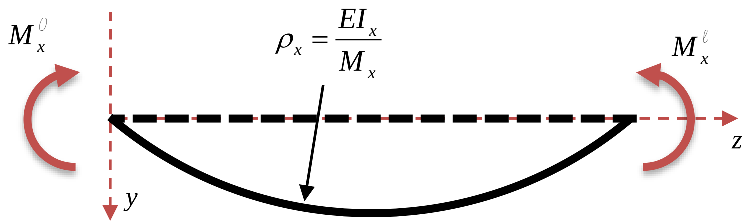
Il solido di de Saint-Venant

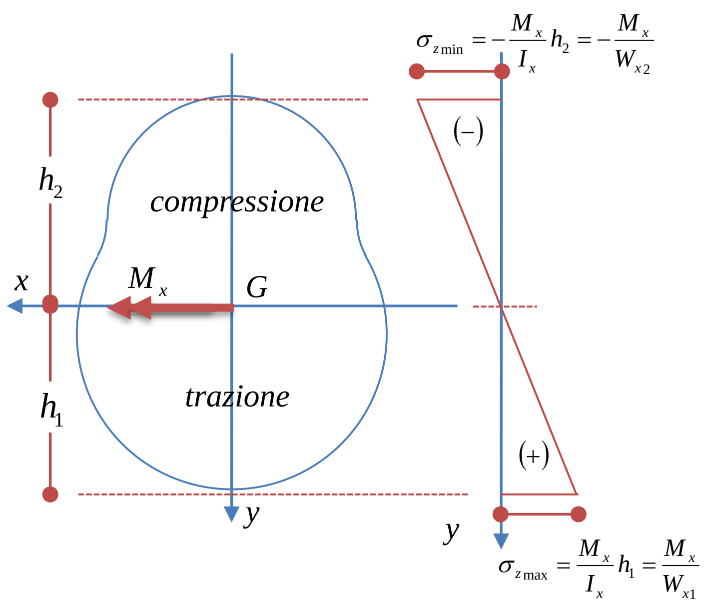
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Flessione deviata

Sommario: flessione retta Mx





Si è visto che un'asta caricata sulle basi da due coppie uguali ed opposte come indicato in figura

$$M_x^0 = M_x^\ell = M_x$$

è sollecitata da un momento flettente (caratteristica della sollecitazione) positivo costante

$$M_x(z) = M_x$$

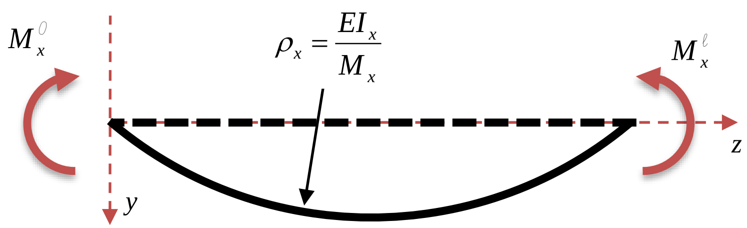
Le tensioni normali σ_z, le deformazioni assiali ε_z presenti in una generica sezione trasversale e la curvatura si calcolano mediante le seguenti relazioni

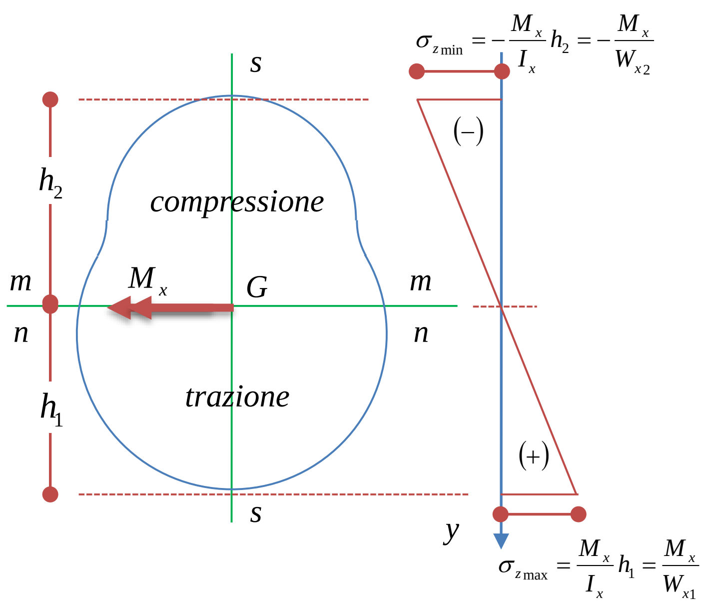
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \qquad \chi_x(z) = \frac{\partial \varphi_x(z)}{\partial z} = \frac{M_x}{EI_x} = \frac{1}{\rho_x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sommario: flessione retta Mx



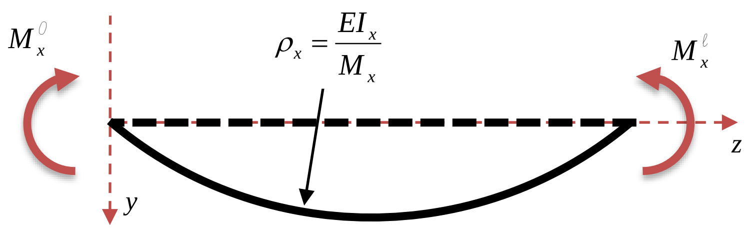


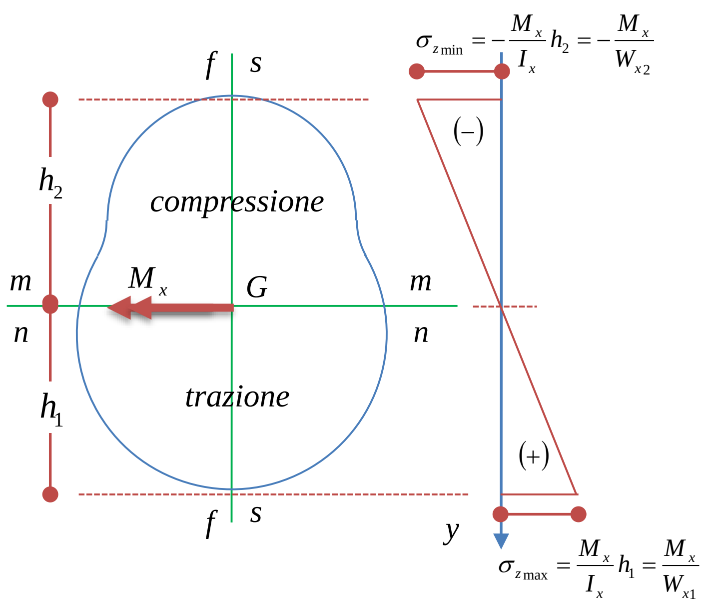
Per il caso in esame il piano di sollecitazione è yz e quindi, in una generica sezione trasversale, l'asse di sollecitazione coincide con l'asse y. L'asse momento, che è, per come è stato definito, sempre ortogonale all'asse di sollecitazione, coincide con l'asse x. Si è visto che quest'ultimo è anche asse neutro per la sezione: per la flessione retta M_x l'asse momento e l'asse neutro coincidono.

Inoltre, un momento flettente M_x positivo genera trazione nei punti "al di sotto" dell'asse neutro (o meglio, aventi ordinata $y>0$) e compressione nei punti "al di sopra" dell'asse neutro (aventi ordinata $y<0$) . La curvatura legata a $M_x>0$ ha concavità rivolta verso l'alto (verso la parte negativa dell'asse y)

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

OSSERVAZIONE E DEFINIZIONE: flessione retta Mx





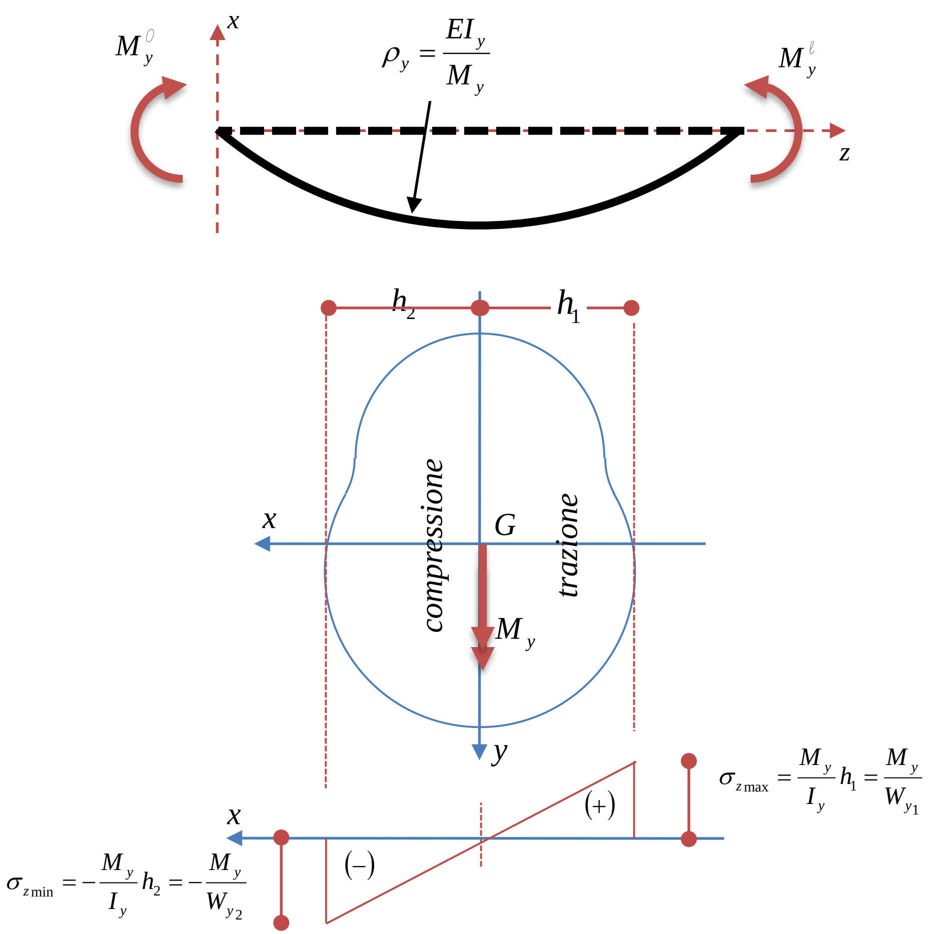
Per una trave sollecitata da un momento flettente M_x, i punti appartenenti al suo asse (ossia i baricentri delle sezioni trasversali) hanno solo spostamenti in direzione y. L'asse della trave, allora, si deforma in una curva contenuta nel piano yz.

Si definisce *__piano di inflessione__* il piano che contiene l'asse deformato di una trave inflessa. Si definisce invece *__asse di inflessione__* la traccia del piano di inflessione su una generica sezione trasversale.

Gli assi che caratterizzano la flessione retta M_x sono indicati nella sezione a fianco.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sommario: flessione retta My



Analogamente, un'asta caricata sulle basi da due coppie uguali ed opposte come indicato in figura

$$M_y^0 = M_y^\ell = M_y$$

è sollecitata da un momento flettente (caratteristica della sollecitazione) <u>positivo costante</u>

$$M_y(z) = M_y$$

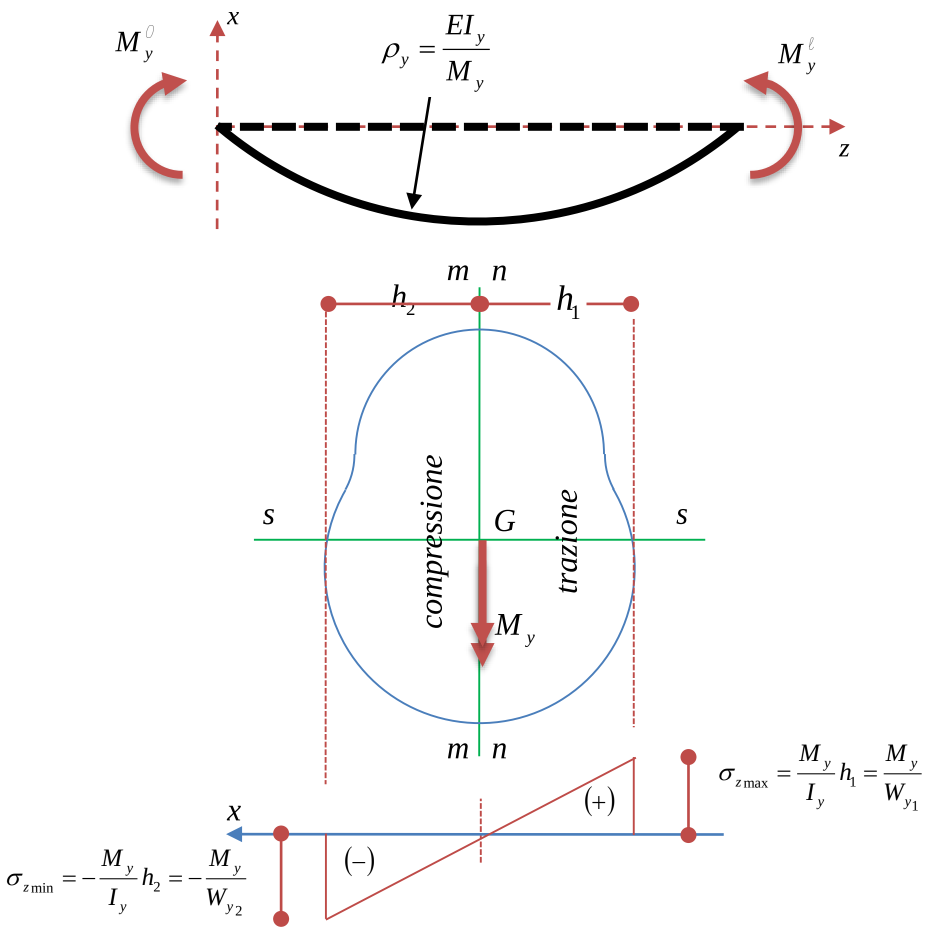
Le tensioni normali σ_z e le deformazioni assiali ε_z presenti in una generica sezione trasversale e la curvatura si calcolano mediante le seguenti relazioni

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x \qquad \chi_y(z) = \frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial z} = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{1}{\rho_y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = -\frac{M_y}{EI_y} x$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sommario: flessione retta My

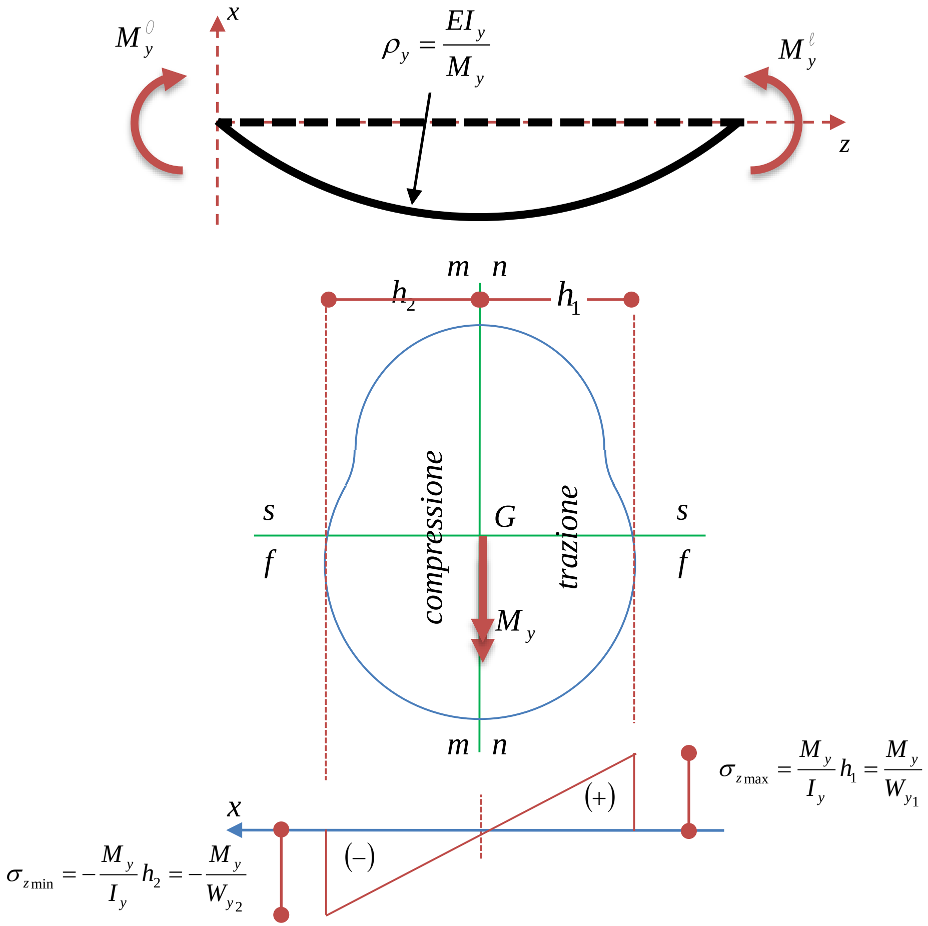


In questo caso, il piano di sollecitazione è zx quindi, in una generica sezione trasversale, l'asse di sollecitazione coincide con l'asse x e l'asse momento, che è sempre ortogonale all'asse di sollecitazione, coincide con l'asse y che è anche asse neutro per la sezione. Anche in questo caso, come sempre per flessione retta, l'asse momento e l'asse neutro coincidono.

Un momento flettente M_y positivo genera trazione nei punti aventi ascissa $x<0$ e compressione nei punti aventi ascissa $x>0$.

La curvatura legata a $M_y>0$ ha concavità rivolta verso l'alto la parte positiva dell'asse x.

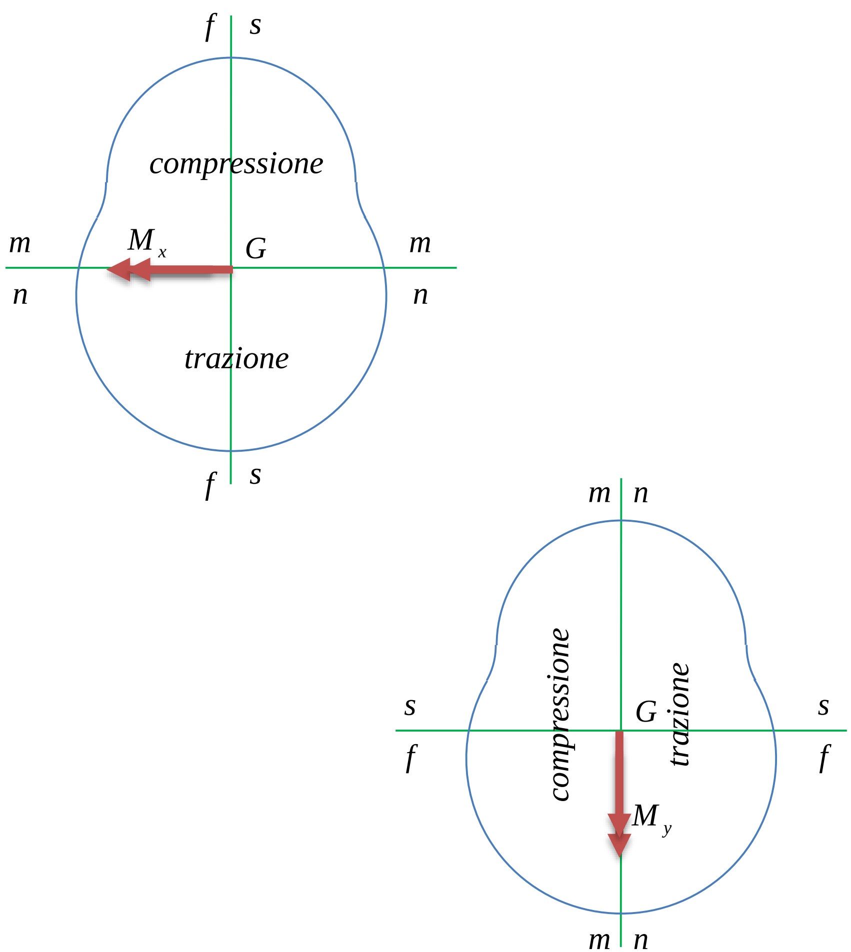
Piano ed asse di flessione per flessione retta My



Per una trave sollecitata da un momento flettente M_y, i punti appartenenti al suo asse hanno solo spostamenti in direzione x. L'asse della trave, allora, si deforma in una curva contenuta nel piano zx.

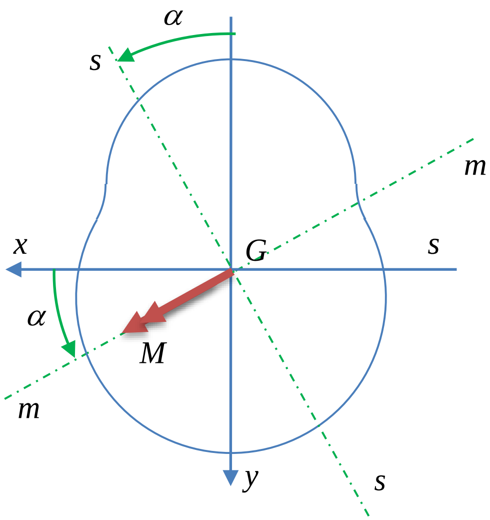
Pertanto, in questo caso, il piano di inflessione è zx, mentre l'asse di inflessione è x come indicato nella figura a fianco.

Flessione retta: osservazioni



1. L’asse momento è sempre ortogonale all’asse di sollecitazione (per costruzione);
2. nel caso di flessione retta, l’asse neutro coincide con l’asse momento. Inoltre, l’asse di flessione coincide con l’asse di sollecitazione. Quest’ultima condizione indica che i punti dell’asse si spostano nella direzione della sollecitazione: ad esempio, i punti dell’asse di una trave sollecitata da carichi gravitazionali (ed in flessione retta) si sposteranno verticalmente.
3. Si dimostra che l’asse di flessione è sempre ortogonale all’asse neutro, anche per il caso di flessione deviata che sarà trattata di seguito.

La flessione deviata



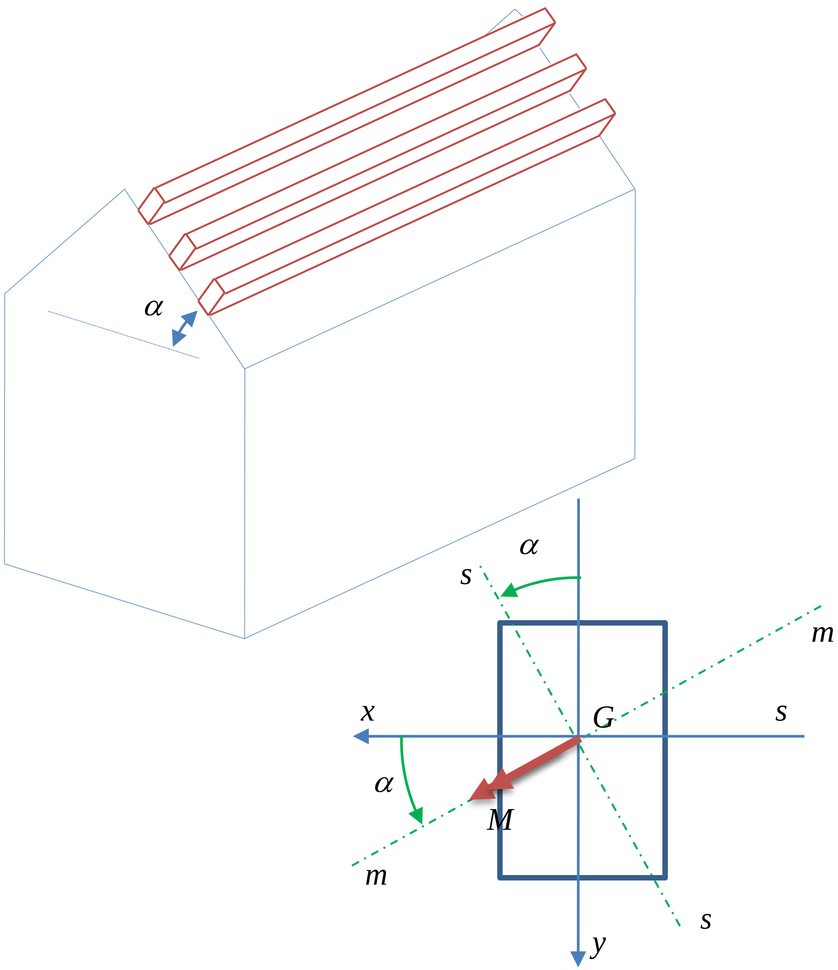
Si consideri una trave sollecitata su un piano che non contiene gli assi principali d'inerzia delle sezioni trasversali.

Ricordando che, per costruzione, gli assi x ed y del sistema di riferimento che stiamo utilizzando sono principali d'inerzia per le sezioni trasversali, per il caso che ci accingiamo ad analizzare, in corrispondenza di una generica sezione trasversale, l'asse di sollecitazione e l'asse momento non coincideranno con gli assi x ed y del sistema di riferimento.

α *Angolo di cui deve ruotare in senso antiorario l'asse x per sovrapporsi all'asse momento come indicato in figura.*

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata



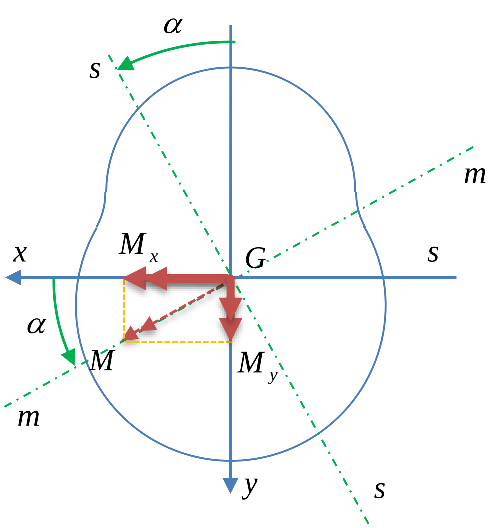
Una sollecitazione di flessione deviata è ad esempio quella che si ha negli arcarecci di un tetto del tipo schematizzato in figura.

I carichi gravitazionali sollecitano infatti gli arcarecci secondo un piano verticale che non contiene un asse principale d'inerzia delle sezioni trasversali in quanto questi sono inclinati secondo la pendenza del tetto.

N.B. ovviamente, la trave qui analizzata non è una trave di de Saint Venant, ma è richiamata in questa sede solo a scopo «descrittivo»

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata



α *Angolo di cui deve ruotare in senso antiorario l'asse x per sovrapporsi all'asse momento come indicato in figura.*

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo riferirci alle componenti del momento M nelle direzioni x ed y che si calcolano come segue

$$M_x = M \cos\alpha \qquad M_y = M \sin\alpha \tag{37}$$

Utilizzando la formula di Navier (22) e i legami costitutivi, possiamo calcolare il valore della tensione normale σ_z e della deformazione assiale ε_z come segue

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \qquad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y - \frac{M_y}{EI_y} x \tag{38}$$

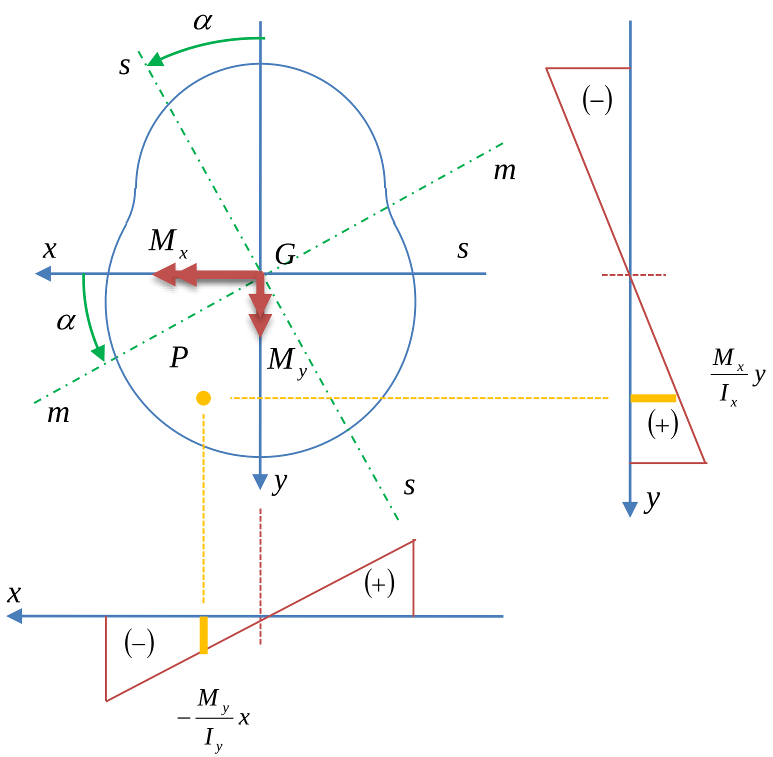
Il problema della flessione deviata può allora essere affrontato semplicemente come sovrapposizione di due flessioni rette.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata

$$M_x = M\cos\alpha$$

$$M_y = M\sin\alpha$$



Ad esempio, la tensione normale presente in un punto P di coordinate x,y è pari alla somma del contributo dovuto alla flessione retta M_x

$$\frac{M_x}{I_x}y$$

ed a quello dovuto alla flessione retta M_y

$$-\frac{M_y}{I_y}x$$

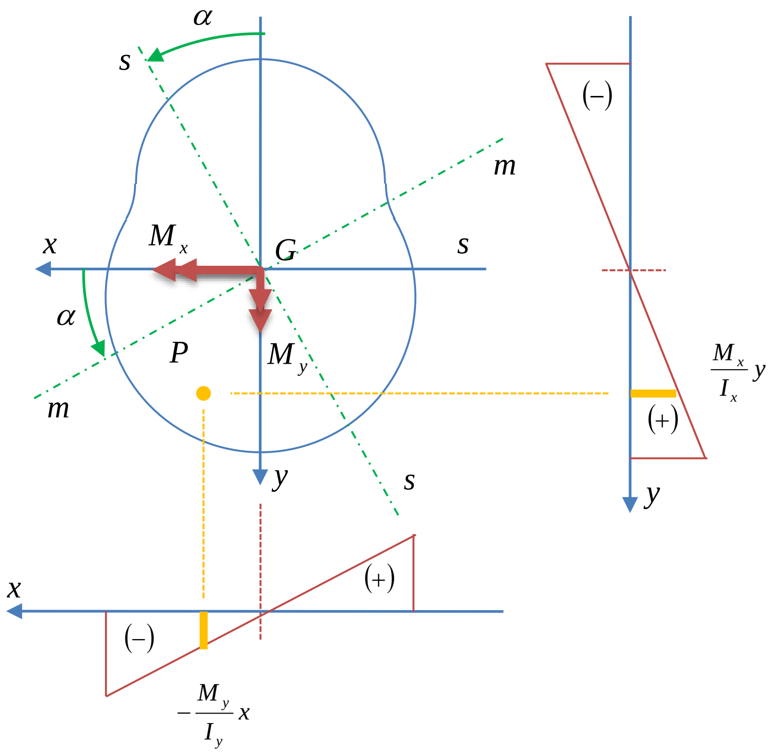
Come individuare i punti scarichi della sezione (asse neutro) e quelli maggiormente sollecitati?

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata – asse neutro

$$M_x = M\cos\alpha$$

$$M_y = M\sin\alpha$$



Per definizione, per i punti della sezione appartenenti all'asse neutro si ha

$$\sigma_z = 0$$

e quindi dalla (38) si ottiene

$$\frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x = 0 \rightarrow y = \frac{M_y}{M_x}\frac{I_x}{I_y}x \qquad (39)$$

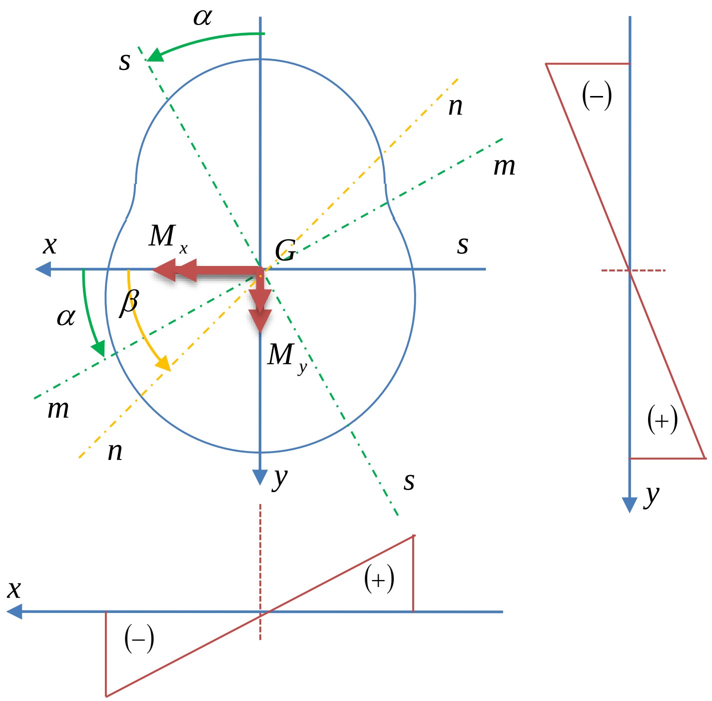
La precedente è l'equazione di una retta (appunto l'asse neutro) passante per l'origine. Nel caso di flessione deviata, allora, l'asse neutro contiene ancora il baricentro della sezione.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata – asse neutro

$$M_x = M \cos\alpha$$

$$M_y = M \sin\alpha$$



Indicando con β l'angolo che l'asse neutro forma con l'asse x come indicato in figura, dalla (39) si calcola

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x}\frac{I_x}{I_y}$$

Ricordando le (37), la precedente relazione si può scrivere convenientemente come segue

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{I_x}{I_y}\tan\alpha \qquad (40)$$

In generale, allora, l'asse neutro non coincide con l'asse momento, se non per i casi particolari di

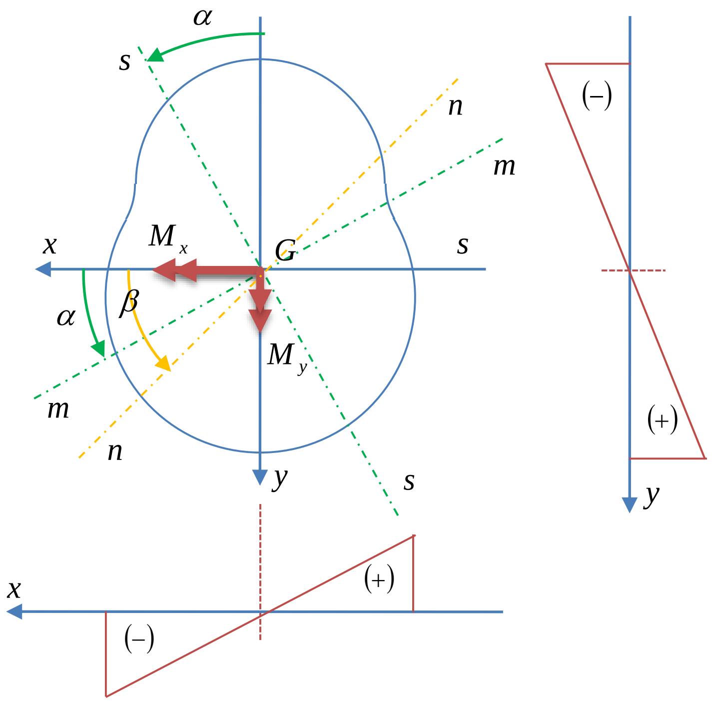
$$\alpha = 0; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = \pi; \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}; \quad \cdots$$

ossia per i casi particolari di flessione retta.

La flessione deviata – tensioni normali

$$M_x = M \cos\alpha$$

$$M_y = M \sin\alpha$$

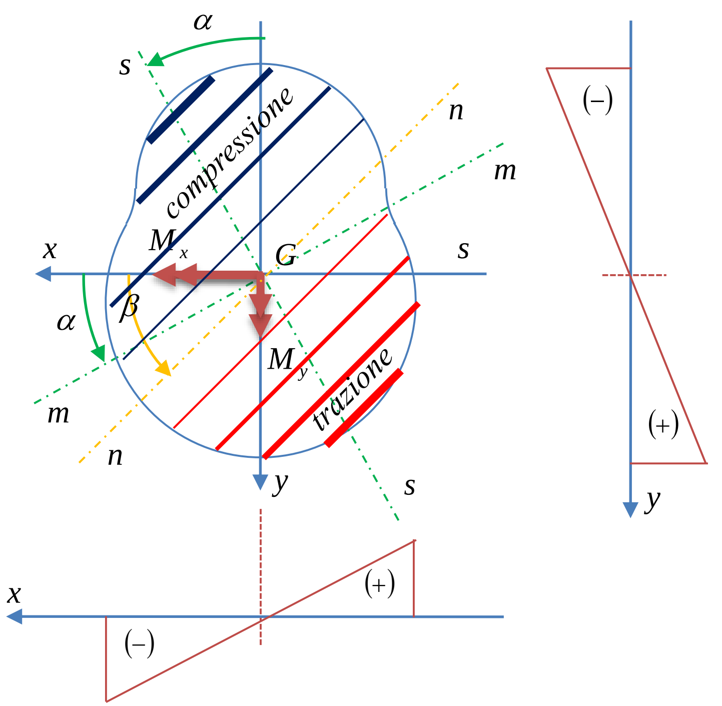


Si osservi che, per la prima delle (38), le tensioni normali, somma dei due diagrammi schematizzati in figura, hanno un andamento bilineare nel piano xy e si annullano, come si è visto, in corrispondenze dell'asse neutro.

La flessione deviata – tensioni normali

$$M_x = M\cos\alpha$$

$$M_y = M\sin\alpha$$



Si osservi che, per la prima delle (38), le tensioni normali, somma dei due diagrammi schematizzati in figura, hanno un andamento bilineare nel piano xy e si annullano, come si è visto, in corrispondenze dell'asse neutro.

Questo significa che i punti della sezione allineati parallelamente all'asse neutro sono sollecitati dalla stessa tensione normale che aumenta linearmente, in valore assoluto, man mano che ci allontaniamo dall'asse neutro.

Gli spessori delle linee in figura sono proporzionali al modulo delle tensioni normali.

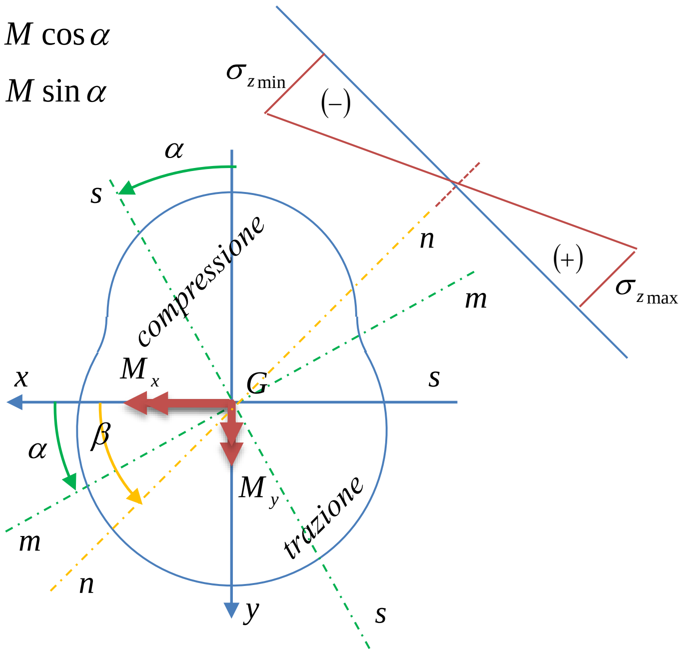
I punti più sollecitati sono allora quelli più distanti dall'asse neutro.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata – tensioni normali

$$M_x = M\cos\alpha$$

$$M_y = M\sin\alpha$$



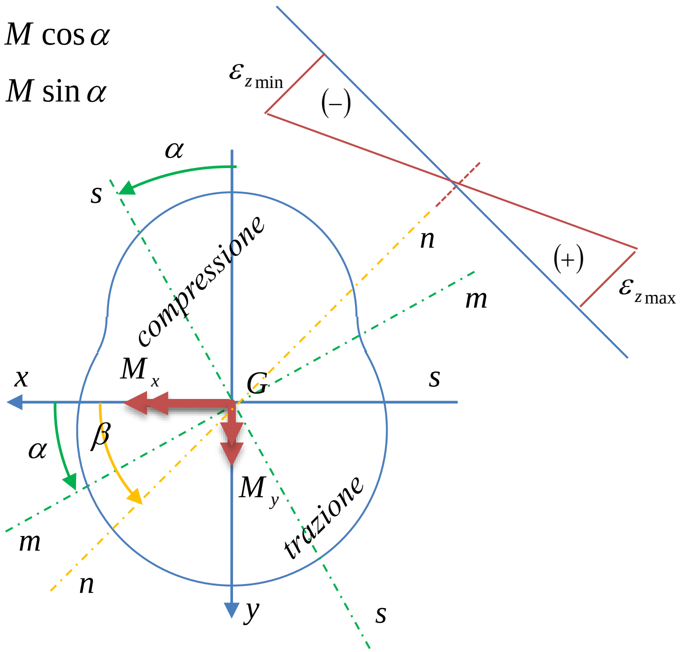
L'andamento delle tensioni normali può essere allora agevolmente diagrammato rispetto ad una retta ortogonale all'asse neutro come indicato in figura.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata – asse di inflessione

$M_x = M \cos\alpha$

$M_y = M \sin\alpha$

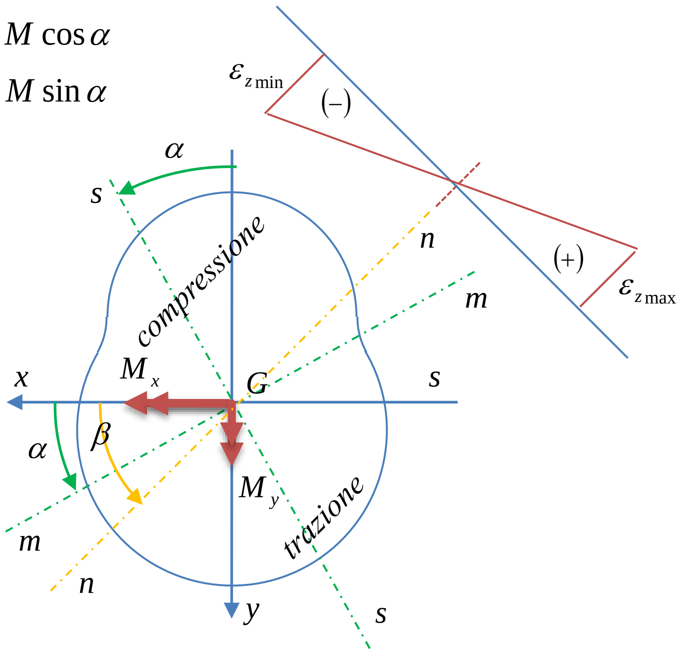


Dalle (38) si vede che l'andamento delle deformazioni assiali ε_z è analogo a quello delle tensioni normali σ_z, a meno del fattore E: esse possono essere allora diagrammate in maniera analoga alle tensioni normali.

La flessione deviata – asse di inflessione

$$M_x = M\cos\alpha$$

$$M_y = M\sin\alpha$$



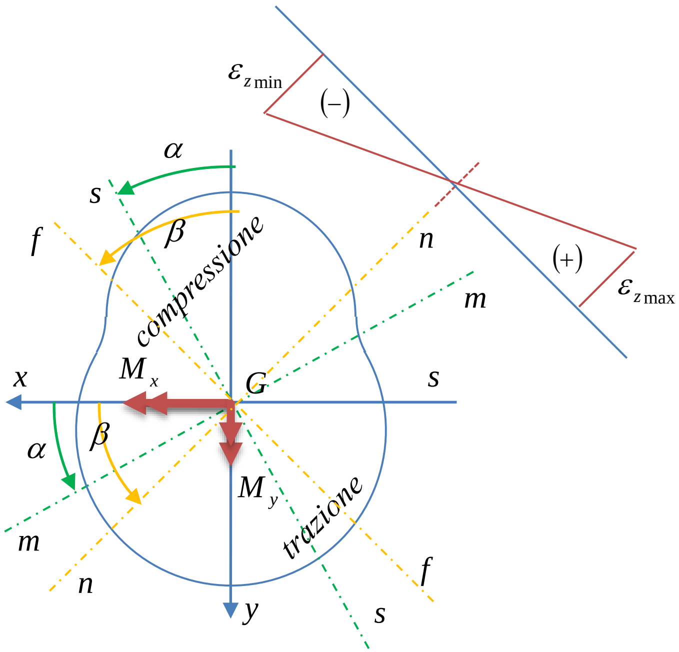
Dalle (38) si vede che l'andamento delle deformazioni assiali ε_z è analogo a quello delle tensioni normali σ_z, a meno del fattore E: esse possono essere allora diagrammate in maniera analoga alle tensioni normali.

Si capisce allora che ogni sezione ruota, rispetto a quella adiacente, attorno all'asse neutro e le fibre longitudinali, e quindi anche quella baricentrica, si incurvano in un piano (il piano di inflessione) ortogonale all'asse neutro.

N.B. questo risultato può essere ottenuto confrontando le componenti di spostamento dell'asse geometrico della trave.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La flessione deviata – asse di inflessione

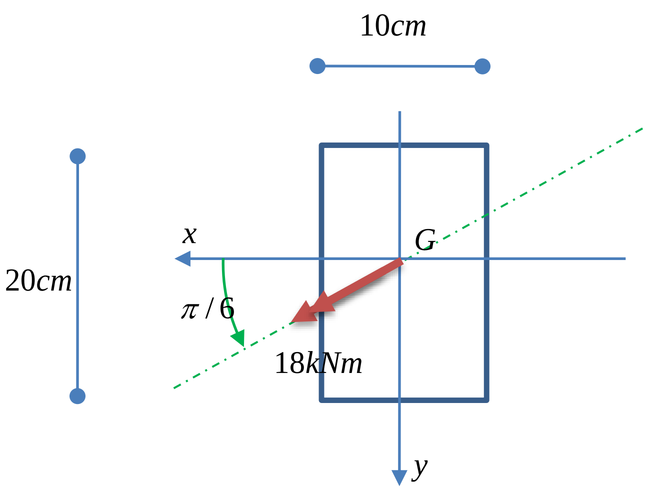


Pertanto l'asse di inflessione è ortogonale all'asse neutro e non coincide, se non per i casi particolari di flessione retta, con il piano di sollecitazione.

Questo significa ad esempio che l'arcareccio di copertura che abbiamo preso ad esempio all'inizio della lezione, se caricato dai carichi gravitazionali, non si sposta solo verticalmente, ma ha anche delle componenti di spostamento orizzontali.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

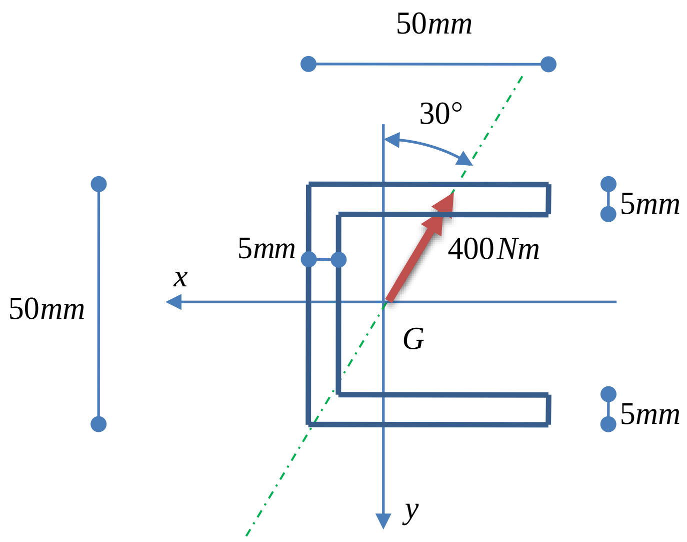
Esercizio



La sezione trasversale di un'asta è sollecitata da un momento flettente come indicato in figura.

1. Si tracci l'asse momento e l'asse di sollecitazione;
2. si determini e si tracci l'asse neutro e successivamente l'asse di inflessione;
3. si individui la parte di sezione tesa e quella compressa;
4. si disegni il diagramma delle tensioni normali;
5. si calcolino i valori massimi e minimi delle tensioni normali e delle deformazioni assiali e si indichino i punti della sezione su cui essi sono presenti.

Esercizio

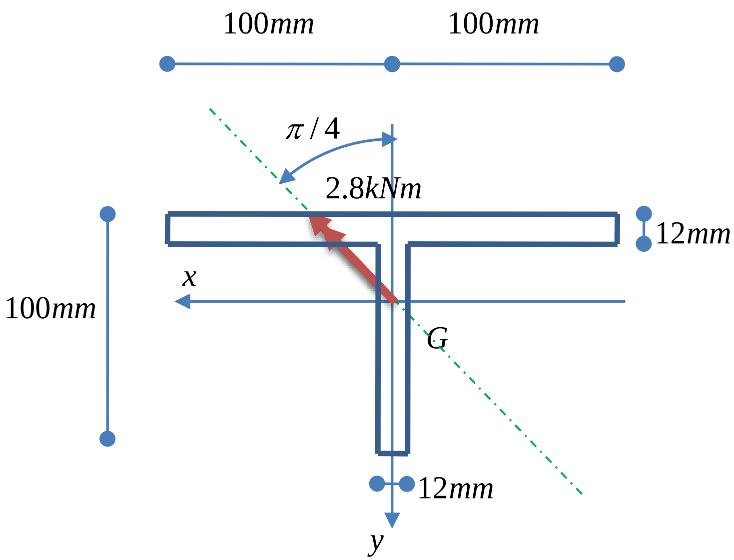


La sezione trasversale di un'asta è sollecitata da un momento flettente come indicato in figura.

1. Si tracci l'asse momento e l'asse di sollecitazione;
2. si determini e si tracci l'asse neutro e successivamente l'asse di inflessione;
3. si individui la parte di sezione tesa e quella compressa;
4. si disegni il diagramma delle tensioni normali;
5. si calcolino i valori massimi e minimi delle tensioni normali e delle deformazioni assiali e si indichino i punti della sezione su cui essi sono presenti.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio



La sezione trasversale di un'asta è sollecitata da un momento flettente come indicato in figura.

1. Si tracci l'asse momento e l'asse di sollecitazione;
2. si determini e si tracci l'asse neutro e successivamente l'asse di inflessione;
3. si individui la parte di sezione tesa e quella compressa;
4. si disegni il diagramma delle tensioni normali;
5. si calcolino i valori massimi e minimi delle tensioni normali e delle deformazioni assiali e si indichino i punti della sezione su cui essi sono presenti.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831