$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Dire perché è errata la seguente dimostrazione che $1 = 0$.

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{n \text{ volte}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + ... \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 + 0 + ...0 = 0.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

L'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + ... + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

non è corretta. Infatti il teorema sul limite della somma di successioni è valido quando il numero delle successioni sommate non dipende da n.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

Dimostrare le seguenti proposizioni

i) Se $\alpha > 1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) = 0, \tag{1}$$

ii) Se $\alpha < 1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) = +\infty \ . \tag{2}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Dimostriamo i). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n)^\alpha} < \underbrace{\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0,$$

dal teorema dei carabinieri si ha la (1).

Dimostriamo la ii). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n)^\alpha} > \underbrace{\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n)^\alpha}}_{n \text{ volte}} = \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha}.$$

La (2) è nuovamente conseguenza del teorema dei carabinieri in quanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha} = +\infty.$$

ESERCIZIO 3

La tabella che segue è così composta: nella prima e nella seconda colonna sono riportati (quando esistono) rispettivamente i limiti delle successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ oppure una loro proprietà. Nella terza colonna è riportato, se esiste, il limite di $\{a_n + b_n\}$, se questo limite può non esistere appare un punto interrogativo. Con l_1, l_2 si indicano due numeri reali.
Provare quanto riportato nella tabella.

$\{a_n\}$	$\{b_n\}$	$\{a_n + b_n\}$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
$+\infty$	limitata inferiormente	$+\infty$
$-\infty$	limitata superiormente	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?
non esiste	non esiste	?
non esiste	l_2	non esiste

SOLUZIONE

i) La seconda riga riporta il teorema sulla somma dei limiti.
ii) Proviamo quanto ripotato nella terza riga. Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{3}$$

e che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$b_n \geq M, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo

$$a_n + b_n \geq a_n + M.$$

Da quest'ultima, da (3) e dal teorema dei carabinieri abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

iii) La dimostrazione di quanto riportato nella quarta riga è analoga alla precedente.

iv) Mostriamo con un esempio che se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \tag{4}$$

allora il $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ può non esistere. Siano $\{a_n\} = \{(-1)^n + n\}$ e $\{b_n\} = \{-n\}$, abbiamo che vale (4), ma $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ non esiste.
v) Per quanto riguarda la quarta riga basta considerare $\{a_n\} = \{b_n\} = \{(-1)^n\}$.
vi) Per quanto riguarda la settima riga basta osservare che se il $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ esistesse allora, poiché $\{b_n\}$ è convergente e $\{a_n\} = \{a_n + b_n\} - \{b_n\}$, dovrebbe esistere anche il $\lim_{n\to\infty} a_n$, ma questo contraddice l'ipotesi.

ESERCIZIO 4

La tabella che segue è così composta: nella prima e nella seconda colonna sono riportati (quando esistono) rispettivamente i limiti delle successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ o una loro proprietà. Nella terza colonna è riportato, se esiste, il limite di $\{a_n b_n\}$, se questo limite può non esistere appare un punto interrogativo. Con l_1, l_2 si indicano due numeri reali.
Provare quanto riportato nella tabella

$\{a_n\}$	$\{b_n\}$	$\{a_n b_n\}$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
$+\infty$	$b_n \geq K > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$b_n \leq K < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$b_n \geq K > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$b_n \leq K < 0$	$+\infty$
0	limitata	0
0	$+\infty$ $(-\infty)$	?
non esiste	non esiste	?

SOLUZIONE

i) La seconda riga riporta il teorema sul prodotto dei limiti.
ii) Proviamo quanto ripotato nella terza riga. Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{5}$$

e che esista $K > 0$ tale che

$$b_n \geq K, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo

$$a_n b_n \geq K a_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Da quest'ultima, da (5) e dal teorema dei carabinieri abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty.$$

iii) La dimostrazione di quanto riportato nelle righe quarta, quinta e sesta è analoga alla precedente.

iv) Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

e che esista $M \geq 0$ tale che

$$|b_n| \leq M \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo

$$|a_n b_n| \leq M\,|a_n|\,, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Da quest'ultima e dal teorema dei carabinieri abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

v) Mostriamo con un esempio che se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \text{ (oppure } -\infty) \tag{6}$$

allora il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ può non esistere. Siano $\{a_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ e $\{b_n\} = \{n\}$ (oppure $\{b_n\} = \{-n\}$), abbiamo che vale (6), ma $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ non esiste.

vi) Per quanto riguarda la nona riga basta considerare $\{a_n\} = \{b_n\} = \{(-1)^n\}$.

ESERCIZIO 5

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche, sia $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, discutere la seguente affermazione: se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$$

SOLUZIONE

L'affermazione non è vera, infatti, basta considerare $\{a_n\} = \{n\}$ e $\{b_n\} = \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$.

ESERCIZIO 6

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche e sia $K > 0$. Supponiamo che $a_n \geq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{7}$$

Stabilire se l'affermazione precedente rimane vera anche quando $K = 0$.

SOLUZIONE

Basta osservare che

$$b_n = \frac{1}{a_n}(a_n b_n), \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e

$$0 < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{K} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se $K = 0$ la (7) può non essere soddisfatta, basta considerare $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$.

ESERCIZIO 7

Siano k un numero naturale e $\{a_n\}$ una successione numerica non negativa e tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \tag{8}$$

dove $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} +\infty, \text{ se } l = +\infty, \\ \sqrt[k]{l}\ , \text{ se } l \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Supponiamo che $l = +\infty$. Sia M un numero positivo arbitrario, dalla (8) si ha che esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che se $n > \nu$ allora $a_n > M^k$. Da ciò segue che se $n > \nu$ allora $\sqrt[k]{a_n} > M$. Perciò $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = +\infty$.
Supponiamo che $l = 0$. Sia ε un numero positivo arbitrario, dalla (8) si ha che esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che se $n > \nu$ allora $0 \leq a_n < \varepsilon^k$. Da ciò segue che se $n > \nu$ allora $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Perciò $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0$.
Supponiamo infine che l sia un numero reale positivo. Posto, per brevità, $b_n = \sqrt[k]{a_n}$ e $b = \sqrt[k]{l}$ abbiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ (sfruttando il fatto che $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)

$$|a_n - l| = \left|b_n^k - b^k\right| = |b_n - b| \sum_{j=0}^{k-1} b_n^{k-1-j} b^j \geq |b_n - b|\, b^{k-1}.$$

Perciò

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{l}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[k]{l^{k-1}}} |a_n - l|\ , \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Da quest'ultima e dal teorema dei carabinieri abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{l} \right| = 0$$

da ciò segue la tesi.

ESERCIZIO 8

Siano k un numero naturale dispari e $\{a_n\}$ una successione numerica tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

dove $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = +\infty \\ -\infty & \text{se } l = -\infty \\ \sqrt[k]{l} & \text{se } l \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

SOLUZIONE

Se $l = +\infty$ oppure l è un numero reale positivo, la dimostrazione è analoga a quella dell'esercizio precedente (tenendo presente che per il teorema della permanenza del segno esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq n_0$). Se $l = -\infty$ oppure l è un numero reale negativo, per giungere alle conclusioni basta osservare che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (-\sqrt[k]{-a_n})$ e utilizzare l'esercizio precedente. Quando $l = 0$, sia ε un numero positivo arbitrario allora esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che se $n > \nu$ allora $|a_n| < \varepsilon^k$. Perciò, se $n > \nu$ allora $\left|\sqrt[k]{a_n}\right| = \sqrt[k]{|a_n|} < \varepsilon$. quindi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0$.

ESERCIZIO 9

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche e supponiamo che

$$0 \leq a_n \leq b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0, \tag{10}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

SOLUZIONE

Da (9) abbiamo che

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n b_n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

dal teorema dei carabinieri e dalla (10) abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2} = 0.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 10}}$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}. \tag{11}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

i) Supponiamo $a > 1$. Posto $h = a - 1$, dalla disuguaglianza di Bernoulli otteniamo

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to\infty} (1 + nh) = +\infty,$$

dal teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

ii) Il caso in cui $a = 1$ è banale.
iii) Se $0 < |a| < 1$, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(|a|^{-1}\right)^n} = 0.$$

da cui si ha

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Questa uguaglianza è banalmente valida anche se $a = 0$.
iv) Supponiamo che $a \leq -1$. Consideriamo le successioni estratte $\left\{a^{2n}\right\}$ e $\left\{a^{2n+1}\right\}$. Esse hanno limiti diversi in quanto

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n} = \begin{cases} 1, & \text{se } a = -1, \\ +\infty, & \text{se } a < -1 \end{cases}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = \begin{cases} -1, & \text{se } a = -1, \\ -\infty, & \text{se } a < -1. \end{cases}$$

Da ciò segue che non esiste il $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 11}}$

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che

$$a_n \geq 0 \;\text{ e }\; b_n \geq 0 \;\text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che se

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0, \tag{12}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Basta osservare che

$$a_n \leq a_n + b_n \;\text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Da (12) e dal teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Per $\{b_n\}$ si procede in modo analogo.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 12}}$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Poniamo

$$a_n = \sqrt[n]{n} - 1, \;\text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

Poiché $a_n \geq 0$, dalla formula del binomio di Newton si ha

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + n a_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + ... + a_n^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Perciò

$$1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \leq n, \;\text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}, \;\text{ per ogni } n \geq 2,\, n \in \mathbb{N}$$

e dal teorema dei carabinieri otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n) = 1.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 13}}$

Sia $a > 0$. Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Supponiamo che $a \geq 1$, abbiamo
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}, \text{ per ogni } n \geq a,\, n \in \mathbb{N},$$
perciò dal teorema dei carabinieri otteniamo
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$
Se $0 < a < 1$, abbiamo
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 14}}$

Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Proviamo innanzitutto che
$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$
Se $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, si ha
$$n! = 2k\,(2k-1)\,...1 \geq 2k\,(2k-1)\,...k \geq k^k = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$
se $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}_0$, si ha
$$n! = (2k+1)\,2k...1 \geq (2k+1)\,2k...k \geq k^{k+1} = \left[\frac{n}{2}\right]^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

Dalle ultime due relazioni otteniamo la (13). Da (13) e dal teorema dei carabinieri otteniamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 15}}$

Sia $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty. \tag{14}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Se $\alpha \leq 0$, la (14) segue da (11) e dal teorema dei carabinieri.
Supponiamo che $\alpha > 0$ e osserviamo che
$$\frac{a^n}{n^\alpha} \geq \frac{a^n}{n^{[\alpha]+1}}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Poniamo $k = [\alpha] + 1$, $b = a - 1$. Dalla formula del binomio di Newton si ha
$$a^n = (1+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^j \geq \binom{n}{k+1} b^{k+1}, \text{ per ogni } n \geq k+1,\, n \in \mathbb{N}.$$

D'altra parte
$$\binom{n}{k+1} = \frac{n \ldots (n-k)}{(k+1)!} \geq \frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ per ogni } n \geq k+1,\, n \in \mathbb{N}.$$

Da quest'ultima e dalla (15), ricordando che $k = [\alpha] + 1$, si ha
$$\frac{a^n}{n^\alpha} \geq \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(n-k)^{k+1}}{n^k}, \text{ per ogni } n > \alpha,\, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-k)^{k+1}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k+1} = +\infty,$$
dal teorema teorema dei carabinieri si ottiene (14).

$\boxed{\text{ESERCIZIO 16}}$

Siano M_1 e M_2 due numeri reali positivi e sia $\{a_n\}$ una successione tale
$$M_1 \leq a_n \leq M_2, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1. \tag{16}$$

Dedurne che se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

dove l è un numero reale positivo allora vale la (16).

SOLUZIONE

Poiché $M_1 \le a_n \le M_2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sqrt[n]{M_1} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{M_2}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dall'esercizio 22 e dal teorema dei carabinieri si ha la (16). Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, con l numero reale positivo allora esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{l}{2} \le a_n \le \frac{3}{2}l, \text{ per ogni } n > \nu,\ n \in \mathbb{N}$$

da cui segue nuovamente la (16).

ESERCIZIO 17

Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}.$$

SOLUZIONE

Supponiamo che $\max\{a, b, c\} = c$, abbiamo

$$\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c\sqrt[n]{1 + \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n}$$

e, poiché

$$1 \le 1 + \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n \le 3,$$

dal teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c.$$

ESERCIZIO 18

Sia $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\{a_n\}$ una successione tale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l. \tag{17}$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |l| < 1 \\ +\infty & \text{se } l > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } l < -1 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Supponiamo che $|l| < 1$. Poichè (17)

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |l|,$$

dalla definizione di limite si ha che esiste ν tale che

$$|a_n| < \frac{1+|l|}{2}, \text{ per ogni } n > \nu,\ n \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$|(a_n)^n| < \left(\frac{1+|l|}{2}\right)^n, \text{ per ogni } n > \nu,\ n \in \mathbb{N}.$$

Poiché $0 < \frac{1+|l|}{2} < 1$, dal teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 0.$$

Supponiamo che $l > 1$, $l \in \mathbb{R}$. Dalla definizione di limite si ha che esiste ν tale che

$$a_n > \frac{1+l}{2}, \text{ per ogni } n > \nu,\ n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Quindi

$$(a_n)^n > \left(\frac{1+l}{2}\right)^n, \text{ per ogni } n > \nu,\ n \in \mathbb{N}.$$

Poiché $\frac{1+l}{2} > 1$, dal teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = +\infty. \tag{19}$$

Se $l = +\infty$ si ottiene nuovamente la (19). Infatti, sia M un numero reale maggiore di 1 esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che

$$a_n > M, \text{ per ogni } n > \nu,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ora, supponiamo che $l < -1$. Poniamo

$$b_n = (a_n)^n.$$

Abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = +\infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = -\infty. \tag{20}$$

Infatti

$$b_{2n} = \left(a_{2n}^2\right)^n,$$

d'altra parte $\lim_{n\to\infty} a_{2n}^2 = l^2 > 1$, perciò per quanto stabilito prima si la prima delle (20). Inoltre

$$b_{2n} = \left(a_{2n+1}^2\right)^n a_{2n+1},$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}^2 = l^2 > 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = l < -1$ si ottiene la seconda delle (20). La (20) implica che il limite $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n$ non esiste.

ESERCIZIO 19*

Sia $l \in \mathbb{R}^*$ e sia $\{a_n\}$ una successione tale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = l.$$

SOLUZIONE

Distinguiamo i casi $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$ e $l = -\infty$.
1) $l \in \mathbb{R}$. In questo caso basta supporre che $l = 0$, si può infatti osservare che

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} - l = \frac{(a_1 - l) + (a_2 - l) + ... + (a_n - l)}{n}.$$

Supponiamo, quindi, che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\left|\frac{a_n}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{21}$$

D'altra parte, poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0-1}}{n} = 0,$$

esiste $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, tale che se $n \geq n_1$, $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0-1}}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

Da (21) e (22) si ha, se $n \geq n_1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| \leq \left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0-1}}{n}\right| +$$

$$+ \left|\frac{a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{n - n_0}{n}\right) < \varepsilon$$

e ciò conclude la dimostrazione del primo caso.
2) $l = +\infty$. Sia $M > 0$ e sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ allora

$$a_n > 4M.$$

Sia $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, tale che se $n \geq n_1$, $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0 - 1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dalle ultime due relazioni abbiamo che se $n \geq 2n_1$, $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq - \left| \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0 - 1}}{n} \right| +$$

$$+ \frac{a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n}{n} > -M + 4M \left(\frac{n - n_0}{n} \right) > -M + \frac{4M}{2} = M.$$

3) Il caso $l = -\infty$ si riconduce al caso precedente considerando $\{-a_n\}$.

ESERCIZIO 20*

i) Trovare una successione $\{a_n\}$ limitata che non abbia limite e tale che esista finito il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

ii) Trovare una successione $\{a_n\}$ non limitata che non abbia limite e tale che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = +\infty.$$

SOLUZIONE

i) Basta considerare $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$.
ii) Basta considerare $\{a_n\}$ definita nel modo seguente

$$a_n = \begin{cases} 2^n, \text{ se } n \text{ è pari,} \\ 1, \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

ESERCIZIO 21*

Sia $l \in \mathbb{R}^*$ e sia $\{a_n\}$ una successione numerica. Provare che se

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - a_{n-1}) = l$$

allora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = l.$$

SOLUZIONE

Poniamo

$$b_n = a_n - a_{n-1}, \text{ per ogni } n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l$$

e

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{n} + \frac{b_2 + b_3 + ...b_n}{n}$$

abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1}{n} + \frac{b_2 + b_3 + ...b_n}{n} \right) = l.$$

ESERCIZIO 22

Sia $\{a_n\}$ la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

stabilire se $\{a_n\}$ ammette limite ed eventualmente calcolarlo.

SOLUZIONE

Per come è definita la successione $\{a_n\}$ si ha che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Infatti, procedendo per induzione, per $n = 1$ si ha $a_1 = 0 < \sqrt{2} = a_2$. Supponiamo che $a_n \leq a_{n+1}$, allora

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2},$$

perciò la (23) è vera.
Ora mostriamo che $\{a_n\}$ è limitata anche superiormente. A tale scopo è sufficiente provare che

$$a_n \leq 2 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Anche in questo caso procediamo per induzione. Ovviamente per $n = 1$ si ha $a_1 \leq 2$. Supponiamo che $a_n \leq 2$ abbiamo

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Poiché $\{a_n\}$ è monotòna e limitata allora essa converge ad un numero reale (non negativo) l. Quindi

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + l}$$

e per trovare l basta risolvere l'equazione

$$l = \sqrt{2 + l},$$

la cui unica soluzione non negativa è $l = 2$. Perciò

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 23}}$

Sia $\{a_n\}$ la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

stabilire se $\{a_n\}$ ammette limite ed eventualmente calcolarlo.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

La successione $\{a_n\}$ non ha limite. Infatti si ha

$$a_{2n+1} = 2, \quad a_{2n} = \frac{1}{2}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{2} \neq 2 = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1},$$

non esiste il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 24}}$

Sia $\{a_n\}$ la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = 2a_n - 1, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

stabilire se $\{a_n\}$ ammette limite ed eventualmente calcolarlo.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si verifica facilmente per induzione che

$$a_n \geq 3, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Inoltre $\{a_n\}$ è crescente. Infatti

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 1, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

da cui, tenuto conto di (24), si ha $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè $\{a_n\}$ è monotona essa ammette limite, indichiamo tale limite con l, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Per la (24), si deve avere che $l \geq 3$, quindi il caso $l = -\infty$ deve essere escluso, ma si deve escludere anche il caso in cui $l \in \mathbb{R}$. Infatti se questo accadesse avremmo $l = 1$ in quanto

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2a_n - 1) = 2l - 1.$$

Perciò

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$