Elementi di meccanica del continuo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Il solido di *de Saint Venant*: espressione delle tensioni normali

Rem. Il problema di de Saint Venant – congruenza interna

Affinché sia garantita la condizione di integrabilità del campo di deformazione, esso deve soddisfare le seguenti equazioni di congruenza interna

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}; \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}; \tag{9}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right); \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right); \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right);$$

Sostituendo i legami costitutivi nelle precedenti relazioni di integrabilità ed utilizzando le equazioni di equilibrio (SV1) si ottengono le seguenti relazioni di integrabilità del campo di deformazione espresse in termini di componenti di tensione

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \tag{SV5}$$

In pratica, le precedenti relazioni rappresentano la condizione che deve essere rispettata dalle componenti di tensione presenti nel solido di de Saint-Venant affinché il corrispondente campo di deformazione soddisfi le condizioni di congruenza interna o di integrabilità.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Espressione delle tensioni normali

Le equazioni contenute nella prima riga delle condizioni di integrabilità (SV5)

$$\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x\partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}\right)=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y\partial z};\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}\right)=-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x\partial z} \qquad \textbf{(SV5)}$$

coinvolgono solo la componente di tensione normale σ_z e consentono di determinare la sua più generica espressione che garantisce il soddisfacimento (di questa parte) delle condizioni di congruenza interna.

Le equazioni contenute nella seconda riga delle (SV5) caratterizzano invece le espressioni delle tensioni tangenziali. La loro interpretazione generale non è immediata e richiede particolari strumenti matematici e pertanto non è discussa in questa sede.

Le prime tre equazioni delle (SV5) impongono l'annullamento delle derivate seconde di σ_z, mentre la quarta equazione comporta che σ_z sia indipendente da un termine in xy. Pertanto, per qualunque distribuzione di carichi sulle basi del solido di de Saint Venant, l'espressione più generale di σ_z è la seguente forma bilineare

$$\sigma_z = a + a_1x + a_2y - z\left(b + b_1x + b_2y\right) \qquad (13)$$

Il valore delle costanti contenute nella precedente espressione dipende dalle caratteristiche della sollecitazione (SV6) presenti nella sezione trasversale del solido.

Espressione delle tensioni normali

Considerando che per ipotesi gli assi x ed y sono baricentrici per le sezioni trasversali del solido, i momenti statici della sezione trasversale rispetto a tali assi sono nulli e pertanto si ha

$$S_x = \int_A y dA = 0 \qquad S_y = \int_A x dA = 0 \tag{14}$$

Utilizzando le (14), sostituendo la (13) nelle (SV6) si ha:

$$\begin{aligned} N(z) &= \int_A \sigma_z dA = (a - zb)A \\ M_x(z) &= \int_A \sigma_z y dA = (a_1 - zb_1)\int_A xy dA + (a_2 - zb_2)\int_A y^2 dA \\ -M_y(z) &= \int_A \sigma_z x dA = (a_1 - zb_1)\int_A x^2 dA + (a_2 - zb_2)\int_A xy dA \end{aligned} \tag{15}$$

La terza delle (SV7.2 e SV7.3) implica che lo sforzo normale presente nell'asta sia costante. Pertanto, sostituendo la prima delle (15) nella terza delle (SV7.2) si ha

$$N(z) = (a - zb)A = N^0 = \mathrm{cost} \rightarrow \mathrm{b} = 0 \quad \Longrightarrow \quad N(z) = aA \rightarrow a = \frac{N(z)}{A} = \frac{N^0}{A} \tag{16}$$

Risultano così determinate due delle costanti presenti nella (13)

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Espressione delle tensioni normali

Per la definizione di momento d'inerzia e centrifugo si ha

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad I_y = \int_A x^2 dA = 0 \qquad I_{xy} = \int_A xy dA \tag{17}$$

E quindi la seconda e la terza delle (15) possono essere scritte più convenientemente come segue

$$\begin{aligned} M_x(z) &= (a_1 - zb_1) I_{xy} + (a_2 - zb_2) I_x \\ -M_y(z) &= (a_1 - zb_1) I_y + (a_2 - zb_2) I_{xy} \end{aligned} \tag{18}$$

Sostituendo la quarta e quinta delle (SV7.2) nelle precedenti ed eguagliando le parti costanti e lineari di ambo i membri si ha

$$\begin{aligned} &a_1 = -\frac{1}{D}\left(M_x^0 I_{xy} + M_y^0 I_x\right); \quad a_2 = \frac{1}{D}\left(M_x^0 I_y + M_y^0 I_{xy}\right); \\ &b_1 = -\frac{1}{D}\left(T_x^0 I_x + T_y^0 I_{xy}\right); \quad b_2 = \frac{1}{D}\left(T_x^0 I_{xy} + T_y^0 I_y\right); \\ &D = I_x I_y - I_{xy}^2 \end{aligned} \tag{19}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Espressione delle tensioni normali

Sostituendo le (19) e le (16) nella (13) si ha la seguente espressione per le tensioni normali

$$\sigma_z = \frac{N^0}{A} - \frac{1}{D}\left(M_x^0 I_{xy} + M_y^0 I_x\right)x + \frac{1}{D}\left(M_x^0 I_y + M_y^0 I_{xy}\right)y + \\ -\frac{z}{D}\left(-\left(T_x^0 I_x + T_y^0 I_{xy}\right)x + \left(T_x^0 I_{xy} + T_y^0 I_y\right)y\right) \qquad (20)$$

Assumendo che gli assi x ed y, oltre ad essere baricentrici, siano anche principali d'inerzia per la sezione trasversale, la relazione (20) si semplifica come segue

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x}y - \frac{M_y(z)}{I_y}x \qquad (21)}$$

La precedente relazione, nota come *formula di Navier*, rappresenta l'espressione più generale che può essere assunta dalle tensioni normali σ_z affinché esse soddisfino le condizioni di integrabilità contenute nella prima riga delle (SV5)

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Solido di de Saint-Venant

La tenso-flessione per il solido di de Saint Venant

Domanda:

In aggiunta alla «scommessa» iniziale

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yy} = 0$$

la seguente condizione

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x \quad (21) \qquad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

è soluzione di un qualche particolare problema del solido di de Saint-Venant?

Per verificarlo, vediamo se tutte le equazioni che governano il problema sono soddisfatte.

N.B. Si ricorda che la soluzione del problema elastico lineare esiste ed è unica.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Rem.

$N(z)=\int_A \sigma_z dA$ *Sforzo normale*

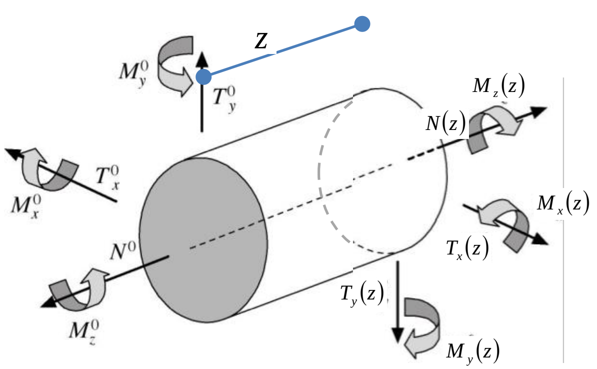
$\boxed{T_x(z)}=\cancel{\int_A \tau_{zx} dA}$ **=0** *Taglio in direzione x*

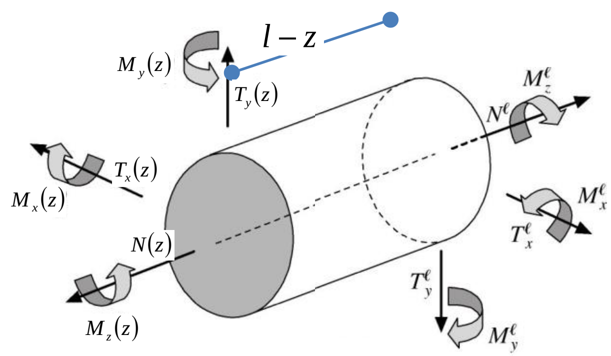
$\boxed{T_y(z)}=\cancel{\int_A \tau_{zy} dA}$ **=0** *Taglio in direzione y*

$M_x(z)=\int_A \sigma_z y dA$ *Momento flettente in direzione x*

$M_y(z)=-\int_A \sigma_z x dA$ *Momento flettente in direzione y*

$\boxed{M_z(z)}=\int_A (\cancel{\tau_{zy} x}-\cancel{\tau_{zx} y})dA$ **=0** *Momento torcente*





(SV6)

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Rem.

Le risultanti delle azioni applicate sulle basi e le caratteristiche della sollecitazione devono soddisfare le seguenti relazioni di equilibrio

$$N^\ell = N^0 \qquad \boxed{T_x^\ell = T_x^0} \qquad \boxed{T_y^\ell = T_y^0}$$

$$\boxed{M_z^\ell = M_z^0} \qquad M_x^\ell = M_x^0 + \cancel{\ell T_y^0} \qquad M_y^\ell = M_y^0 - \cancel{\ell T_x^0} \qquad \text{(SV7.1)}$$

$$\begin{aligned}
\cancel{T_x(z)} &= \boxed{T_x^0} \mathbf{=0}\\
\cancel{T_y(z)} &= \boxed{T_y^0} \mathbf{=0}\\
N(z) &= N^0\\
M_x(z) &= M_x^0 + \cancel{zT_y^0}\\
M_y(z) &= M_y^0 - \cancel{zT_x^0}\\
\cancel{M_z(z)} &= \boxed{M_z^0} \mathbf{=0}
\end{aligned} \qquad \text{(SV7.2)}$$

$$\begin{aligned}
\cancel{T_x(z)} &= \boxed{T_x^\ell} \mathbf{=0}\\
\cancel{T_y(z)} &= \boxed{T_y^\ell} \mathbf{=0}\\
N(z) &= N^\ell\\
M_x(z) &= M_x^\ell - \cancel{(l-z)T_y^0}\\
M_y(z) &= M_y^\ell + \cancel{(l-z)T_x^0}\\
\cancel{M_z(z)} &= \boxed{M_z^l} \mathbf{=0}
\end{aligned} \qquad \text{(SV7.3)}$$

Pertanto

- Le azioni applicate alle basi devono essere tali che

$$N^l = N^0 \qquad T_x^l = T_x^0 = 0 \qquad T_y^l = T_y^0 = 0$$

$$M_z^l = M_z^0 = 0 \qquad M_x^l = M_x^0 \qquad M_y^l = M_y^0$$

- Le caratteristiche della sollecitazione assumono i seguenti valori

$$T_x(z) = 0 \qquad T_y(z) = 0 \qquad M_z(z) = 0$$

$$N(z) = N^0 \qquad M_x(z) = M_x^0 \qquad M_y(z) = M_y^0$$

- Pertanto, la tensione normale σ_z è indipendente da *z*

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \qquad (22)$$

Rem. Il problema di de Saint Venant – riepilogo

Identicamente soddisfatte

Equazioni di dominio

$$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}} = 0 \\ \cancel{\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}} = 0 \\ \cancel{\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}} + \cancel{\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}} + \cancel{\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}} = 0 \end{cases}$$

(SV1) equazioni di equilibrio

Condizioni al contorno

$$\cancel{\tau_{xz} n_x} + \cancel{\tau_{yz} n_y} = 0 \qquad \forall P \in \partial B_m$$

(SV3)

(*) forniscono le derivate delle funzioni spostamento

$$\begin{cases} \{\underline{\sigma}\} = [S]\{\underline{\varepsilon}\} \\ \{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E}; \qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

(SV2) equazioni di congruenza e legame costitutivo

Soddisfatte «globalmente»

$$\left.\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} & \forall P \in \partial B_{bf} \\ \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix} & \forall P \in \partial B_{bi} \end{array}\right\}$$

(SV4)

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Integrabilità delle funzioni deformazione

Visto che le condizioni di integrabilità (SV5) sono soddisfatte

Soddisfatte dalla (22)

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z}$$

(SV5)

Identicamente soddisfatte dalla (22) e da $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \qquad (22)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Tenso-flessione

Visto che tutte le equazioni che governano il problema sono soddisfatte, le condizioni

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \qquad (22)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yy} = 0$$

rappresentano l'unica soluzione relativa al solido di de Saint-Venant caricato sulle basi da sforzo normale e momento flettente