La sicurezza strutturale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Criteri di resistenza per materiali duttili

Sommario

Nella presente lezione saranno descritti due criteri di resistenza utilizzabili per materiali duttili (es. metalli).

Visto che per i metalli il limite del livello di sollecitazione ammessa coincide con la soglia di snervamento, per tali materiali è possibile parlare anche di *criteri di snervamento*.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Criteri di snervamento per i metalli

Negli scorsi decenni sono state condotte delle estese campagne sperimentali che hanno evidenziato alcune caratteristiche comuni a molti materiali metallici. In particolare si è visto che il limite di snervamento dei metalli è

- pressoché uguale a trazione ed a compressione;
- pressoché indipendente dalla eventuale presenza di una pressione uniforme (idrostatica).

Per tale motivo un qualunque criterio di snervamento per i metalli deve avere le seguenti caratteristiche:

- deve essere simmetrico rispetto al segno delle sollecitazioni, ossia deve prevedere lo stesso valore (assoluto) di snervamento a prescindere dal segno della sollecitazione;
- deve essere indipendente dalla eventuale presenza di una pressione idrostatica.

Criteri di snervamento per i metalli

Tra gli altri, sono stati sviluppati due criteri di snervamento che hanno avuto soddisfacenti conferme sperimentali e che soddisfano i requisiti elencati nella precedente slide:

1. il criterio di Tresca, Guest e de Saint Venant, che utilizza la massima (in valore assoluto) tensione tangenziale come valore equivalente allo stato tensionale presente in un punto materiale;
2. il criterio di von Mises, Huber e Henky, che utilizza, come valore equivalente allo stato tensionale presente in un punto materiale, il secondo invariante del tensore deviatorico degli sforzi.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Criterio di Tresca

Come si è detto, il criterio di Tresca utilizza la massima (in valore assoluto) tensione tangenziale come misura dello stato tensionale presente in un certo punto materiale. Ricordando (v. circonferenza di Mohr) che la tensione tangenziale massima è pari alla metà della differenza tra i valori principali di tensione ed indicando con K_T uno sforzo (da determinare sperimentalmente come si vedrà nelle prossime slide) che rappresenti il valore di snervamento del materiale, il criterio di Tresca richiede che siano soddisfatte le seguenti relazioni:

$$2\tau_{\max} = \max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|\} \leq K \qquad (1)$$

ossia che la massima tensione tangenziale sia inferiore al valore di snervamento del materiale.

Ovviamente, i valori σ_I, σ_{II} e σ_{III} nella (1) rappresentano le tensioni principali presenti nel generico punto materiale in esame.

Il coefficiente di sicurezza relativo al criterio di Tresca può essere definito come segue:

$$s = \frac{K}{2\tau_{\max}} \qquad (2)$$

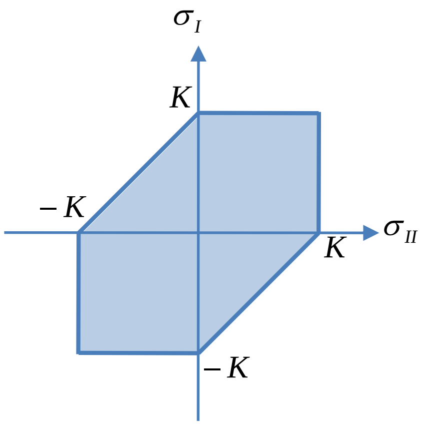
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Criterio di Tresca: stati tensionali piani

Per stati tensionali piani ($\sigma_{III}=0$) il criterio di Tresca (1) si può scrivere come segue:

$$-K \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq K \qquad -K \leq \sigma_I \leq K \qquad -K \leq \sigma_{II} \leq K \tag{3}$$

Diagrammando le (3) nel piano delle tensioni principali (σ_I, σ_{II}) si ottiene il dominio elastico riportato di seguito.



Stati tensionali corrispondenti a punti interni al dominio in figura sono (elasticamente) ammissibili per il materiale secondo il criterio di Tresca, mentre stati tensionali corrispondenti a punti sulla frontiera del dominio rappresentano situazioni di crisi (snervamento).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Criterio di von Mises

Si è detto nelle precedenti slide che, sulla base dei risultati di estese campagne sperimentali, un criterio di snervamento per i metalli deve essere indipendente dalle componenti di tensione equivalenti a pressioni uniformi (idrostatiche).

Si può dimostrare che la pressione idrostatica (positiva se di compressione) presente in un generico punto materiale interno ad un continuo è pari a meno un terzo la traccia del tensore di Cauchy, ossia

$$p = -\frac{1}{3} tr(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{4}$$

Pertanto lo stato tensionale "depurato" della componente di pressione idrostatica può essere misurato attraverso il tensore deviatorico delle tensioni definito come segue:

$$dev(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\boldsymbol{\sigma}})\underline{\mathbf{I}} \tag{5}$$

Si osservi che la traccia del precedente tensore è nulla.

Criterio di von Mises

I criteri di resistenza descritti si riferiscono a materiali isotropi. Le caratteristiche meccaniche di tali materiali sono invarianti rispetto ad una rotazione del sistema di riferimento. Pertanto anche la misura dello stato di sollecitazione utilizzata nella definizione di criteri di resistenza (o di snervamento) per tali materiali deve essere invariante rispetto ad una rotazione del sistema di riferimento. I criteri di resistenza descritti in precedenza utilizzano infatti gli autovalori del tensore di tensione che, come è ben noto, sono invarianti rispetto ad una rotazione del sistema di riferimento utilizzato.

Il criterio di von Mises utilizza invece l'invariante secondo (somma dei prodotti degli autovalori) del tensore deviatorico (5) che è pari a:

$$J_2 = -\frac{1}{3}\left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I\sigma_{II} - \sigma_{II}\sigma_{III} - \sigma_I\sigma_{III}\right) \qquad (6)$$

In particolare, tale criterio definisce una tensione efficace come segue

$$\sigma_e = -\sqrt{3J_2} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I\sigma_{II} - \sigma_{II}\sigma_{III} - \sigma_I\sigma_{III}} \qquad (7)$$

e prevede che essa sia inferiore ad un valore limite Y da determinare sperimentalmente

$$\sigma_e \leq Y \qquad (8)$$

Il coefficiente di sicurezza relativo al criterio di von Mises può essere definito come segue:

$$s = Y / \sigma_e \qquad (9)$$

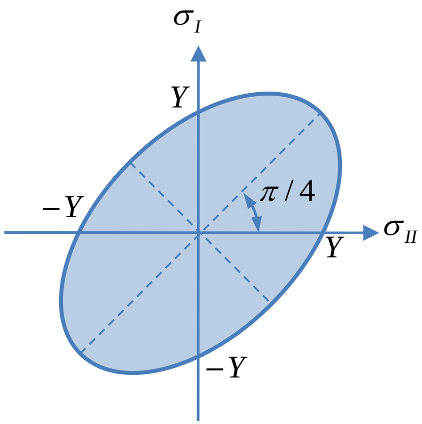
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Criterio di von Mises: stati tensionali piani

Per stati tensionali piani ($\sigma_{III}=0$) il criterio di von Mises (7) si può scrivere come segue:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \leq Y \tag{8}$$

Diagrammando la (8) nel piano delle tensioni principali (σ_I, σ_{II}) si ottiene il dominio elastico riportato di seguito.



Tale dominio ha forma di un ellisse. Stati tensionali corrispondenti a punti interni al dominio in figura sono (elasticamente) ammissibili per il materiale secondo il criterio di Tresca, mentre stati tensionali corrispondenti a punti sulla frontiera del dominio rappresentano situazioni di crisi (snervamento).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Determinazione sperimentale dei parametri di resistenza

I termini di confronto (K e Y) rappresentano il valore che la tensione efficace (definita rispettivamente secondo Tresca o secondo von Mises) assume in corrispondenza del limite elastico. Tali valori possono essere determinati attraverso prove sperimentali come ad esempio quella di trazione o di torsione.

Limiti elastici sperimentali: prova di trazione

La prova di trazione permette di determinare la tensione di snervamento σ_Y.
In tale prova, in corrispondenza dello snervamento si ha:

$$\sigma_I = \sigma_Y \qquad \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

Applicando i criteri di Tresca e von Mises a questo stato tensionale si calcola

$$K = (2\tau_{\max})_Y = \sigma_Y \qquad Y = (\sigma_e)_Y = \sigma_Y$$

Identificando allora il parametro di resistenza del materiale attraverso la prova assiale, le tensioni efficaci relative ai criteri di Tresca e von Mises si confrontano direttamente con la tensione normale di snervamento del materiale ed i criteri si scrivono pertanto come segue:

Criterio di Tresca		Criterio di von Mises
$2\tau_{\max} = \max\{\lvert\sigma_I - \sigma_{II}\rvert, \lvert\sigma_{II} - \sigma_{III}\rvert, \lvert\sigma_I - \sigma_{III}\rvert\} \le \sigma_Y$	Espress. generale	$\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I\sigma_{II} - \sigma_{II}\sigma_{III} - \sigma_I\sigma_{III}} \le \sigma_Y$
$-\sigma_Y \le \sigma_I - \sigma_{II} \le \sigma_Y \quad -\sigma_Y \le \sigma_I \le \sigma_Y \quad -\sigma_Y \le \sigma_{II} \le \sigma_Y$	Stati tensionali piani	$\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}} \le \sigma_Y$
$s = \dfrac{\sigma_Y}{2\tau_{\max}}$	Coeff. di sicurezza	$s = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_e}$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Limiti elastici sperimentali: confronti

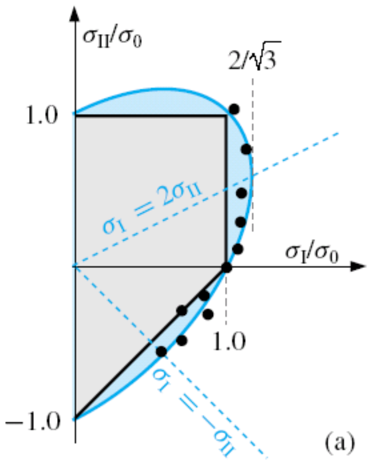


Figura tratta da Comi-Corradi

------------ *Direzioni in cui si hanno i massimi scarti tra le due descrizioni*

• *Risultati di prove sperimentali*

Sovrapponendo i domini elastici relativi ai criteri di Tresca e di von Mises, particolarizzati identificando il parametro di snervamento attraverso la prova di trazione si ottengono i domini in figura. È evidente che, in questo caso, il criterio di Tresca è più conservativo (a vantaggio di sicurezza) di quello di von Mises. Le differenze massime fra le previsioni di snervamento dei due domini è dell'ordine del 15%.

In figura sono riportati anche alcuni punti relativi a risultati sperimentali che sembrano in buon accordo con il criterio di von Mises.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831