Compito A

Es. 1

$$f(x)=\frac{\sqrt{5-x+2\sqrt{x-1}}}{x-3}.$$

$$x\in \mathrm{dom}(f) \iff \begin{cases} x-3\neq 0 \\ x-1\geq 0 \\ 5-x+2\sqrt{x-1}\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq 3 \\ x\geq 1 \\ 2\sqrt{x-1}\geq x-5 \end{cases}$$

Occupiamoci della disequazione $\boxed{*}$ $2\sqrt{x-1}\geq x-5$. Abbiamo che se $1\leq x\leq 5$ allora $x-5\leq 0$ e quindi (dato che, in particolare, $1\leq x$) $2\sqrt{x-1}\geq 0\geq x-5$. Invece se $x>5$ allora la disequazione $\boxed{*}$ è equivalente a

$$4(x-1)\geq x^2-10x+25$$

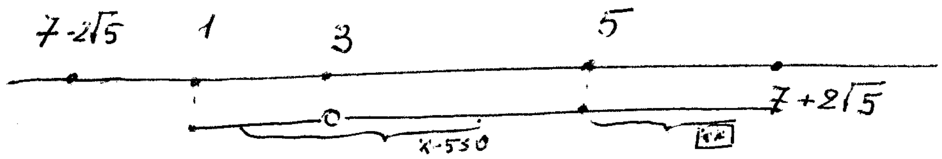
ovvero

$$\boxed{**}\qquad x^2-14x+29\leq 0$$

Ora le radici del polinomio $x^2-14x+29$ sono $\underbrace{7\pm\sqrt{49-29}}_{7\pm 2\sqrt{5}}$

quindi

$\boxed{**}$ è soddisfatta se e solo se $\quad 7-2\sqrt{5}\leq x\leq 7+2\sqrt{5}$



Perciò $\quad \mathrm{dom}(f)=[1,7+2\sqrt{5}]\setminus\{3\}$

Es. 2

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x+2)^3-(x^3+3x^2+1)^2}{x^3(x^2+1)-5x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x+2)^3-(x^3+3x^2+1)^2}{x^5+x^3-5x^4}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x+2)^3-(x^3+3x^2+1)^2}{x^5(1+o(1))}=(*)$$

Ora

$$(x^2+x+2)^3-(x^3+3x^2+1)^2=(x^2+x)^3+3\cdot 2(x^2+x)^2+3\cdot 2^2(x^2+x)+2^3-$$
$$-[x^6+2\cdot 3x^2\cdot x^3+2x^3+6x^2+9x^4+1]=x^6+3x(x^2)^2+(\text{termini di grado}\leq 4)$$
$$-x^6-6x^5+(\text{termini di grado}\leq 4)=$$
$$=-3x^5+(\text{termini di grado}\leq 4)=-3x^5(1+o(1)).$$

Quindi

$$(*)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^5(1+o(1))}{x^5(1+o(1))}=-3.$$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{x(2^x-\cos x-\sin x)}{\log(1+2x^3)-4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\left[1+x\log 2+o(x)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x+o(x)\right]}{-4x^2+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2[(\log 2-1)+o(1)]}{-4x^2(1+o(1))}=-\frac{\log 2-1}{4}.$$

Es. 3

(ai) La continuità nei punti di $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ è garantita dal fatto che se $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ allora $\exists\, U_{x_0} \subset \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ e quindi, se ad es. $x_0 < -1$ $f_{|U_{x_0}}(x) = x^2 - ax$,

se $-1 < x_0 < 1$ $f_{|U_{x_0}}(x) = ax + b$ ecc.

In -1 bisogna richiedere che

$$\lim_{x \to -1^-} f = \lim_{x \to -1^+} f = f(-1)$$

Ora

$$\lim_{x \to -1^-} f = \lim_{x \to -1^-} (x^2 - ax) = 1 + a$$

$$\lim_{x \to -1^+} f = -a + b$$

$$f(-1) = 1 + a$$

Quindi si deve richiedere che

$$(*) \qquad 1 + a = -a + b$$

In 1, si ha

$$\lim_{x \to 1^-} f = \lim_{x \to 1^-} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \to 1^+} f = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - ax) = 1 - a$$

$$f(1) = 1 - a$$

Quindi bisogna richiedere che

$$(**) \qquad a + b = 1 - a$$

Mettendo insieme $(*)$ e $(**)$ si ha

$$\begin{cases} 1 + a = -a + b \\ a + b = 1 - a \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2a = b - 1 \\ 2a = 1 - b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 0, \quad b = 1}$$

(aii) Per la derivabilità nel punto 1 bisogna richiedere (che valga $(**)$ e) che

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Ora

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-ax-(1-a)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-a(x-1)}{x-1}=2-a$$

$\boxed{\text{qui usiamo (**)}}$

e

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a$$

Pertanto dobbiamo richiedere che

$$\begin{cases} a+b=1-a \\ 2-a=a \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2=2a \end{cases} \iff \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

(b) $g(x)=4x^3-30x^2+72x-50$

i) $g'(x)=12x^2-60x+72=12(x^2-5x+6)$

$g'(x)=0 \iff x^2-5x+6=0 \iff x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$

$g'(x)\geq 0$ se $x\leq 2$, $x\geq 3$

$g'(x)\leq 0$ se $2\leq x\leq 3$.

Inoltre $g'(x)>0$ se $x<2$, $x>3$ e $g'(x)<0$ se $2<x<3$

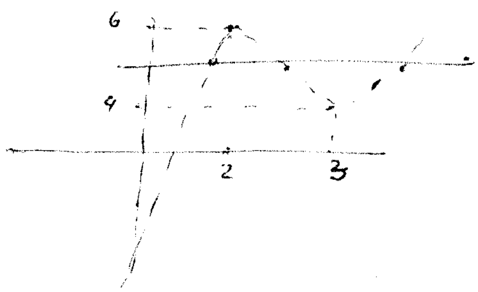
Quindi $g\nearrow^{\text{strett}}$ in $(-\infty,2]$, $g\nearrow^{\text{strett}}$ in $[3,+\infty)$, $g\downarrow_{\text{strett}}$ in $[2,3]$

2 punto di max rel. 3 punto di minimo relativo

$g(2)=4\cdot 8-30\cdot 4+72\cdot 2-50=32-120+144-50=32+24-50=6$

$g(3)=4\cdot 27-30\cdot 9+72\cdot 3-50=108-270+216-50=108-54-50=4$

ii)



$g(x)=5$

Risposta:
tre soluzioni

Compito B

Es. 1

Dominio di
$$f(x)=\log\left(x+2+2\sqrt{2-x}\right)$$

$$x\in \mathrm{dom}(f) \iff \begin{cases} x+2+2\sqrt{2-x}>0\\ 2-x\ge 0\end{cases}$$

Studiamo dunque

$$(*)\quad \begin{cases} 2\sqrt{2-x} > -(2+x)\\ x\le 2\end{cases}$$

Distinguiamo due casi: 1° $\begin{cases} -(2+x)<0\\ x\le 2\end{cases}$, 2° $\begin{cases} -(2+x)\ge 0\\ x\le 2\end{cases}$

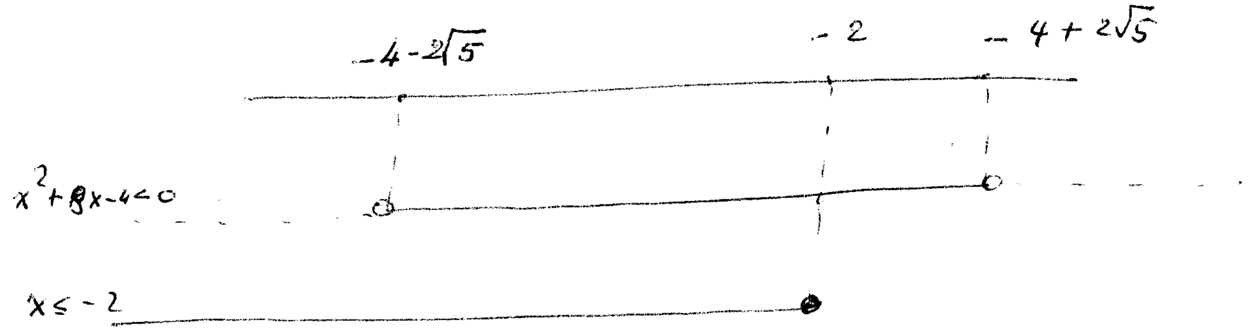
ovvero

$1^\circ)\ -2<x\le 2$, $\quad 2^\circ)\ x\le -2$

Nel primo caso $(*)$ è soddisfatta (perché $-(2+x)<0$). Nel secondo caso si ha che $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} 4(2-x) > 4+4x+x^2\\ x\le -2\end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2+8x-4<0\\ x\le -2\end{cases}$$

Ora $x^2+8x-4=0 \iff x=-4\pm\sqrt{16+4}=-4\pm 2\sqrt{5}$. Quindi



Perciò nel secondo caso $x\in(-4-2\sqrt{5},-2]$.

In definitiva

$$\mathrm{dom}(f)=(-4-2\sqrt{5},-2]\cup(-2,2]=(-4-2\sqrt{5},2]$$

Es. 2

a) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{(1+x)^4 - (1+x^4) - 5x^3}{(2+x)(1+2x)(1+3x)+x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^4} + 4x^3 + (\text{termini di grado} \leq 2) - 1 - \cancel{x^4} - 5x^3}{x^3 \left[\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{1}{x}+3\right) + \frac{1}{x^2} \right]} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3 + (\text{termini di grado} \leq 2)}{x^3 \left[\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{1}{x}+3\right) + \frac{1}{x^2} \right]} = -\frac{1}{6}.$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^4 + \log(\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \left[\cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]}{x^4 + \log((\cos x - 1) + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^4 + (\cos x - 1)(1 + o(1))} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^4 - \frac{1}{2}x^2(1+o(1))} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -2$$

Es. 3

a) $$f(x) = \begin{cases} a x^2 - x & x \le 1 \ , \ x \ge 2 \\ x^2 + b & 1 < x < 2 \end{cases}$$

1) Studiamo la continuità in 1 e 2 (quella in $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ è garantita dal fatto che se $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ esiste un intorno $U_{x_0} \subset \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ quindi se, ad es. $x_0 < 1$, $U_{x_0} \subset (-\infty, 1)$ e $f_{|U_{x_0}}(x) = a x^2 - x$)

Continuità nel punto 1

$$\lim_{x \to 1^-} f = \lim_{x \to 1^+} f = \underbrace{f(1)}_{a-1}$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f = \lim_{x \to 1^-} (a x^2 - x) = a - 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + b) = 1 + b$$

Quindi si deve richiedere che

$$(*) \quad a - 1 = 1 + b$$

Continuità nel punto 2:

$$\lim_{x \to 2^-} f = \lim_{x \to 2^+} f = \underbrace{f(2)}_{4a-2}$$

e

$$\lim_{x \to 2^-} f = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + b) = 4 + b$$

$$\lim_{x \to 2^+} f = \lim_{x \to 2^+} (a x^2 - x) = 4a - 2$$

Quindi si deve richiedere che

$$(**) \quad 4 + b = 4a - 2$$

Mettendo insieme $(*)$ e $(**)$ abbiamo il sistema

$$\begin{cases} a - 1 = 1 + b \\ 4 + b = 4a - 2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a = 2 + b \\ \underbrace{4 + b = 4(2+b) - 2}_{} \end{cases}$$

$$4 + b = 8 + 4b - 2$$

$$-2 = 3b$$

$$b = -\frac{2}{3}, \quad a = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

a (ii) derivabilità nel punto 1

Intanto occorre che valga (*), cioè

$$(*) \quad a-1 = 1+b$$

Inoltre si deve richiedere che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Ora

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2-x-(a-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{a(x^2-1)-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}\,[a(x+1)-1]}{\cancel{x-1}} = 2a-1$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+b-(1+b)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

(per (*))

Quindi si deve richiedere che

$$\begin{cases} a-1 = 1+b \\ 2a-1 = 2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a-2 = b \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

in definitiva:

$$\boxed{a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}}$$

b) (i) $g(x) = -3x^3+18x^2-27x-8$

$$g'(x) = -9x^2+36x-27 = 9(-x^2+4x-3)$$

Radici di $-x^2+4x-3=0$ $\quad x = \frac{-2\pm\sqrt{4-3}}{-1} = \frac{-2\pm 1}{-1} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$g'(x) > 0 \iff 1 < x < 3$

$g'(x) \leq 0 \iff x \leq 1$ oppure $x \geq 3$

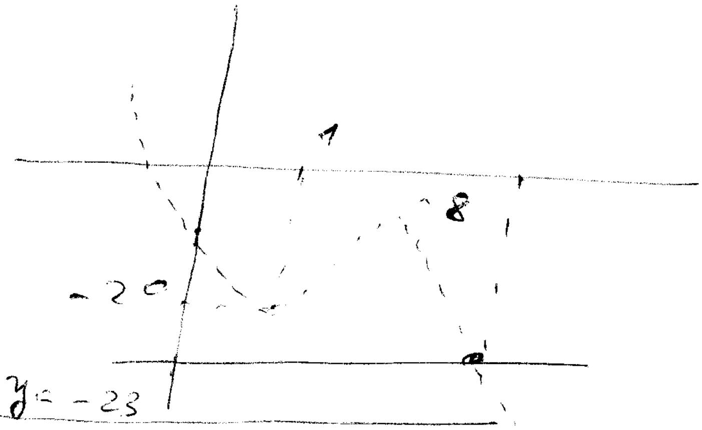
Quindi

$g \downarrow$ strett. in $(-\infty, 1]$, $g \nearrow$ strett. in $[1,3]$, $g \downarrow$ strett. in $[3, +\infty)$

1 → minimo relativo, 3 max relativo

$g(1) = -3 + 18 - 27 - 8 = -20$

$g(3) = -3 \cdot 27 + 18 \cdot 9 - 27 \cdot 3 - 8 = -8$



$\boxed{\text{Risposta: l'equazione } g(x) = -23 \text{ ha una soluzione}}$

Compito C

Es. 1

Dominio di

$$f(x) = \log\left(1 + 2\sqrt{x+3} - x\right)$$

$$x \in \mathrm{dom}(f) \iff \begin{cases} 1 + 2\sqrt{x+3} - x > 0 \\ x + 3 \geq 0 \quad (\text{cioè } x \geq -3) \end{cases}$$

Ora occupiamoci della disequazione

$$1 + 2\sqrt{x+3} - x > 0$$

che è equivalente a

$$(*) \quad 2\sqrt{x+3} > x - 1$$

Ora, se

$-3 \leq x < 1$ allora $x - 1 < 0$ e quindi $(*)$ è soddisfat

Invece se $\underline{x \geq 1}$ allora $(*)$ è equivalente a

$$4(x+3) > (x-1)^2$$

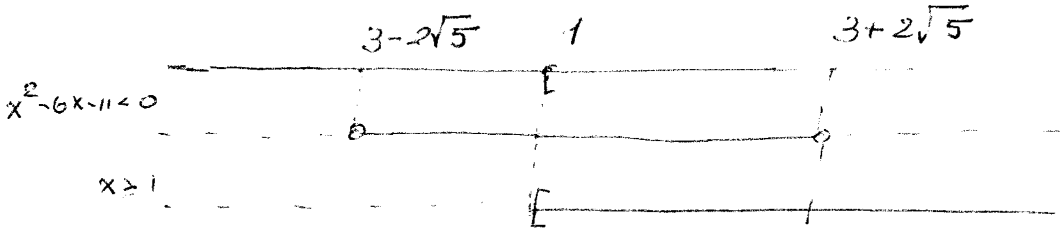
ovvero

$$4x + 12 > x^2 - 2x + 1$$

quindi

$$x^2 - 6x - 11 < 0$$

Ora le radici di $x^2 - 6x - 11 = 0$ sono $3 \pm \sqrt{9+11} = 3 \pm \sqrt{20} = 3 \pm 2\sqrt{5}$



Abbiamo quindi

$$\mathrm{dom}(f) = [-3, 1) \cup [1, 3+2\sqrt{5}) = [-3, 3+2\sqrt{5})$$

Es. 2

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{(1+x^2)^3+(1-x^3)(1+x^3)-2x^4}{(1-x)^6+6x^5-x^6} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+3x^2+3x^4+\cancel{x^6}+1-\cancel{x^6}-2x^4}{\cancel{x^6}-\cancel{6x^5}+15x^4+\underbrace{\dots}_{\text{termini di grado} \leq 3}+\cancel{6x^5}-\cancel{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+(\text{termini di grado} \leq 3)}{15x^4+(\text{termini di grado} \leq 3)} = \frac{1}{15}$$

b) $$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1+x-x^3}-\sqrt{1-x}}{e^{x^2}-e^{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1+(x-x^3)(1+o(1))-[1-x(1+o(1))]}{e^{x^2}[1-e^{x^3-x^2}]} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2x+o(x)}{e^{x^2}[(x^2-x^3)(1+o(1))]} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x+o(x)}{(x^2-x^3)(1+o(1))} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Es. 3

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{se } x \leq 1, \quad x \geq 2 \\ ax^2+bx, & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

(i) Deve accadere che (per avere la continuità in $x=1$, $x=2$)

$$\underbrace{f(1)}_{2} = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = \underbrace{f(2)}_{6}$$

Ora

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+x) = 2 \quad (= f(1))$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax^2+bx) = a+b$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax^2+bx = 4a+2b$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2+x = 6 \cdot (= f(2))$$

Quindi dobbiamo richiedere che

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+2b=6 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=2 \\ 2a=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=2 \\ a=1 \end{cases}$$

ovvero $\boxed{a=1\ ,\quad b=1}$

La continuità nei punti $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ è garantita dal fatto che $\exists\, U_{x_0} \subset \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, dove U_{x_0} è un intorno di x_0 quindi, se ad esempio $x_0<1$ si ha

$$f_{|U_{x_0}}(x) = x^2+x \quad \text{che è continua in } x_0$$

e analogamente se $1<x_0<2$, $x_0>2$.

(ii) Derivabilità nel punto 2.

Si deve richiedere che

$$4a+2b=6 \quad (\text{continuità nel punto } 2)$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

a.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax^2+bx-4a-2b}{x-2} = 4a+b$$

Pertanto f è derivabile in $x=2$ se e solo se

$$\begin{cases} 4a+b=5 \\ 4a+2b=6 \end{cases}$$

da cui si ha

$$b=1, \quad a=1$$

(b) (i) $g(x) = 2x^3-6x^2-18x+14$

$$g'(x) = 6x^2-12x-18 = 6[x^2-2x-3]$$

Quindi $g'(x)>0 \iff \begin{cases} x > 1+\sqrt{1+3} = 3 \\ \text{oppure} \\ x < 1-\sqrt{1+3} = -1 \end{cases}$

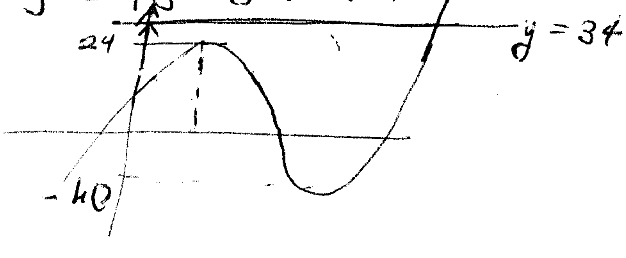
Pertanto $g \nearrow$ strett. in $(-\infty,-1]$ $\quad g \searrow$ strett. in $[-1,3]$

$g \nearrow$ strett. in $[3,+\infty)$

$-1 \to$ punto di massimo relativo, $3 \to$ punto di min relativo.

(ii) $g(-1) = -2-6+18+14 = 24$

$g(3) = 2\cdot 27 - 6\cdot 9 - 18\cdot 3 + 14 = -40$



Risposta

$g(x)=34$ ha una sola soluzione