1) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \ , & \text{se } x > 0, \\ k^2 - 1 - x \ , & \text{se } x \leq 0 \ . \end{cases}$$

è continua o discontinua in $\mathbb{R}$ e stabilire la natura degli eventuali punti di discontinuità di f.

2) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+k^2}} \ , & \text{se } x > 0, \\ e^{k^2} - x \ , & \text{se } x \leq 0 \ . \end{cases}$$

è continua o discontinua in $\mathbb{R}$ e stabilire la natura degli eventuali punti di discontinuità di f.

3) Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x^2 + 1\right) \ , & \text{se } x < 1, \, x \geq 2, \\ ax + b \ , & \text{se } 1 \leq x < 2 \ . \end{cases}$$

è continua nei punti 1 e 2.

4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$f(1) = 2, \, f(2) = -1, \, f(7) = 1, \, \lim_{x \to +\infty} f = 0$$

dimostrare che esistono almeno tre soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

e almeno due soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0.$$

5) Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tali che

$$(f(x))^2 = x^2, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

6) Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tali che

$$(f(x))^2 = x^2 + 2, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

7) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Può accadere che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$? In caso affermativo esibire un esempio, in caso negativo giustificare la risposta.

8) Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Può accadere che $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$? In caso affermativo esibire un esempio, in caso negativo giustificare la risposta.

9) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Può accadere che $f((0, +\infty)) = [-2, 2]$? In caso affermativo esibire un esempio, in caso negativo giustificare la risposta.

10) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Può accadere che $f([1, 2]) = (0, 1]$? In caso affermativo esibire un esempio, in caso negativo giustificare la risposta.

11) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$|f(x)| \leq x^2 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che f è continua in 0.

12) Fornire un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinua in due punti e tale che

$$(f(x))^2 = x^2, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$