13/11/2018

ESERCITAZIONE SU TEOREMA DI DE L'HÔPITAL E POLINOMIO DI TAYLOR

Teorema di de l'Hôpital

Siano $\ell, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$.

Siano $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili in (a,b) tali che

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) \in \{0 ; \pm\infty\}.$$

Se $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ e $\ell = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

allora $\ell = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Il teorema si può enunciare anche per $x \to b^-$ o $x \to x_0 \in (a,b)$.

Applicazioni - Esercizi

① Calcolare

(a) $\lim_{x \to 0^+} x \log x$;

(b) $\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}$;

(c) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x}$;

(d) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3x + 2)\, e^{-\sqrt{\log x}}$;

(e) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\log x}}{(\log x)^x}$;

(f) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$; (g) $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{\arcsin x} - 1\right)^x$.

Soluzioni

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x$ è una forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$, ma può essere anche vista così $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{1/x}$ dove è $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Nell'intervallo $(0, +\infty)$ si è nelle ipotesi del teor. di De L'Hôpital per quanto concerne derivabilità di $f(x) = \log x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ e non negatività di $g(x)$.

Verifichiamo l'esistenza del limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. In tal caso assumerà lo stesso valore di $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \text{. OK.}$$

L'uso di questo simbolo sta a indicare che l'uguaglianza è garantita dal teor. di de L'Hôpital, di cui si intendono soddisfatte le ipotesi, compresa quella che stiamo verificando compiendo il calcolo del limite del rapporto delle derivate.

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\sqrt{x} \log \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{3}\sqrt{x} \log x}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-2x) = 0$$

(c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x}$ $\quad [\infty - \infty]$

$$= \quad [\tfrac{0}{0}] \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \overset{H}{=}$$

$f(x) = \sin x - x$
$g(x) := x^2 \sin x$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{2x \sin x + x^2 \cos x} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{2 \sin x + \cancel{2x \cos x} + 4x \cos x - x^2 \sin x} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\cos x}{2 \cos x + 4 \cos x - 4x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x} = -\frac{1}{6}$$

È stato utilizzato il teor. di De l'Hôpital svariate volte (3).

<u>Alternativa valida</u>: usare 'De l'Hôpital' una volta e poi limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{2x \sin x + x^2 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{\cos x - 1}^{}}{x^2 \left[2 \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{\cos x}_{\downarrow\, 1} \right]} = -\frac{1}{6}.$$

$\frac{\cos x - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2}$

<u>OSS.</u> Per $x \to 0^-$ si ottiene lo stesso risultato, quindi si può dire $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} = -\frac{1}{6}$

anche se $g'(0) = 0$

(d) In questo esercizio, si può essere tratti in inganno e pensare convenga usare il teor. di de l'Hôpital perché

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2+3x+2)\, e^{-\sqrt{\log x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+2}{e^{\sqrt{\log x}}}, \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Invece è meglio effettuare la sostituzione $t = \sqrt{\log x}$, così da ottenere:

$$\Downarrow$$
$$x = e^{t^2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{2t^2} + 3e^{t^2} + 2}{e^t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{\overbrace{2t^2-t}^{\to+\infty}} + 3e^{\overbrace{t^2-t}^{\to+\infty}} + \underbrace{\frac{2}{e^t}}_{\to 0} = +\infty$$

(e) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\log x}}{(\log x)^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log^2 x}}{e^{x \log\log x}} \overset{H}{=} \dots ?$$

Anche qua invece conviene usare la sostituzione $\log x = t$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\log x}}{(\log x)^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\log^2 x - x\log\log x} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{[t^2 - e^t \log t]} = \lim_{t\to+\infty} e^{\overbrace{\overbrace{e^t}^{\to+\infty}\left(\overbrace{\frac{t^2}{e^t}}^{\to 0} - \overbrace{\log t}^{\to+\infty}\right)}^{\to-\infty}} = 0.$$

Per convincerci che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ si può usare k volte il teor. di D.L'Hôp.

(f) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$\stackrel{H}{=}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$

<u>Alternative</u> $t := x - \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{\sin t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = 0.$$

$\frac{1-\cos t}{t} \to 0$, $\frac{\sin t}{t} \to 1$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2 + o(t^2)}{t + o(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{t + o(t)}{1 + o(1)} = 0.$$

(g) $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{\arcsin x} - 1\right)^x =$ $\longrightarrow$ $\arcsin x = t$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(e^t - 1\right)^{\sin t} = \lim_{t \to 0^+} e^{\sin t \log\left(e^t - 1\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} e^{[t + o(t)] \log[t + o(t)]} = e^0 = 1.$$

$\uparrow$ ex. 1(a)

(Nelle opportune ipotesi)

Polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ in x_0 $\quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Formula di Taylor di $f(x)$ in x_0 con resto di Peano di ordine n $\quad f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n)$

($x_0 = 0 \rightarrow$ McLaurin)

Esercizi

(2) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 5 di $\mathrm{tg}\,x$;

(3) " " " " " " " 3 " $\mathrm{arctg}\,x$;

(4) " " " " " " " 3 di $f(x) = \ln^2(1+x)$ e

$g(x) = \ln(1+x^2)$;

(5) Risolvere $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3x^2 - 3\,\mathrm{arctg}\,x^2}{\log(1+2\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}}$.

Soluzioni

(2) $f(x) = \mathrm{tg}\,x$

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1 + \mathrm{tg}^2 x\,\big|_{x=0} = 1$
- $f''(0) = 2\,\mathrm{tg}\,x(1+\mathrm{tg}^2 x)\big|_{x=0} = 0$
- $f'''(0) = 2(1+\mathrm{tg}^2 x)(1+3\,\mathrm{tg}^2 x)\big|_{x=0} = 2$
- $f^{IV}(0) = 2\frac{d}{dx}(1+\mathrm{tg}^2 x)(1+3\,\mathrm{tg}^2 x)\big|_{x=0} =$

$$\cancel{= 2\left[2\,\mathrm{tg}\,x(1+\mathrm{tg}^2 x)(1+\mathrm{tg}\,x)^2 + 2(1+\mathrm{tg}^2 x)^2(1+\mathrm{tg}\,x)\right]\big|_{x=0}}$$

$$= 2\frac{d}{dx}(1+4\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}^3 x)\big|_{x=0} =$$

$$= 2(1+\mathrm{tg}^2 x)(8\,\mathrm{tg}\,x + 9\,\mathrm{tg}^2 x)\big|_{x=0} = 0$$

- $f^{(V)}(x) = 2\frac{d}{dx}(8\,\mathrm{tg}\,x + 9\,\mathrm{tg}^2 x + 8\,\mathrm{tg}^3 x + 9\,\mathrm{tg}^4 x)\big|_{x=0} =$

$$= 2(1+\mathrm{tg}^2 x)(8 + 18\,\mathrm{tg}\,x + 24\,\mathrm{tg}^2 x + 36\,\mathrm{tg}^3 x)\big|_{x=0} = 16$$

$$p(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{120}x^5 =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

(3) $f(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 4x \cdot 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-8 + 8x^2 - 2x^4 - 4x^2}{(1+x^2)^3} = -2\,\frac{x^4 - 4x^2 + 4}{(1+x^2)^3} =$$

$$= -2\,\frac{(x^2-2)^2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f'''(0) = -8$$

$$p(x) = x - \frac{8}{6}x^3 = x - \frac{4}{3}x^3$$

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\ln^2(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{9} - x^3 + 2\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{3} +$$

$$+ o(x^4) =$$

$$= x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$p_f(x) = x^2 - x^3$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \Rightarrow p_g(x) = x^2$

(5) $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$; $\operatorname{arctg} t = t - \frac{4}{3}t^3 + o(t^4)$; $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x^2) - 3\operatorname{arctg} x^2}{\log(1+2\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{3x^2} - \frac{9}{2}x^6 + o(x^8) - 3(\cancel{x^2} - \frac{4}{3}x^6 + o(x^8))}{\cancel{2\sqrt{x}} - 2x + o(x) - \cancel{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^6 + o(x^6)}{-2x + o(x)} = 0.$$

ALTRI ESERCIZI VARI SUI LIMITI

- Scrivere polinomio di Taylor di ordine 3 in $x_0 = \pi^2$ per

$$f(x) = \cos\sqrt{x}$$

- Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(4x^2) - \arcsin 8x^4}{\log(1+\mathrm{tg}(3x)) - 3x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{x}{2}} + x^2}{1-3\cos x};$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \sqrt{1+\frac{x}{x^3+1}}\right)\log\left(1+e^{x^3}+x\right);$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,x\right); \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5^{1+\mathrm{tg}^2 x} - 5}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\log(1+x) - x}; \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\mathrm{tg}\,x - x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{x^2} - \sqrt{x^3+3} + e^x}{(x^2)^{x^2} - \ln x + e^{5x}}$$