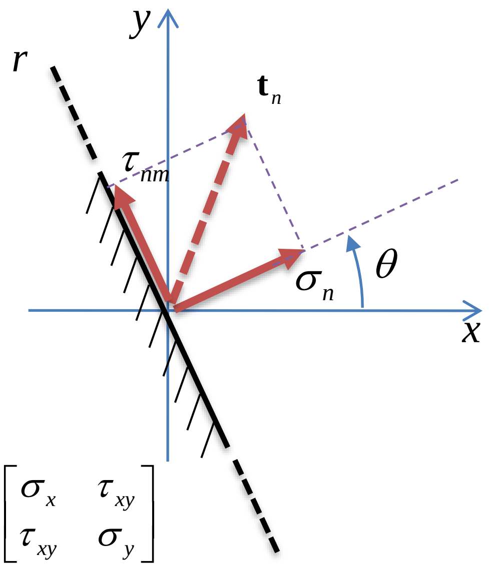
$$\det\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r - \sigma_n \underline{\mathbf{I}}\right) = \det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \left(\sigma_x - \sigma_n\right)\left(\sigma_y - \sigma_n\right) - 2\tau_{xy} = 0$$

Le radici della precedente equazione di secondo grado sono le seguenti

$$\sigma_{1;2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Gli stati tensionali piani – valori e direzioni principali



$$\underline{\sigma}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

La direzione principale associata al valore principale massimo si ottiene risolvendo il seguente sistema

$$\left(\underline{\sigma}_r - \sigma_1 \underline{\mathbf{I}}\right)\mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ n_y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le due equazioni del precedente sistema sono linearmente dipendenti in quanto il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Dalla prima equazione si ottiene

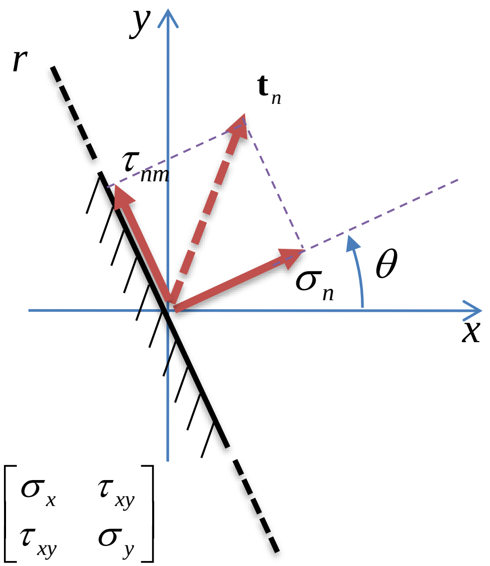
$$\left(\sigma_x - \sigma_1\right) n_x^{(1)} + \tau_{xy} n_y^{(1)} = 0 \rightarrow \tan\theta_1 = \frac{n_x^{(1)}}{n_y^{(1)}} = -\frac{\tau_{xy}}{\left(\sigma_x - \sigma_1\right)}$$

Utilizzando le relazioni notevoli di trigonometria dalla precedente si ottiene

$$\tan 2\theta_1 = \frac{n_x^{(1)}}{n_y^{(1)}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani – valori e direzioni principali



$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

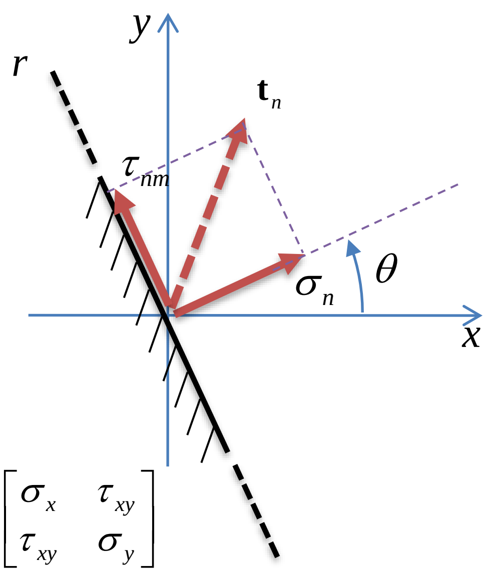
$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Per le proprietà di ortogonalità degli autovalori di un tensore, la direzione principale relativa al valore principale minimo σ_2 sarà contenuta nel piano di tensione ed ortogonale alla direzione $\mathbf{n}^{(1)}$.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani – valori e direzioni principali



$$\underline{\sigma}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

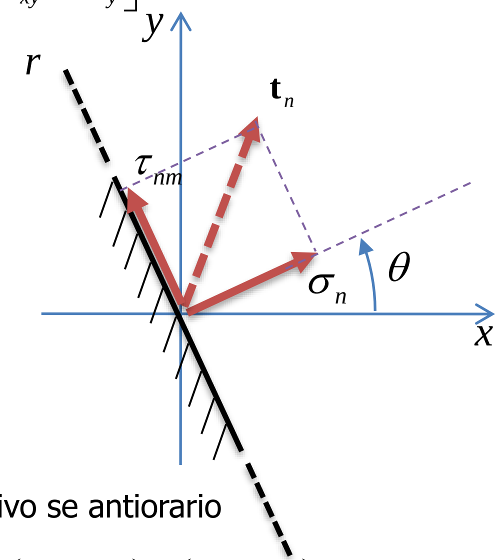
Per le proprietà di ortogonalità degli autovalori di un tensore, la direzione principale relativa al valore principale minimo σ_2 sarà contenuta nel piano di tensione ed ortogonale alla direzione $\mathbf{n}^{(1)}$.

Nella presente lezione è stato allora mostrato come calcolare, per gli stati tensionali piani, le componenti di tensione relative ad una giacitura avente normale contenuta nel piano di tensione ed i valori e le direzioni principali di tensione. Tali relazioni sono sintetizzate nella prossima slide

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Gli stati tensionali piani – sintesi

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

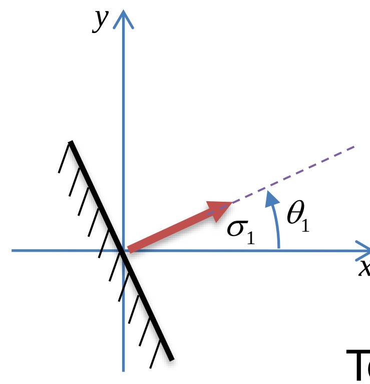


θ positivo se antiorario

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

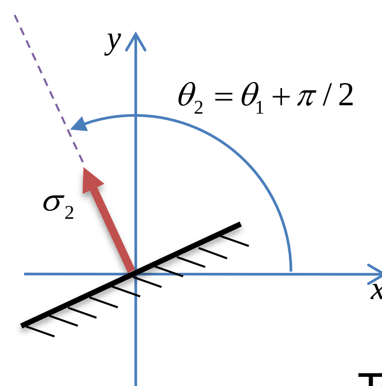
Componenti di tensione su una giacitura comunque inclinata



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{n_x^{(1)}}{n_y^{(1)}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Tensione principale massima e relativa direzione principale



$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$$

Tensione principale minima e relativa direzione principale

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

Dopo aver schematizzato le precedenti componenti di tensione, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $30°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione

Esempio

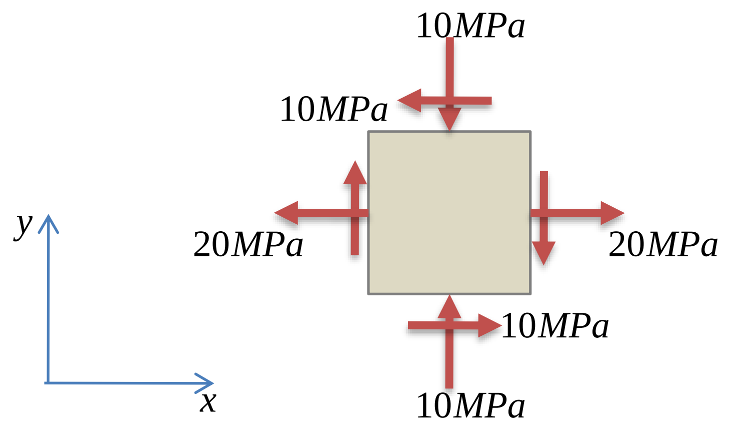
In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

Dopo aver schematizzato le precedenti componenti di tensione, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $30°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione

- Lo stato tensionale in esame può essere schematizzato come segue



Esempio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

Dopo aver schematizzato le precedenti componenti di tensione, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $30°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione

- Le componenti di tensione su una giacitura generica sono le seguenti (tensioni in MPa)

$$\sigma_n = 5 + 15\cos 2\theta - 10\sin 2\theta$$
$$\tau_{nm} = -15\sin 2\theta - 10\cos 2\theta$$

il loro valore in corrispondenza di $\theta = 30°$ è

$$\sigma_n = 3.84 MPa$$
$$\tau_{nm} = -17.99 MPa$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

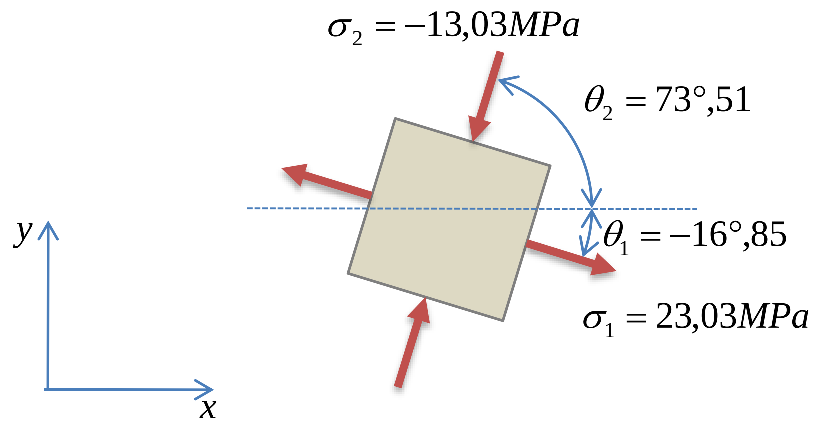
Dopo aver schematizzato le precedenti componenti di tensione, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $30°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione

- I valori e le direzioni principali sono le seguenti

$$\sigma_1 = 23{,}03 MPa$$
$$\tan 2\theta_1 = -\frac{2}{3} \rightarrow 2\theta_1 = -33°{,}69 \rightarrow \theta_1 = -16°{,}85$$
$$\sigma_2 = -13{,}03 MPa$$
$$\theta_2 = \theta_1 + 90° = 73°{,}51$$

i precedenti valori si schematizzano come segue



Esercizio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} -30 & 15 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} MPa$$

Dopo aver schematizzato le precedenti componenti di tensione, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $45°$ (in senso orario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione

Esercizio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

Dopo aver schematizzato le precedenti componenti di tensione, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $60°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione

Esercizio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 15 & 15 \end{bmatrix} MPa$$

Dopo aver schematizzato le precedenti componenti di tensione, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $15°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831