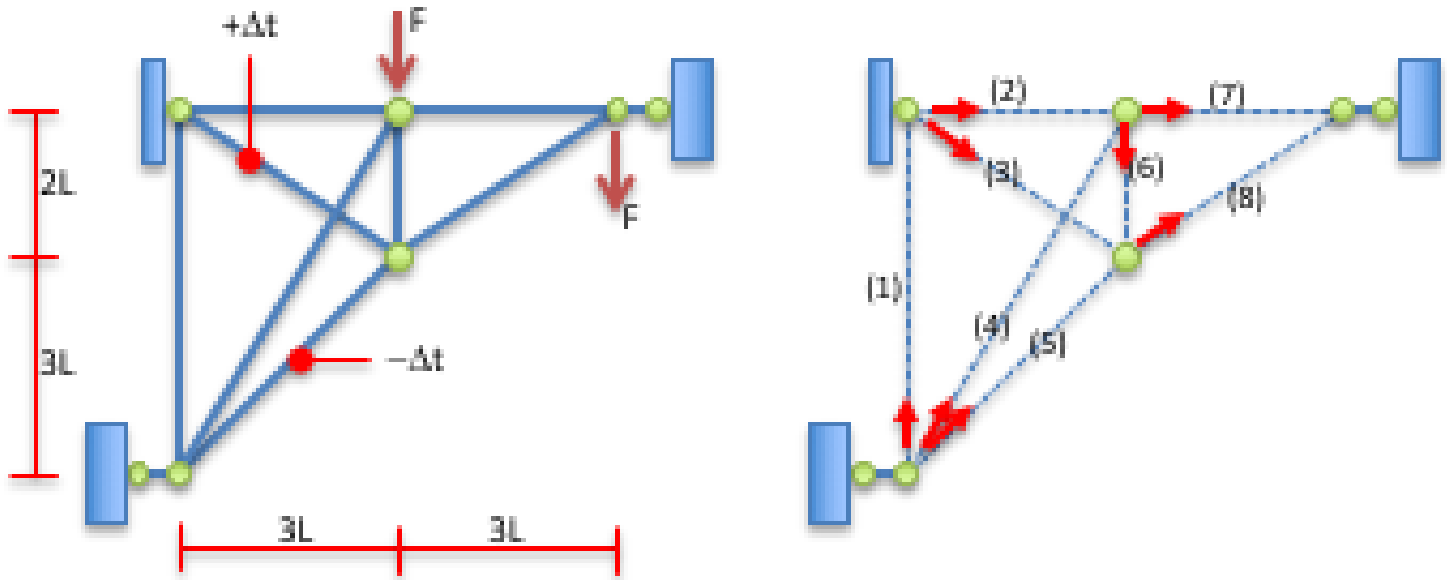


## Analisi di una struttura reticolare iperstatica



DATI:

$F = 10 \text{ kN};$      $L = 1 \text{ m};$      $E = 210 \text{ GPa};$   
 $\Delta t = 20^\circ\text{C};$      $A = 150 \text{ mm}^2;$      $\alpha = 11.6 \cdot 10^{-6}$   
 $\Delta = 2 \text{ mm};$

### Ordinamento delle variabili (solo promemoria)

Le variabili in gioco saranno ordinate come segue:

$u = [u_{Ax}; u_{Ay}; u_{Bx}; u_{By}; u_{Cx}; u_{Cy}; u_{Dx}; u_{Dy}; u_{Gx}; u_{Gy}]$

$u_f = [u_{By}; u_{Cx}; u_{Cy}; u_{Dx}; u_{Dy}; u_{Gy}]$

Forze =  $[F_{By}; F_{Cx}; F_{Cy}; F_{Dx}; F_{Dy}; F_{Gy}] \rightarrow$  Forze =  $[0; 0; -F; 0; 0; -F]$

$u_v = [u_{Ax}; u_{Ay}; u_{Bx}; u_{Gx}] \rightarrow \Delta_{\text{Est}} = [-\Delta; 0; 0; 0]$

$R = [R_{Ax}; R_{Ay}; R_{Bx}; R_{Gx}]$

$N = [N_1; N_2; N_3; N_4; N_5; N_6; N_7; N_8];$

$\Delta_{\text{aste}} = [d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6; d_7; d_8];$  <-- allungamenti nelle aste

$\Delta_{\text{Anelast}} = [da_1; da_2; da_3; da_4; da_5; da_6; da_7; da_8]; \rightarrow$

```
= [ 0; 0; +alfa Dt L3; 0; -alfa Dt L5; 0; 0; 0];
```

```
% funzione per il calcolo del versore B-A
vers = @(B,A) (B-A) / sqrt((B-A)'*(B-A));
% funzione per il calcolo del modulo B-A
modulo = @(B,A) sqrt((B-A)'*(B-A));
```

## 1. Definizione delle azioni/matrici di congruenza/matrice di rigidezza

### Geometria

```
syms L El Ar % El = modulo elastico, Ar = area
assume([0 0 0]<=[L El Ar])
```

```
% coordinate dei punti (componenti per colonna)
A = [0; 5*L]; B = [0; 0]; C = [3*L; 5*L];
D = [3*L; 3*L]; G = [6*L; 5*L];
```

### Azioni

```
syms F Delta % si indica genericamente con F l'intenzità della forza
% il valore di riferiemnto del carico applicato
Forze = [0; 0; -F; 0; 0; -F];
```

```
syms alpha Dt Delta % coeff. di dilatazione termica e Delta temperatura
DAnelast = alpha*Dt* [0; 0; modulo(D,A); 0; -modulo(D,B); 0; 0; 0]; % allungamento
DeltaEst = [-Delta; 0; 0; 0]; % cedimenti vincolari esterni
```

### Matrici di congruenza

```
% Matrice C, Cf e Cv
vAB = vers(A,B);
vCA = vers(C,A);
vDA = vers(D,A);
vCB = vers(C,B);
vDB = vers(D,B);
vDC = vers(D,C);
vGC = vers(G,C);
vGD = vers(G,D);
zero = [0; 0];

Ctot = [ vAB', -vAB', zero', zero', zero';...
        -vCA', zero', vCA', zero', zero';...
        -vDA', zero', zero', vDA', zero';...
        zero', -vCB', vCB', zero', zero';...
        zero', -vDB', zero', vDB', zero';...
        zero', zero', -vDC', vDC', zero';...
        zero', zero', -vGC', zero', vGC'];...
```

zero', zero', zero', -vGD', vGD']

Ctot =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\sigma_2 = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\sigma_3 = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

$$\sigma_4 = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

```
IndLib = [4, 5, 6, 7, 8, 10];
```

```
IndVinc = [1, 2, 3, 9];
```

```
Cf = Ctot(:, [IndLib])
```

Cf =

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_3 & 0 \\ -\sigma_1 & \frac{3\sqrt{34}}{34} & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & -\sigma_3 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

$$\sigma_2 = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\sigma_3 = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

```
Cv = Ctot(:, [IndVinc])
```

Cv =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{2\sqrt{13}}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{34}}{34} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}$$

## Matrice di rigidzza assiale

```
mAB = modulo(A, B);
mCA = modulo(C, A);
mDA = modulo(D, A);
mCB = modulo(C, B);
mDB = modulo(D, B);
```

```

mDC = modulo(D,C);
mGC = modulo(G,C);
mGD = modulo(G,D);

kel = El*Ar*diag([1/mAB, 1/mCA, 1/mDA, ...
                 1/mCB, 1/mDB, 1/mDC, ...
                 1/mGC, 1/mGD])

```

kel =

$$\begin{pmatrix}
\frac{Ar El}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{34} Ar El}{34L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2} Ar El}{6L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ar El}{2L} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1
\end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{13} Ar El}{13L}$$

$$\sigma_2 = \frac{Ar El}{3L}$$

```

% clear mBA mDA mDB mCB mCA mCD
% clear vBA vDA vDB vCB vCA vCD vAx vAy vBx vCy vDy
% clear Ctot IndVinc IndLib

```

## Calcolo attraverso le equazioni del metodo degli spostamenti

### 2. Calcoli preliminari (metodo degli spostamenti)

```
Fhat = Forze - Cf'*kel*Cv*DeltaEst + Cf'*kel*DAnelast
```

Fhat =

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\frac{Ar \Delta El}{3L} \\ -F \\ \frac{3 \sqrt{13} Ar Dt El \alpha}{13} - \sigma_1 - \frac{9 \sqrt{13} Ar \Delta El}{169 L} \\ \frac{6 \sqrt{13} Ar \Delta El}{169 L} - \sigma_1 - \frac{2 \sqrt{13} Ar Dt El \alpha}{13} \\ -F \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2} Ar Dt El \alpha}{2}$$

$$Krig = Cf' * kel * Cf$$

$$Krig =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{Ar EI}{5 L} + \sigma_1 + \sigma_2 & -\sigma_3 & -\sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_1 & 0 \\ -\sigma_3 & \frac{2 Ar EI}{3 L} + \frac{9 \sqrt{34} Ar EI}{1156 L} & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 + \sigma_2 & 0 & -\sigma_4 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 + \frac{18 \sqrt{13} Ar EI}{169 L} & \sigma_1 & \sigma_5 \\ -\sigma_1 & 0 & -\sigma_4 & \sigma_1 & \sigma_4 + \sigma_1 + \frac{8 \sqrt{13} Ar EI}{169 L} & -\sigma_6 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & -\sigma_6 & \sigma_6 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2} Ar EI}{12 L}$$

$$\sigma_2 = \frac{25 \sqrt{34} Ar EI}{1156 L}$$

$$\sigma_3 = \frac{15 \sqrt{34} Ar EI}{1156 L}$$

$$\sigma_4 = \frac{Ar EI}{2 L}$$

$$\sigma_5 = -\frac{6 \sqrt{13} Ar EI}{169 L}$$

$$\sigma_6 = \frac{4 \sqrt{13} Ar EI}{169 L}$$

### 3. Calcolo degli spostamenti nodali (metodo degli spostamenti)

```
uf = inv(Krig)*Fhat;
```

### 4. Calcolo degli allungamenti assiali (metodo degli spostamenti)

```
dassiali = Cf*uf + Cv*DeltaEst;
```

### 5. Calcolo degli sforzi normali (metodo degli spostamenti)

```
SfNorm = kel*(dassiali-DAnelast);
```

### 6. Calcolo delle reazioni vincolari (metodo degli spostamenti)

```
Reaz = Cv'*SfNorm;
```

## Cacolo

```
% sostituzione per lunghezze generiche
DaSost = [El, Ar, L, alpha, Dt, F, Delta];
Valori = [210000, 150, 1000, 11.6*10^(-6), 20, 10000, 2];

table({'N_1='; 'N_2='; 'N_3='; 'N_4='; 'N_5='; 'N_6='; 'N_7='; 'N_8='}, ...
      double(subs(SfNorm, DaSost, Valori)), ...
      {'N'; 'N'; 'N'; 'N'; 'N'; 'N'; 'N'; 'N'})
```

ans = 8×3 table

	Var1	Var2	Var3
1	'N_1='	2.0751e+04	'N'
2	'N_2='	1.2563e+04	'N'
3	'N_3='	-1.3544e+03	'N'
4	'N_4='	-8.0213e+03	'N'
5	'N_5='	-1.9619e+04	'N'
6	'N_6='	-3.1218e+03	'N'
7	'N_7='	8.4365e+03	'N'
8	'N_8='	-1.8028e+04	'N'

```
table({'H_A='; 'V_A='; 'H_B='; 'H_G='}, ...
      double(subs(Reaz, DaSost, Valori)), ...
      {'N'; 'N'; 'N'; 'N'})
```

ans = 4×3 table

	Var1	Var2	Var3
1	'H_A='	-1.1437e+04	'N'
2	'V_A='	20000	'N'
3	'H_B='	18000	'N'
4	'H_G='	-6.5635e+03	'N'

```
table({'delta_1='; 'delta_2='; 'delta_3='; 'delta_4='; 'delta_5='; 'delta_6='; 'delta_7='; 'delta_8='}, ...
      double(subs(dassiali, DaSost, Valori)), ...
      {'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'})
```

ans = 8×3 table

	Var1	Var2	Var3
1	'delta_1='	3.2939	'mm'
2	'delta_2='	1.1965	'mm'



	Var1	Var2	Var3
3	'delta_3='	0.6815	'mm'
4	'delta_4='	-1.4848	'mm'
5	'delta_5='	-3.6268	'mm'
6	'delta_6='	-0.1982	'mm'
7	'delta_7='	0.8035	'mm'
8	'delta_8='	-2.0635	'mm'

```
table({ 'uBy'; 'uCx'; 'uCy'; 'uDx'; 'uDy'; 'uGy'},...
      double(subs(uf, DaSost, Valori)),...
      {'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'; 'mm'})
```

ans = 6×3 table

	Var1	Var2	Var3
1	'uBy'	-3.2939	'mm'
2	'uCx'	-0.8035	'mm'
3	'uCy'	-4.5434	'mm'
4	'uDx'	-4.0778	'mm'
5	'uDy'	-4.3451	'mm'
6	'uGy'	-14.1818	'mm'