

# Il solido di de Saint-Venant



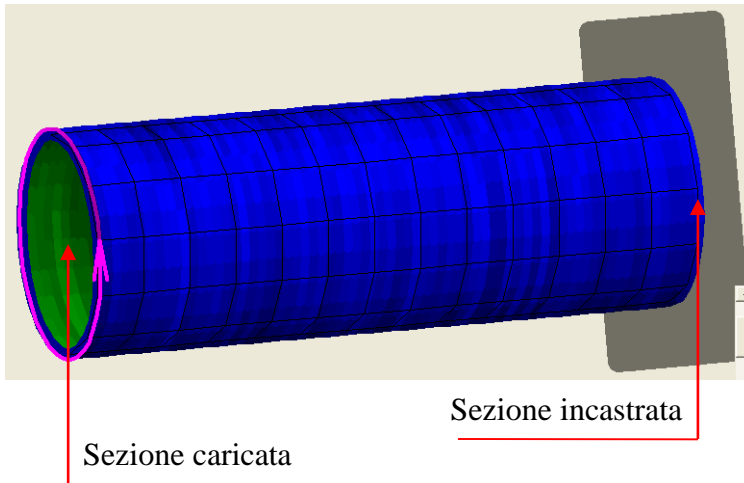
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Il problema della torsione nel solido di *de Saint Venant*

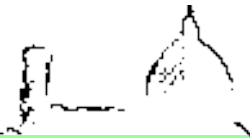


## Sommario – prova di torsione

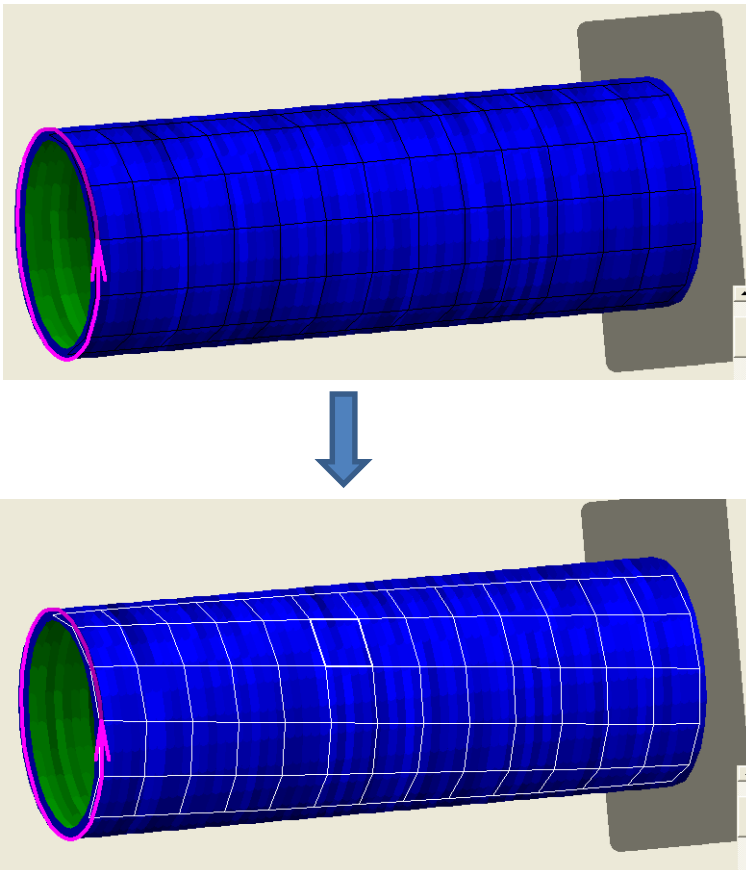


Prima di affrontare in maniera analitica il problema di un'asta sollecitata da un momento torcente costante, analizziamo una ideale prova di torsione condotta su un solido a sezione circolare cava, come indicato in figura.

Prima di applicare la coppia torcente sulla sezione terminale libera della trave, immaginiamo di tracciare sulla sua superficie esterna una griglia diretta secondo le sue generatrici e le sue direttrici. In questo modo si individueranno degli elementi quadrilateri aventi i lati ortogonali tra loro.



## Sommario – prova di torsione

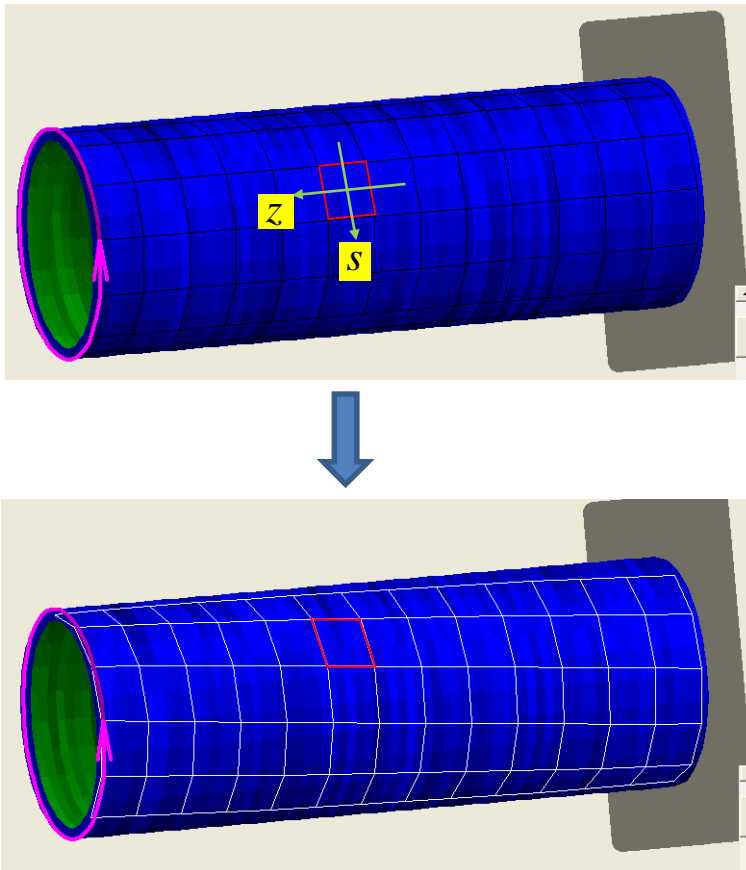


Applicando una coppia torcente sulla sezione libera della trave si avrà una rotazione delle sezioni trasversali del solido come indicato in figura. A causa di tali rotazioni, i quadrilateri individuati sulla superficie laterale del solido si trasformeranno in romboidei i cui lati non saranno più ortogonali tra loro.

Figura realizzata mediante MDSolids



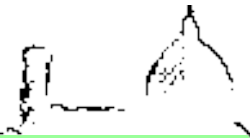
## Sommario – prova di torsione



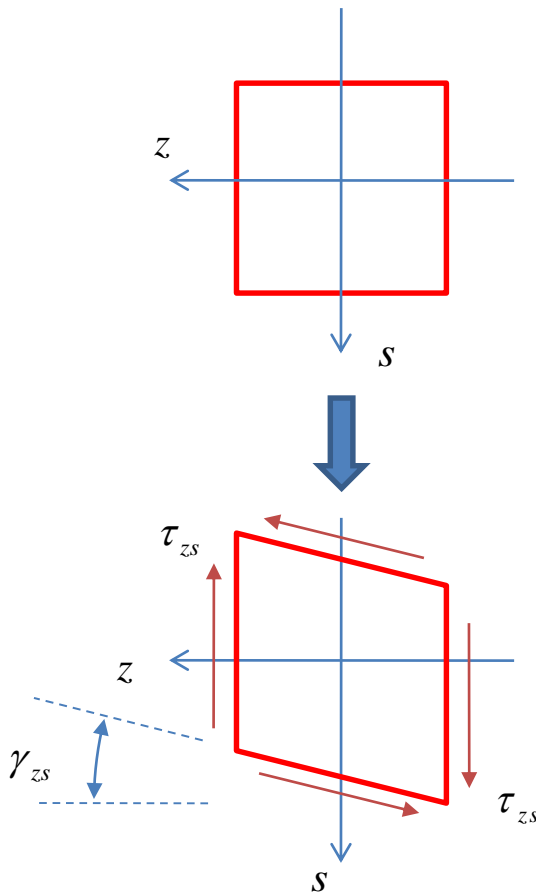
Applicando una coppia torcente sulla sezione libera della trave si avrà una rotazione delle sezioni trasversali del solido come indicato in figura. A causa di tali rotazioni, i quadrilateri individuati sulla superficie laterale del solido si trasformeranno in romboidei i cui lati non saranno più ortogonali tra loro.

Consideriamo un generico elemento quadrilatero (di dimensione idealmente infinitesima) sulla superficie del cilindro. Indichiamo con  $z$  la direzione dell'asse della trave e con  $s$  la direzione della tangente alla generatrice nel punto in esame.

Figura realizzata mediante MDSolids



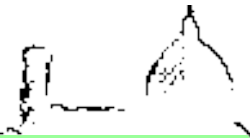
## Sommario – prova di torsione



A causa della sollecitazione torsionale, tale elemento ha allora subito degli scorrimenti  $\gamma_{zs}$  a cui corrispondono delle tensioni tangenziali  $\tau_{zs}$ . Com'è ben noto, se il solido ha un comportamento elastico lineare, le tensioni tangenziali e gli scorrimenti angolari sono legati dalla seguente equazione costitutiva.

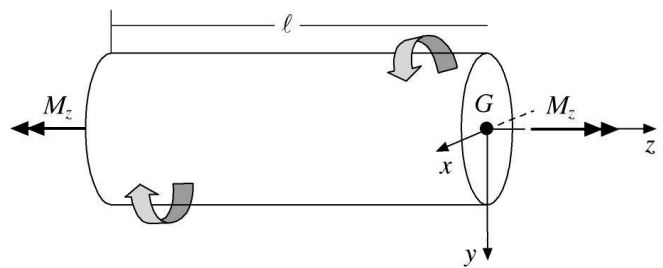
$$\tau_{zs} = G\gamma_{zs}$$

Figura realizzata mediante MDSolids



## Il solido di de Saint Venant sollecitato a torsione

Si consideri il problema del solido di *de Saint Venant*, a sezione trasversale qualsiasi, sottoposto ad azioni sulle basi tali che le componenti della risultante e del momento risultante siano le seguenti (v. figura)

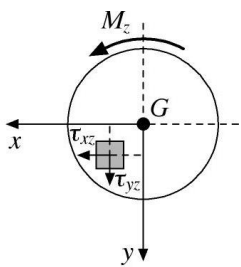


$$N^\ell = N^0 = T_x^\ell = T_x^0 = T_y^\ell = T_y^0 = 0$$

$$M_x^\ell = M_x^0 = M_y^\ell = M_y^0 = M_z^\ell = M_z^0 = 0$$

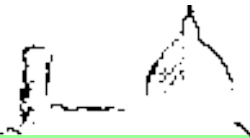
$$M_z^\ell = M_z^0 = M_z$$

Dalle (SV7) si determinano facilmente le caratteristiche della sollecitazione presenti nel solido in esame



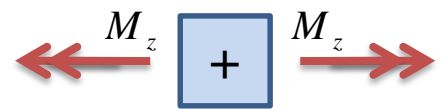
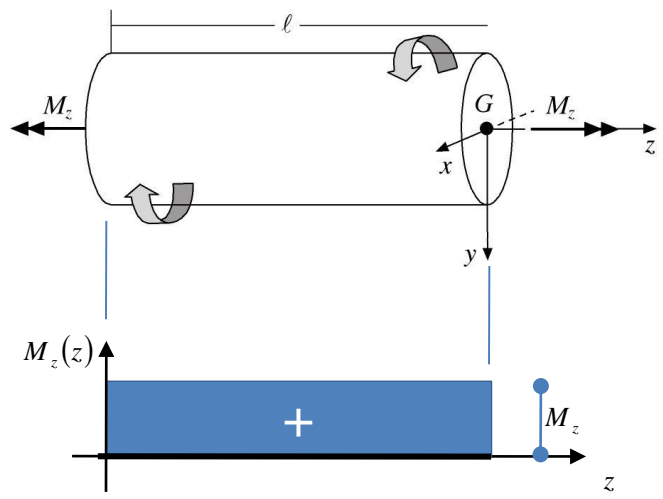
$$\begin{aligned}
 T_x(z) &= 0 & M_x(z) &= 0 \\
 T_y(z) &= 0 & M_y(z) &= 0 \\
 N(z) &= 0 & M_z(z) &= M_z
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Figura tratta da Nunziante Gambarotta Tralli



## Il solido di de Saint Venant sollecitato a torsione

Il problema in esame è allora quello di un'asta a sezione trasversale qualsiasi, sottoposta ad una sollecitazione torsionale costante.



Convenzione sul segno positivo della sollecitazione torsionale

Visto che lo sforzo normale e le sollecitazioni flessionali sono nulle, per la formula di Navier (22) la tensione normale  $\sigma_z$  è nulla

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x = 0 \quad (50)$$

Inoltre, per le (SV6) le eventuali tensioni tangenziali presenti nel solido devono essere tali che

$$\begin{aligned} T_x(z) &= \int_A \tau_{zx} dA = 0 & T_y(z) &= \int_A \tau_{zy} dA = 0 \\ M_z(z) &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = M_z \end{aligned} \quad (51)$$

Le precedenti relazioni implicano il soddisfacimento delle condizioni al contorno sulle basi del solido (SV4).



## Il solido di de Saint Venant sollecitato a torsione

Per quanto detto, nel solido sono presenti solo componenti di tensioni tangenziali. Esse devono soddisfare le equazioni di campo (SV1-SV2) ed al contorno (SV3) e le equazioni di congruenza interna contenute nella seconda riga delle (SV5). Si ricordi che le prime quattro delle (SV5) sono soddisfatte dalla espressione (22).

Equazioni di dominio

Condizioni al contorno

$$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{0}$$



$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

**(SV1)**

equazioni di equilibrio

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad \forall P \in \partial B_m \quad \textbf{(SV3)}$$

Condizioni di integrabilità

$$\begin{cases} \{\underline{\sigma}\} = [S]\{\underline{\varepsilon}\} \\ \{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -v \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -v \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

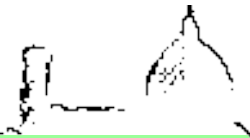
**(SV2)**

equazioni di congruenza e legame costitutivo

**(SV5)**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{v}{1+v} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{v}{1+v} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z}$$





# Il solido di de Saint Venant sollecitato a torsione

In virtù della (50), le precedenti si particularizzano come segue

<p>Equazioni di dominio</p> $[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$ <p><b>(SV1.T)</b> equazioni di equilibrio</p>	<p>Condizioni al contorno</p> $\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad \forall P \in \partial B_m \quad \textbf{(SV3.T)}$
$\begin{cases} \{\underline{\sigma}\} = [S]\{\underline{\varepsilon}\} \\ \{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$ <p><b>(SV2.T)</b> equazioni di congruenza e legame costitutivo</p>	<p>Condizioni di integrabilità</p> <p><b>(SV5.T)</b></p> $\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0$



## Analisi dello stato tensionale – equazioni di equilibrio

Analizziamo inizialmente lo stato tensionale presente nel solido. La prima e la seconda equazione indefinita di equilibrio implicano che le tensioni tangenziali devono essere indipendenti da  $z$ . Questo ci permette di descrivere lo stato tensionale presente nel solido

Equazioni di dominio

$$\text{equazioni di equilibrio} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

esaminando una sua generica sezione trasversale  $A$ . Lo stesso stato tensionale sarà infatti presente su tutte le sezioni trasversali del solido.



## Analisi dello stato tensionale – equazioni di equilibrio

Analizziamo inizialmente lo stato tensionale presente nel solido. La prima e la seconda equazione indefinita di equilibrio implicano che le tensioni tangenziali devono essere indipendenti da  $z$ . Questo ci permette di descrivere lo stato tensionale presente nel solido

esaminando una sua generica sezione trasversale  $A$ . Lo stesso stato tensionale sarà infatti presente su tutte le sezioni trasversali del solido. Le equazioni di equilibrio possono essere allora semplificate come indicato di seguito. Si osservi che finora non è stata fatta alcuna ipotesi sulla forma della sezione trasversale del solido.

Equazioni di dominio

equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

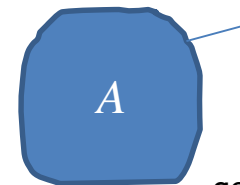


equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \rightarrow \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$



$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \text{in } A \quad (52)$$



frontiera  $\partial A$

generica sezione trasversale del solido



## Analisi dello stato tensionale – equazioni di congruenza interna

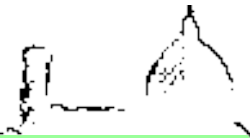
Analizziamo adesso le equazioni di congruenza interna (di integrabilità del campo di deformazione) riportate nelle (SV5.T). Esse si scrivono come segue

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0$$

Visto che, per quanto detto nella precedente slide, le tensioni tangenziali devono essere indipendenti da  $z$ , le precedenti relazioni implicano che

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = c \quad \text{in } A \quad (53)$$

dove  $c$  è una generica costante



## Analisi dello stato tensionale – condiz. di equil. sulla frontiera

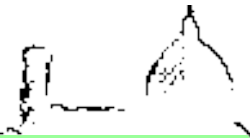
Le condizioni al contorno (SV3.T) implicano che in ogni punto della frontiera  $\partial A$  di una qualunque sezione trasversale  $A$  del solido, le tensioni tangenziali devono essere tangenti al bordo della sezione

Condizioni al contorno

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad \forall P \in \partial B_m \quad \longrightarrow \quad \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad \forall P \in \partial A \quad (54)$$

Ovviamente **quanto detto implica l'ipotesi che la sezione trasversale del solido sia abbastanza regolare da poter definire univocamente la tangente in corrispondenza di tutti i punti del contorno.**

Si ricorda che il valore delle tensioni tangenziali è indipendente da  $z$



# Il problema della torsione

Riassumendo, il problema della torsione è governato dalle seguenti relazioni

Equilibrio  $\frac{\partial \tau_{xz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y)}{\partial y} = 0$

Congruenza interna  $\frac{\partial \tau_{yz}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}(x, y)}{\partial y} = c$  in A (T1)

Condizioni al contorno

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad \forall P \in \partial A \quad (T2)$$

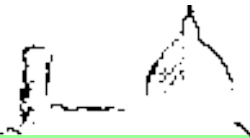
Caratteristiche della sollecitazione

$$T_x(z) = \int_A \tau_{zx} dA = 0$$

$$T_y(z) = \int_A \tau_{zy} dA = 0$$

$$M_z(z) = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = M_z \quad (T3)$$

Il campo di spostamento (e di deformazione) deve inoltre essere rispettoso delle equazioni di congruenza riportate nella slide seguente.



# Analisi dello stato tensionale – equazioni di congruenza

Le equazioni di congruenza e di legame elastico (SV2.T)

$$\begin{aligned} \{\underline{\sigma}\} &= [S]\{\underline{\varepsilon}\} \\ \{\underline{\varepsilon}\} &= [C]\mathbf{u} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{(SV2.T)} \\ & \text{equazioni di} \\ & \text{congruenza e} \\ & \text{legame} \\ & \text{costitutivo} \end{aligned}$$

forniscono le seguenti informazioni sul campo di spostamento presente nel solido

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 &\rightarrow u = u(y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 &\rightarrow v = v(x, z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Le componenti di} \\ \text{spostamento } u \text{ e } v \\ \text{devono essere} \\ \text{rispettivamente} \\ \text{indipendenti da } x \text{ ed } y \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 &\rightarrow w = w(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Le fibre del solido} \\ \text{parallele all'asse non} \\ \text{subiscono allungamenti} \end{array} \quad \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (55)$$