Elementi di meccanica del continuo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

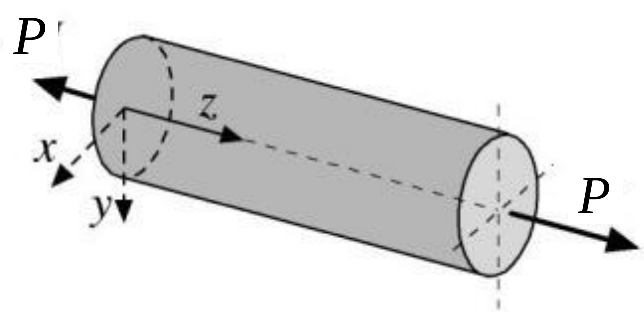
Il solido di *de Saint Venant*

Sforzo normale

Sforzo normale

Si considera adesso il problema del solido di de Saint Venant sottoposto a delle azioni sulle basi tali che le componenti della risultante e del momento risultante siano le seguenti

$$N^{\ell} = N^0 = P$$
$$T_x^{\ell} = T_x^0 = T_y^{\ell} = T_y^0 = 0$$
$$M_x^{\ell} = M_x^0 = M_y^{\ell} = M_y^0 = M_z^{\ell} = M_z^0 = 0$$



Dalle (SV7) si determinano le caratteristiche della sollecitazione presenti nel solido

$$T_x(z) = 0 \qquad M_x(z) = 0$$
$$T_y(z) = 0 \qquad M_y(z) = 0 \qquad (23)$$
$$N(z) = P \qquad M_z(z) = 0$$

Il problema in esame è allora quello di un'asta soggetta ad uno sforzo normale costante

Sforzo normale

Utilizzando le (23) l'espressione della tensione normale (22) assume la seguente forma

$$\sigma_z = \frac{P}{A} \tag{24}$$

Le equazioni di congruenza e di legame costitutivo condensate nelle (SV2) si particolarizzano, quindi, come segue

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{P}{EA} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{P}{EA} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{EA} \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Integrando la prima riga delle precedenti equazioni si ottengono

$$u = -\nu \frac{P}{EA} x + \bar{u}(y,z) \qquad v = -\nu \frac{P}{EA} y + \bar{v}(x,z) \qquad w = \frac{P}{EA} z + \bar{w}(x,y) \tag{26}$$

È immediato verificare che, se si pone $\bar{u}(y,z) = \bar{v}(x,z) = \bar{w}(x,y) = 0$ le precedenti relazioni, e quindi tutte le altre relazioni del problema, sono identicamente verificate e quindi, per il teorema di unicità della soluzione del problema elastico lineare, la precedente è LA soluzione del problema dello sforzo normale (definita a meno di un moto rigido).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sforzo normale – sintesi della soluzione

In sintesi, la soluzione del problema elastico in esame è la seguente:

- componenti di tensione

$$\sigma_z = \frac{P}{A} \qquad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \qquad \forall P \in B$$

- componenti di spostamento

$$u = -\nu \frac{P}{EA} x \qquad v = -\nu \frac{P}{EA} y \qquad w = \frac{P}{EA} z \qquad \forall P \in B$$

- componenti di deformazione: dalle precedenti si calcolano

$$\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{EA} = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{P}{EA} = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \varepsilon_z$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sforzo normale – OSSERVAZIONI

OSSERVAZIONE 1

La soluzione del problema di de Saint Venant dello sforzo normale è congruente con quanto sviluppato in riferimento a un'asta (in materiale elastico lineare) sollecitata assialmente (parte preliminare all'analisi delle strutture reticolari).

OSSERVAZIONE 2

Gli spostamenti che risolvono il problema dello sforzo normale sono stati determinati a meno di un moto rigido. È facile dimostrare che la seguente

$$u = -\nu \frac{P}{EA} x + c_1 \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \qquad \sigma_z = \frac{P}{A}$$

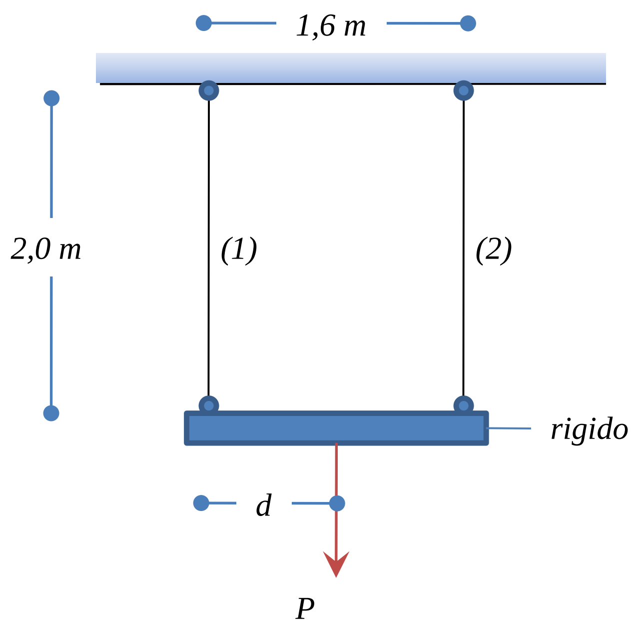
$$v = -\nu \frac{P}{EA} y + c_2 \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{EA} = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

$$w = \frac{P}{EA} z + c_3 \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{P}{EA} = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \varepsilon_z$$

è anch'essa una soluzione del problema dello sforzo normale qualunque sia il valore delle costanti c_1, c_2 e c_3. Il **teorema di Kirchhoff** assicura infatti **l'unicità della soluzione** del problema elastico **a meno di un moto rigido** (rappresentato appunto dalle costanti di integrazione contenute nelle precedenti relazioni).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio (tratto da Craig, p. 96)



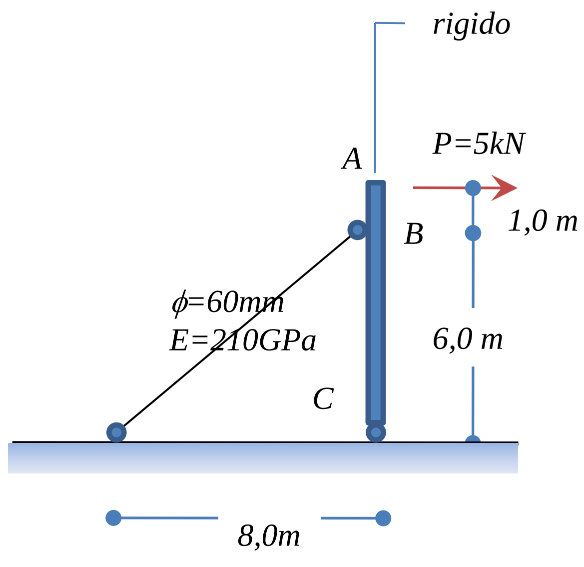
Una barra rigida e priva di peso è caricata da una forza concentrata P ed è sostenuta da due pendoli come schematizzato in figura. I due pendoli hanno inizialmente la stessa lunghezza ($2\ m$) e sono realizzati nello stesso materiale. Le loro sezioni trasversali sono rettangolari ed hanno le seguenti dimensioni:

asta 1: $b_1=40mm;\ h_1=20mm$

asta 2: $b_2=50mm;\ h_2=25mm$

a) In che posizione d deve essere applicato il carico in modo tale che l'asta rigida rimanga orizzontale?
b) Se le deformazioni longitudinali delle aste sono pari a $\varepsilon_1=\varepsilon_2=500\mu$ ed il carico $P=205kN$, quanto vale il modulo elastico del materiale?
c) Se il carico P applicato come descritto ai punti precedenti provoca una diminuzione della larghezza b_2 dell'asta (2) da 50 a $49.9918mm$, quanto vale il coefficiente di Poisson del materiale?

Esercizio (tratto da Craig, p. 96)



Si calcoli lo spostamento orizzontale del punto A dello schema in figura nell'ipotesi che il tratto AC sia rigido.

Esercizio

P [kN]	ΔL [mm]
0.0	0.000
9.3	0.050
14.9	0.200
17.7	0.325
22.4	0.675
25.2	1.00
26.6	1.33
27.5	1.68
28.4	2.00
28.6	2.33
28.9	2.68
28.4	3.00
27.5	3.33
26.1	3.68

Un provino a sezione trasversale circolare (diametro $15mm$, lunghezza iniziale $50mm$) è sottoposto ad una prova di trazione monoassiale dalla quale si ricavano i dati riportati in tabella.

- Si tracci un diagramma in cui si riportano in ascissa le deformazioni assiali ed in ordinata le tensioni nominali relative ai dati riportati in tabella
- Si determini il modulo di elasticità del materiale
- Si determini il valore di tensione ultima

Esercizio

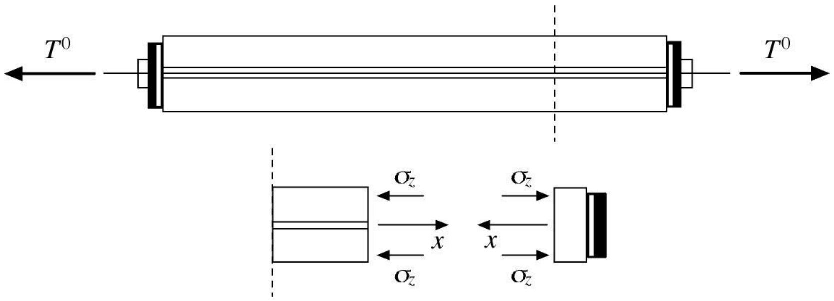
Un tubo a sezione trasversale circolare cava (lunghezza $3.5m$, diametro esterno $100mm$, spessore $15mm$) è sottoposto ad una compressione assiale $P=600kN$. Se il materiale di cui è costituito il tubo ha modulo elastico $E=210GPa$ e coefficiente di Poisson $\nu=0.30$, si determini:

-la variazione di lunghezza dell'elemento

-la variazione di spessore della sezione trasversale

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio (tratto da Nunziante, p. 425)



L'elemento schematizzato in figura è costituito da un elemento forato all'interno del quale è posto un cavo libero di scorrere senza attrito. Il cavo viene preteso con un tiro T_0 e poi ancorato agli estremi dell'elemento esterno. Si calcoli

- lo sforzo normale presente nei due elementi
- la variazione di lunghezza dell'assemblaggio

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831