1 STUDIO DI UNA FUNZIONE

1.1 Schema riassuntivo dei principali passi necessari per lo studio di una funzione reale di variabile reale

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale, in questo capitolo ci occuperemo di studiare f e di disegnarne il grafico, in tal senso potrà essere utile seguire lo schema riassuntivo che proponiamo.

1. Deterninare l'*insieme di esistenza* di f, $I.E.(f)$;

2. determinare eventuali *simmetrie* del grafico, ad esempio:

a) se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in I.E.(f)$, cioè se f è *pari*, allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse y e si può restringere lo studio di f all'insieme

$$\{x \in I.E.(f) \ \mid x \geq 0\};$$

b) se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in I.E.(f)$, cioè se f è *dispari*, allora il grafico è simmetrico rispetto all'origine e, anche in questo caso, si può restrigere lo studio di f all'insieme

$$\{x \in I.E.(f) \ \mid x \geq 0\};$$

c) se $f(x + T) = f(x)$ per qualche $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, per ogni $x \in I.E.(f)$, cioè se f è *periodica*, allora si può restrigere lo studio di f all'insieme

$$\{x \in I.E.(f) \ \mid 0 \leq x \leq T\};$$

in questo caso è conveniente considerare il più piccolo numero reale positivo T con la proprietà indicata, cioè T uguale al *periodo* di f;

3. determinare eventuali *intersezioni* del grafico di f con gli assi coordinati, cioè:

a) le intersezioni con l'asse delle ordinate, date dai punti del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) \end{pmatrix}$,

b) le intersezioni con l'asse delle ascisse, ossia gli *zeri* di f, date dai punti del tipo $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ con $f(x) = 0$;

4. studiare il *segno* di f, cioè studiare la disequazione $f(x) > 0$;

5. studiare il comportamento di f agli estremi dell'insieme di esistenza, precisamente:

a) calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di esistenza,
b) determinare eventuali *asintoti orizzontali* e *verticali*,
c) determinare eventuali *asintoti obliqui*;

6. calcolare la *derivata prima* di f (nei punti in cui esiste):

a) determinare gli intervalli in cui f è *crescente* e quelli in cui è *decrescente* mediante lo studio del segno della derivata prima,

b) determinare gli eventuali *punti di massimo* o *minimo relativo* e i *flessi a tangente orizzontale*;

7. determinare eventuali punti di non derivabilità (*punti angolosi*, *punti cuspidali*, *flessi a tangente verticale*);

8. determinare (se esistono) il *massimo* e il *minimo assoluti* di f;

9. calcolare la *derivata seconda* di f (nei punti in cui esiste):
a) determinare gli intervalli in cui f è *convessa* e quelli in cui è *concava*,
b) determinare gli eventuali *flessi a tangente obliqua*;

10. tracciare il *grafico* della funzione usando tutte le informazioni ricavate nei punti precedenti.

ESERCIZI SVOLTI

$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = x - x^3 + x^5.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

1. Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$;
2. abbiamo

$$f(-x) = -x - (-x)^3 + (-x)^5 = -(x - x^3 + x^5) = -f(x)$$

pertanto f è dispari e possiamo restringerne lo studio all'insieme $[0, +\infty)$;

3. l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x(1 - x^2 + x^4) = 0$$

ed essendo negativo il discriminante dell'equazione $t^2 - t + 1 = 0$, non si hanno altre intersezioni diverse da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

4. per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) > 0$ per

$$x(1 - x^2 + x^4) > 0$$

ed essendo $1 - x^2 + x^4 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ottiene che $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$;

5. abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

in particolare non è limitata superiormente e non esistono asintoti di f;

6. risulta:

$$f'(x) = 1 - 3x^2 + 5x^4$$

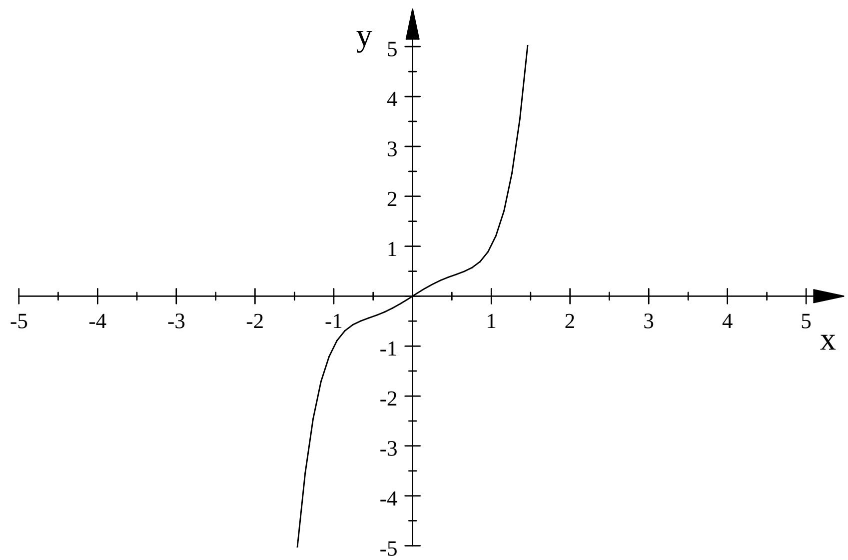
ed essendo negativo il discriminante dell'equazione $5t^2 - 3t + 1 = 0$, si ha che $f'(x) > 0$ per ogni x, in particolare f è crescente;

7. non esistono punti in cui f non è derivabile;
8. f non ammette massimo e minimo assoluti perché non è limitata;
9. risulta:

$$f''(x) = -6x + 20x^3 = 2x(-3 + 10x^2)$$

pertanto $f''(x) > 0$ per $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right[$, $f''(x) = 0$ per $x = -\sqrt{\frac{3}{10}}, x = 0, x = \sqrt{\frac{3}{10}}$, $f''(x) < 0$ per $x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right[\cup \left]0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right[$ in particolare f è convessa per $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right[$, è concava per $x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right[\cup \left]0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right[$ e ammette tre punti di flesso per $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}$;

10. dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



ESERCIZIO 2

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico al variare di $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = x^4 + x^2 + 2a.$$

SOLUZIONE

1. Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$ per ogni valore di a;
2. abbiamo

$$f_a(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 2a = x^4 + x^2 + 2a = f_a(x)$$

pertanto f è pari e possiamo restringerne lo studio all'insieme $[0, +\infty)$;

3. l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix}$;

l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x^4 + x^2 + 2a = 0$$

si tratta di una equazione biquadratica, usando la sostituzione $t = x^2$ si ottiene:l'equazione

$$t^2 + t + 2a = 0$$

essendo il discriminante $\Delta = 1 - 8a$ si hanno vari casi al variare di a:
se $a > \frac{1}{8}$ allora $\Delta < 0$ e l'equazione non ammette soluzioni,
se $a = \frac{1}{8}$ allora $\Delta = 0$ e l'equazione ammette due soluzioni coincidenti $t = -\frac{1}{2}$ ma essendo tali soluzioni negative non si hanno soluzioni per x,
se $a < \frac{1}{8}$ allora $\Delta > 0$ e l'equazione ammette due soluzioni distinte $t = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, in tal caso si ottiene $x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}}$ in particolare se $a \neq 0$ si hanno due intersezioni con l'asse delle ascisse di cui una con $x < 0$ e una con $x > 0$, precisamente:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1-8a}}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1-8a}}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

se $a = 0$ si ottiene di nuovo il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
4. per quello che riguarda il segno di f_a abbiamo: $f_a(x) > 0$ per

$$x^4 + x^2 + 2a > 0$$

in particolare, da quanto visto al punto 3., possiamo concludere che:
se $a \geq \frac{1}{8}$ allora $f_a(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
se $a < \frac{1}{8}$ allora $f_a(x) = \left(x^2 + \frac{1+\sqrt{1-8a}}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1-\sqrt{1-8a}}{2}\right)$, pertanto risulta $f_a(x) > 0$ per $x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-8a}}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-8a}}{2}}, +\infty\right[$;
5. abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{x} = +\infty$$

in particolare non è limitata superiormente e non esistono asintoti di f_a;
6. risulta:

$$f_a'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(x^2+1)$$

quindi si ha che $f_a'(x) > 0$ per ogni $x \in]0, +\infty[$ per ogni valore di a, in particolare f_a è crescente per $x > 0$, f_a è decrescente per $x < 0$ e nel punto $x = 0$ f_a ha un punto di minimo relativo, il valore di tale minimo è $2a$ e si tratta anche di minimo assoluto per la funzione ;

7. non esistono punti in cui f_a non è derivabile;

8. f_a non ammette punti di massimo relativo, nè assume massimo assoluto perché non è limitata superiormente;

9. risulta:

$$f_a''(x) = 12x^2 + 2$$

pertanto $f_a''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare f_a è convessa e non ammette flessi;

10. dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

ESERCIZIO 3

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = x^3 + \left|x^2 - 4\right| + x^2.$$

SOLUZIONE

1. Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$;

2. si ricava facilmente che f non presenta particolari simmetrie;

3. l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;

l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x^3 + \left|x^2 - 4\right| + x^2 = 0$$

a questo punto dobbiamo discutere il valore assoluto, la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 4 & \text{per } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ x^3 + 4 & \text{per } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

in particolare da $x^3 + 4 = 0$ si ottiene $x = \sqrt[3]{-4}$, inoltre si osserva che $x^3 + 2x^2 - 4 = x^3 + 2(x^2 - 2) > 0$ per $x \geq 2$ e $x^3 + 2x^2 - 4 = x^2(x + 2) - 4 < 0$ per $x \leq -2$ quindi si ha una sola intersezione con l'asse delle ascisse, precisamente il punto:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt[3]{4} \\ 0 \end{pmatrix};$$

4. per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) > 0$ per

$$x^3 + \left|x^2 - 4\right| + x^2 > 0$$

in particolare,per quanto visto al punto 3, abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ per } x > -\sqrt[3]{4}$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x < -\sqrt[3]{4};$$

5. abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

in particolare non è limitata inferiormente né superiormente e non esistono asintoti di f;

6. f è derivabile per $x \neq \pm 2$ e risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x & \text{per } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 3x^2 & \text{per } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

essendo $3x^2 + 4x = x(3x+4) > 0$ per $x < -\dfrac{4}{3}$ o $x > 0$ e $3x^2 > 0$ per $x \neq 0$, si ha che f è strettamente crescente per $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$e f non ha punti di massimo o minimo relativo;

7.essendo $\lim_{x\to -2^-} f'(x) = 4$, $\lim_{x\to -2^+} f'(x) = 12$, $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 12$, $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 20$, abbiamo che f non è derivabile per $x = \pm 2$;

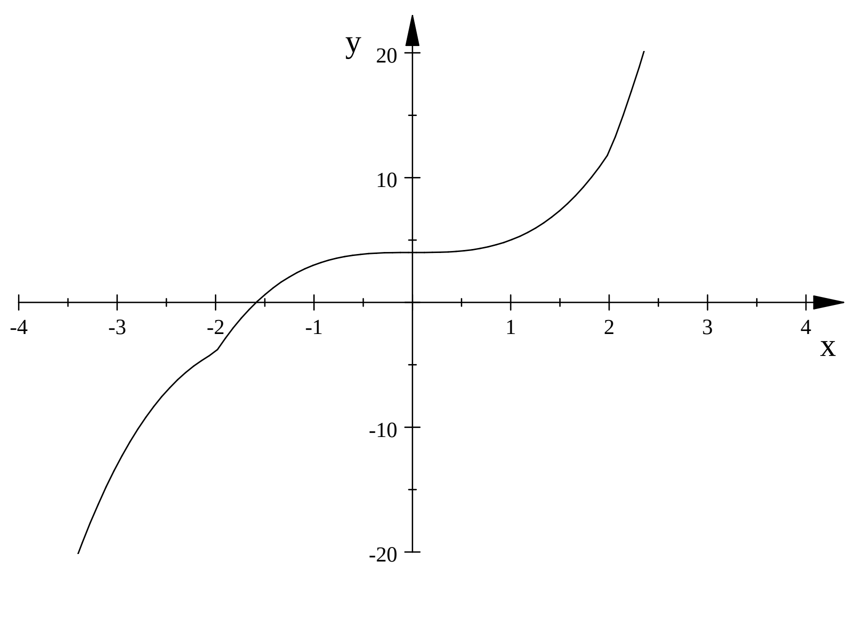
8.come già osservato nei punti precedenti f non ammette punti di massimo o minimo relativo, nè assume massimo o minimo assoluto;

9. risulta:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x + 4 & \text{per } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 6x & \text{per } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

essendo $6x + 4 > 0$ per $x > -\dfrac{2}{3}$ e $6x > 0$ per $x > 0$ si ha che $f''(x) > 0$ per $x \in 0, 2[\cup]2, +\infty[$e $f''(x) < 0$ per $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$, in particolare f è convessa per $x \in]0, 2[\cup]2, +\infty[$e f è concava per $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$, inoltre $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale;

10. dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)(x+2)}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

1. Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x+3)(x+2) \neq 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, -3[\cup]-3, -2[\cup]-2, +\infty[;$$

2. si ricava facilmente che f non presenta particolari simmetrie;

3. l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x^2 - 1 = 0$$

quindi si hanno due intersezioni con l'asse delle ascisse, precisamente i punti:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

4.per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) > 0$ per

$$\frac{x^2-1}{(x+3)(x+2)} > 0$$

essendo: $x^2 - 1 > 0$ per $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $x+3 > 0$ per $x > -3$, $x+2 > 0$ per $x > -2$, si ha:

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]-\infty, -3[\cup]-2, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x \in]-3, -2[\cup]-1, 1[;$$

5. abbiamo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

pertanto la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per f, inoltre:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty,$$

pertanto le retta di equazioni $x = -3$, $x = -2$ sono asintoti verticali per f, non esistono asintoti obliqui;

6. f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ e risulta:

$$f'(x) = \frac{5x^2 + 14x + 5}{(x+3)^2(x+2)^2}$$

essendo $5x^2 + 14x + 5 > 0$ per $x < \frac{-7-2\sqrt{6}}{5}$ o $x > \frac{-7+2\sqrt{6}}{5}0$, si ha che f è strettamente crescente per $x \in]-\infty, \frac{-7-2\sqrt{6}}{5}[\cup]\frac{-7+2\sqrt{6}}{5}, +\infty[$ e strettamente decrescente per $x \in \left]\frac{-7-2\sqrt{6}}{5}, \frac{-7+2\sqrt{6}}{5}\right[$, in particolare $x = \frac{-7-2\sqrt{6}}{5}$ è un punto di massimo relativo e $x = \frac{-7+2\sqrt{6}}{5}$ è un punto di minimo relativo;

7. f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$;

8.come già osservato nei punti precedenti f non ammette punti di massimo o minimo assoluto;

9. risulta:

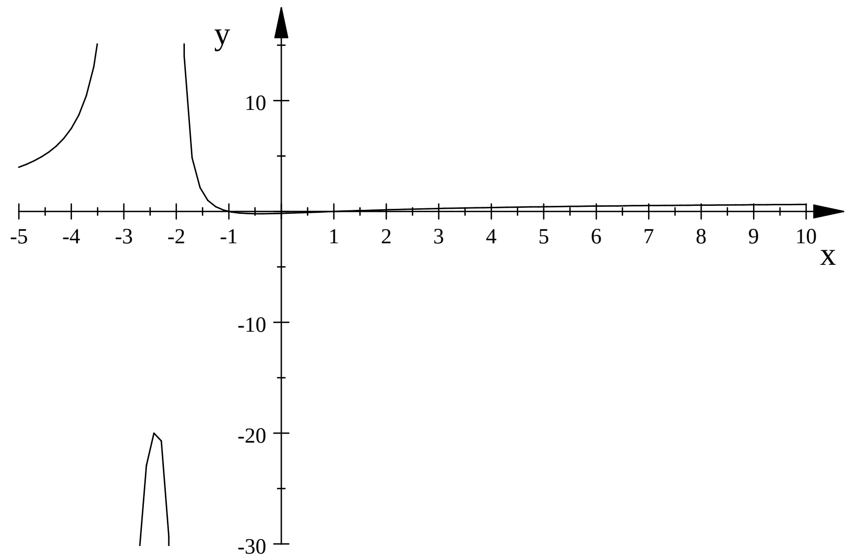
$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(10x+14)(x^2+5x+6)^2 - 2(5x^2+14x+5)(x^2+5x+6)(2x+5)}{(x+3)^4(x+2)^4} \\
&= 2\frac{(x^2+5x+6)\left[(x^2+5x+6)(5x+7) - (5x^2+14x+5)(2x+5)\right]}{(x+3)^4(x+2)^4} \\
&= 2\frac{(5x^3+32x^2+65x+42) - (10x^3+53x^2+80x+25)}{(x+3)^3(x+2)^3} \\
&= -2\frac{5x^3+21x^2+15x-17}{(x+3)^3(x+2)^3}
\end{aligned}$$

per studiare il segno di $f''(x)$ si considera la funzione

$$z(x) = -(5x^3 + 21x^2 + 15x - 17)$$

essendo $\lim_{x\to\pm\infty} z(x) = \mp\infty$ e $z'(x) = -15x^2 - 42x - 15 > 0$ per $x \in \left]\frac{-21-\sqrt{216}}{15}, \frac{-21+\sqrt{216}}{15}\right[$, $z\left(\frac{-21-\sqrt{216}}{15}\right) > 0$, $z(0) > 0$, $z(1) < 0$, considerando anche il segno del denominatore, si ha che $f''(x) > 0$ per $x \in]-\infty, \alpha[$ con $0 < \alpha < 1$, in particolare f è convessa per $x \in]0, \alpha[$ e f è concava per $x \in]\alpha, +\infty[$, inoltre $x = \alpha$ è un punto di flesso;

10. dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 5}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{2x^2 - 6}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

1. Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2(x^2-3) \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} x \neq -\sqrt{3} \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[;$$

2. si ricava facilmente che $f(-x) = -f(x)$, pertanto f è dispari;

3. l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x(x^2 - 1) = 0$$

quindi si hanno tre intersezioni con l'asse delle ascisse, precisamente i punti:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

4.per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) > 0$ per

$$\frac{x(x^2-1)}{2(x^2-3)} > 0$$

essendo: $x^2 - 1 > 0$ per $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $x^2 - 3 > 0$ per $x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, $x > 0$ per $x > 0$, si ha:

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]0, 1[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-1, 0[\cup]1, \sqrt{3}[;$$

5. abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0,$$

pertanto la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$ è asintoto obliquo per f, inoltre:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty,$$

pertanto le rette di equazioni $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ sono asintoti verticali per f, non esistono asintoti orizzontali;

6. f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ e risulta:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 3}{2(x^2+3)^4}$$

essendo $x^4 - 8x^2 + 3 > 0$ per $x^2 < 4 - \sqrt{13}$ o $x^2 > 4 + \sqrt{13}$, ossia per $x < -\sqrt{4+\sqrt{13}}$ o $x > \sqrt{4+\sqrt{13}}$ o $-\sqrt{4-\sqrt{13}} < x < \sqrt{4-\sqrt{13}}$si ha che f è strettamente crescente per $x \in \left]-\infty, -\sqrt{4+\sqrt{13}}\right[\cup\left]-\sqrt{4-\sqrt{13}}, \sqrt{4-\sqrt{13}}\right[\cup \left]\sqrt{4+\sqrt{13}}, +\infty\right[$ e strettamente decrescente per $x \in \left]-\sqrt{4+\sqrt{13}}, -\sqrt{3}\right[\cup \left]-\sqrt{3}, -\sqrt{4-\sqrt{13}}\right[\cup \left]\sqrt{4-\sqrt{13}}, \sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, \sqrt{4+\sqrt{13}}\right[$, in particolare $x = -\sqrt{4+\sqrt{13}}$ e $x = \sqrt{4-\sqrt{13}}$ sono punti di massimo relativo e $x = -\sqrt{4-\sqrt{13}}$ e $x = \sqrt{4+\sqrt{13}}$ sono punti di minimo relativo;

7. f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$;

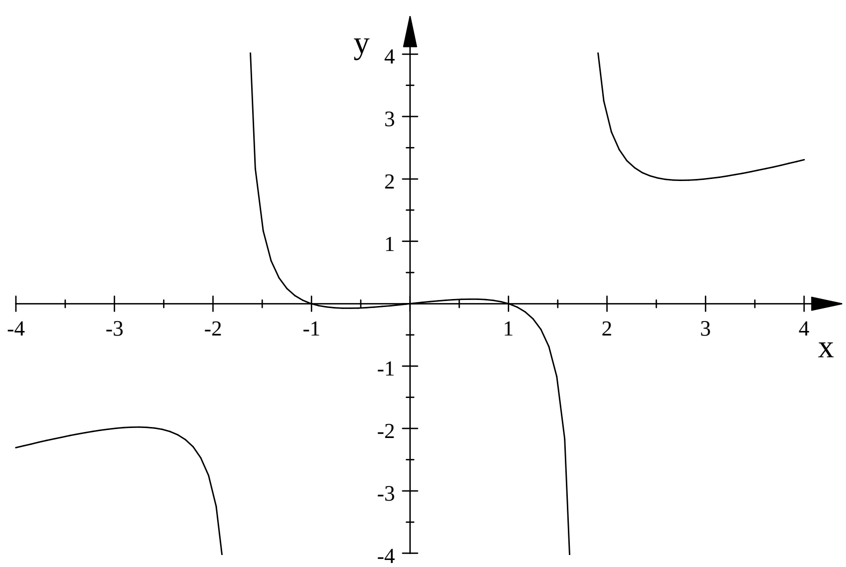
8.come già osservato nei punti precedenti f non ammette punti di massimo o minimo assoluto;

9. risulta:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3-16x)(x^2-3)^2-2(x^2-3)(2x)(x^4-8x^2+3)}{2(x^2-3)^4} \\ &= 4\frac{(x^2-3)x\left[(x^2-4)(x^2-3)-(x^4-8x^2+3)\right]}{2(x^2-3)^4} \\ &= 2x\frac{(x^4-7x^2+12)-(x^4-8x^2+3)}{(x^2-3)^3} \\ &= 2x\frac{x^2+9}{(x^2-3)^3} \end{aligned}$$

pertanto $f''(x) > 0$ per $x \in \left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$, $f''(x) < 0$ per $x \in]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]]0,\sqrt{3}\left[\right.$, in particolare f è convessa per $x \in \left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$ e f è concava per $x \in]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]]0,\sqrt{3}\left[\right.$, inoltre $x=0$ è un punto di flesso;

10. dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



ESERCIZIO 6

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^2.$$

SOLUZIONE

1. Si ha:

$$I.E.(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

pertanto:
$$I.E.(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[;$$

2. si ricava facilmente che f non presenta particolari simmetrie;

3. l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:
$$\frac{1}{x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$
cioè:
$$x^2 - x + 1 = 0$$
si osserva che l'equazione non ammette radici reali, pertanto non si hanno intersezioni con l'asse delle ascisse;

4.per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) > 0$ per
$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2} > 0$$
essendo: $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 > 0$ per ogni $x \in I.E.(f) > 0$, si ha:
$$f(x) > 0 \text{ per ogni } x \in I.E.(f);$$

5. abbiamo:
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$
pertanto la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per f, inoltre:
$$\lim_{x \to 0^{\mp}} f(x) = +\infty,$$
pertanto la retta di equazioni $x = 0$ è asintoto verticale per f, non esistono asintoti obliqui;

6. f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ e risulta:
$$f'(x) = \frac{x-2}{x^3}$$
essendo $x - 2 > 0$ per $x > 2$ e $x^3 > 0$ per $x > 0$, si ha che f è strettamente crescente per $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 2[$ e strettamente decrescente per $x \in]2, +\infty[$, in particolare $x = 2$ è un punto di minimo relativo per f e $f(2) = \frac{3}{4}$;

7. f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$;

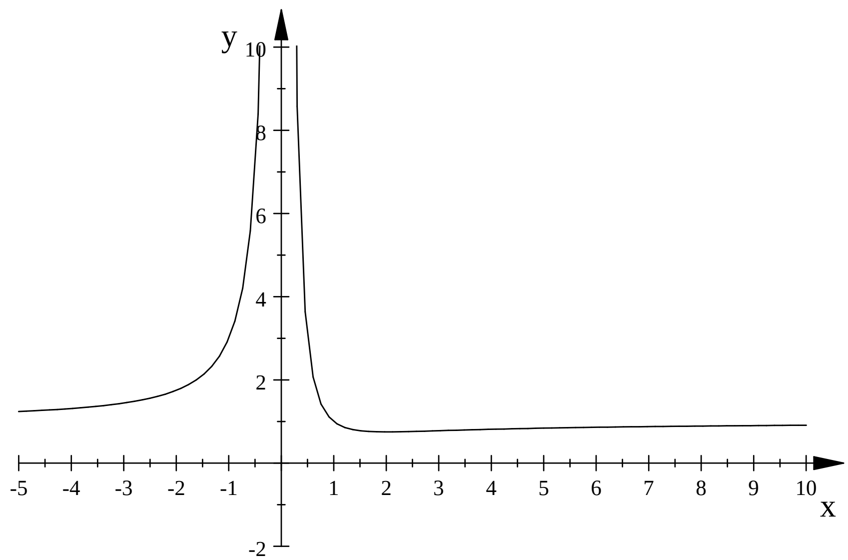
8.come già osservato nei punti precedenti f non ammette punti di massimo assoluto non essendo limitata superiormente, tuttavia f ammette minimo assoluto, precisamente $\frac{3}{4} = f(2)$;

9. risulta:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^3 - 3x^2(x-2)}{x^6} \\ &= \frac{-2x+6}{x^4} \end{aligned}$$

pertanto $f''(x) > 0$ per $x > 3$, in particolare f è convessa per $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 3[$ e f è concava per $x \in]3, +\infty[$, inoltre $x = 3$ è un punto di flesso;

10. dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



ESERCIZIO 7

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{2x - 3|x| + 1}{2 - |x|}.$$

SOLUZIONE

1. Si osserva che

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \neq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} \end{aligned}$$

pertanto:$I.E.(f) =]-\infty, -2[\cup] - 2, 2[\cup]2, +\infty[$;

2. si ricava facilmente che f non presenta particolari simmetrie;

3. l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$2x - 3|x| + 1 = 0$$

a questo punto dobbiamo discutere il valore assoluto, la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{2-x} & \text{per } x \in [0, +\infty[\\ \dfrac{5x+1}{2+x} & \text{per } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

in particolare da $-x + 1 = 0$ si ottiene $x = 1$ e da $5x + 1 = 0$ si ottiene $x = -\dfrac{1}{5}$ quindi si hanno due intersezioni con l'asse delle ascisse, precisamente i punti:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

4. a questo punto conviene studiare separatamente le due funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x-1}{x-2} \quad \text{per } x \in [0, +\infty[\ , \\ f_2(x) &= \frac{5x+1}{x+2} \quad \text{per } x \in]-\infty, 0[\end{aligned}$$

per quello che riguarda il segno di f_1 abbiamo: $f_1(x) > 0$ per

$$x \in [0, 1[\cup]2, +\infty[$$

in particolare,per quanto visto al punto 3, abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ per } x > -\sqrt[3]{4}$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x < -\sqrt[3]{4};$$

5. abbiamo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

in particolare non è limitata inferiormente né superiormente e non esistono asintoti di f;

6. f è derivabile per $x \neq \pm 2$ e risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x & \text{per } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 3x^2 & \text{per } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

essendo $3x^2 + 4x = x(3x + 4) > 0$ per $x < -\dfrac{4}{3}$ o $x > 0$ e $3x^2 > 0$ per $x \neq 0$, si ha che f è strettamente crescente per $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$e f non ha punti di massimo o minimo relativo;

7.essendo $\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) = 12$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = 12$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = 20$, abbiamo che f non è derivabile per $x = \pm 2$;

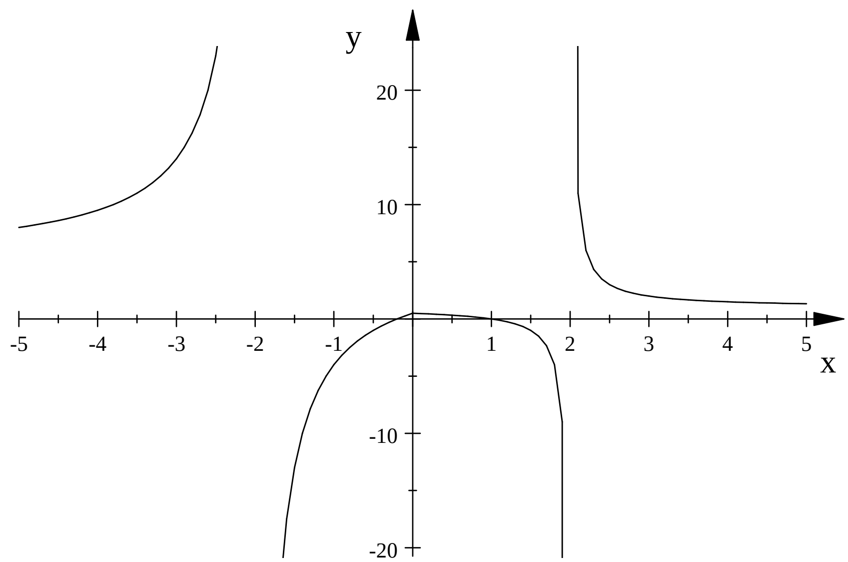
8.come già osservato nei punti precedenti f non ammette punti di massimo o minimo relativo, nè assume massimo o minimo assoluto;

9. risulta:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x + 4 & \text{per } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 6x & \text{per } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

essendo $6x + 4 > 0$ per $x > -\dfrac{2}{3}$ e $6x > 0$ per $x > 0$ si ha che $f''(x) > 0$ per $x \in 0, 2[\cup]2, +\infty[$e $f''(x) < 0$ per $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$, in particolare f è convessa per $x \in]0, 2[\cup]2, +\infty[$e f è concava per $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$, inoltre $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale;

10. dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



ESERCIZIO 8

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{|2x - 3|} + \frac{|x - 2|}{2x - 3}.$$

SOLUZIONE

Si osserva che

$$I.E.(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \frac{3}{2} \right\}$$

pertanto:$I.E.(f) = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$;
si ricava facilmente che f non presenta particolari simmetrie;
l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;
a questo punto dobbiamo discutere i valori assoluti, la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+x-3}{3-2x} & \text{per } x \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[\\ \dfrac{2x^2-x+1}{2x-3} & \text{per } x \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right] \\ \dfrac{2x^2+x-3}{2x-3} & \text{per } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

studiamo separatamente le tre funzioni:
a) $f_1(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{3-2x}$, $x \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

si ottiene $x = \dfrac{-3}{2}$, $x = 1$, quindi si hanno due intersezioni con l'asse delle ascisse, precisamente i punti:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

per quello che riguarda il segno di f_1 abbiamo: $f_1(x) > 0$ per

$$2x^2 + x - 3 > 0$$

in particolare, abbiamo:

$$f_1(x) > 0 \text{ per } x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[$$

$$f_1(x) < 0 \text{ per } x \in \left]-\frac{3}{2}, 1\right[;$$

risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = -1, \lim_{x\to-\infty} (f_1(x) + x) = -2$$

in particolare non è limitata superiormente e la retta di equazione $y = -x - 2$ è un asintoto obliquo di f_1, inoltre:

$$\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f_1(x) = +\infty,$$

in particolare la retta di equazione $x = \dfrac{3}{2}$ è un asintoto verticale per f_1;

f_1 è derivabile per $x \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ e risulta:

$$f_1'(x) = \frac{-4x^2 + 12x - 3}{(3-2x)^2}$$

essendo $-4x^2 + 12x - 3 > 0$ per $x \in \left]\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{6}}{2}\right[$, si ha che f_1 è strettamente decrescente per $x \in \left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{6}}{2}\right[$ e strettamente crescente per $x \in \left]\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$, f_1 non ha punti di massimo relativo, ha un punto di minimo relativo, che è anche assoluto, per $x = \dfrac{3-\sqrt{6}}{2}$, il minimo assoluto vale $f_1\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6} - \dfrac{7}{2}$;

risulta:

$$f''(x) = \frac{24}{(3-2x)^3}$$

in particolare f_1 è convessa;

b) $f_2(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{2x - 3}$, $x \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right]$

l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

questa equazione non ha soluzioni reali, quindi non si hanno intersezioni con l'asse delle ascisse;

per quello che riguarda il segno di f_2 abbiamo:

$$f_2(x) > 0 \text{ per } x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right];$$

risulta:

$$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^+} f_2(x) = +\infty,$$

in particolare f_2 non è limitata superiormente e la retta di equazione $x = \dfrac{3}{2}$ è un asintoto verticale per f_2,

$f_2(2) = 7$;

f_2 è derivabile per $x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$ e risulta:

$$f_2'(x) = \frac{4x^2 - 12x + 1}{(2x-3)^2}$$

essendo $4x^2 - 12x + 1 < 0$ per $x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$, si ha che f_2 è strettamente decrescente per nell'intervallo considerato, f_2 non ha punti di massimo relativo, ha un punto di minimo assoluto, $x = 2$, il minimo assoluto vale $f_2(2) = 7$;
risulta:

$$f_2''(x) = \frac{32}{(2x-3)^3}$$

in particolare f_2 è convessa;
c) $f_3(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{2x - 3}$, $x \in \left]2, +\infty\right[$
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

quindi non si hanno intersezioni con l'asse delle ascisse, nell'intervallo considerato;
per quello che riguarda il segno di f_3 abbiamo: $f_3(x) > 0$ per

$$2x^2 + x - 3 > 0$$

in particolare, abbiamo:

$$f_3(x) > 0 \text{ per } x \in \left]2, +\infty\right[;$$

risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = 1, \ \lim_{x \to +\infty} (f_3(x) - x) = 2$$

in particolare non è limitata superiormente e la retta di equazione $y = x + 2$ è un asintoto obliquo di f_3, inoltre f_3 è definita anche in $x = 2$ e vale $f_3(2) = 7$;
f_3 è derivabile per $x \in \left]2, +\infty\right[$ e risulta:

$$f_1'(x) = \frac{4x^2 - 12x + 3}{(2x-3)^2}$$

essendo $4x^2 - 12x + 3 > 0$ per $x \in \left]-\infty, \frac{3-\sqrt{6}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$, si ha che f_3 è strettamente decrescente per $x \in \left]2, \frac{3+\sqrt{6}}{2}\right[$ e strettamente crescente per $x \in \left]\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$, f_1 non ha punti di massimo relativo, ha un punto di minimo relativo, che è anche assoluto, per $x = \dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$, il minimo assoluto vale $f_3\left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6} + \dfrac{7}{2}$;

risulta:

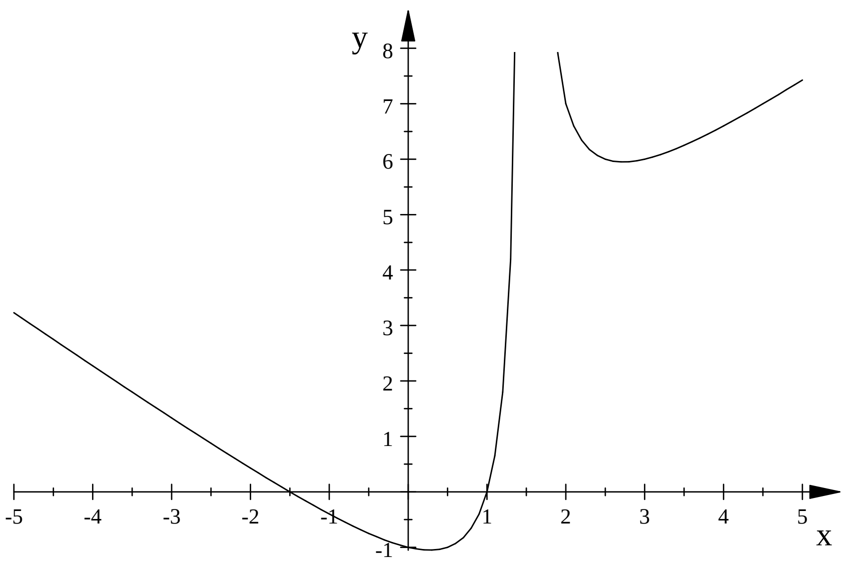
$$f''(x) = \frac{24}{(2x-3)^3}$$

in particolare f_3 è convessa;

per quello che riguarda f dobbiamo ancora osservare che nel punto $x = 2$ essa non è derivabile, infatti: $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f_2'(x) = -7$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f_3'(x) = -5$;

inoltre il minimo assolutro di f è il minimo assoluto di f_1;

unendo i risultati precedenti otteniamo il seguente grafico di f:



ESERCIZIO 9

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+|x+4|}{x-3} & x < 0 \\ \dfrac{x-|3x-4|}{x+3} & x \geq 0 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$;
si ricava facilmente che f non presenta particolari simmetrie;
l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$;
a questo punto dobbiamo discutere i valori assoluti, la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-3} & \text{per } x \in \left]-\infty, -4\right] \\ \dfrac{3x+4}{x-3} & \text{per } x \in \left]-4, 0\right[\\ \dfrac{4x-4}{x+4} & \text{per } x \in \left[0, \dfrac{4}{3}\right] \\ \dfrac{-2x+4}{x+4} & \text{per } x \in \left]\dfrac{4}{3}, +\infty\right[\end{cases}$$

studiamo separatamente le quattro funzioni:
a) $f_1(x) = \dfrac{x-4}{x-3}$, $x \in \left]-\infty, -4\right]$
si ricava facilmente che non si hanno intersezioni con l'asse delle ascisse e che $f_1(x) > 0$ per ogni $x \in \left]-\infty, -4\right]$;
risulta inoltre:

$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 1,$$

in particolare la retta di equazione $x = 2$ è un asintoto orizzontale di f_1, inoltre:

$$f_1(-4) = \frac{8}{7};$$

f_1 è derivabile per $x \in \left]-\infty, -4\right[$ e risulta:

$$f_1'(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

pertanto f_1 è strettamente crescente per $x \in \left]-\infty, -4\right[$;
risulta:

$$f_1''(x) = \frac{-2}{(x-3)^3}$$

in particolare f_1 è convessa;
b) $f_2(x) = \dfrac{3x+4}{x-3}$, $x \in \left]-4, 0\right]$
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$3x + 4 = 0$$

da cui si ottiene il punto:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix};$$

per quello che riguarda il segno di f_2 abbiamo:

$$f_2(x) > 0 \text{ per } x \in \left]-4, -\frac{4}{3}\right[, \quad f_2(x) < 0 \text{ per } x \in \left]-\frac{4}{3}, 0\right[;$$

f_2 è definita anche in -4 e risulta:

$$f_2(-4) = \frac{8}{7},\ f_2(0) = -\frac{4}{3};$$

f_2 è derivabile per $x \in \left]-\frac{4}{3}, 0\right[$ e risulta:

$$f_2'(x) = \frac{-5}{(x-3)^2}$$

pertanto f_2 è strettamente decrescente per nell'intervallo considerato;
risulta inoltre:

$$f_2''(x) = \frac{10}{(x-3)^3}$$

in particolare f_2 è concava;
c) $f_3(x) = \dfrac{4x-4}{x+4},\ x \in \left[0, \dfrac{4}{3}\right]$
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x - 1 = 0$$

da cui si ottiene il punto:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

per quello che riguarda il segno di f_3 abbiamo:

$$f_3(x) > 0 \text{ per } x \in \left]1, \frac{4}{3}\right[, \quad f_2(x) < 0 \text{ per } x \in]0, 1[\,;$$

risulta:

$$f_3(0) = -1,\ f_3\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4};$$

f_2 è derivabile per $x \in \left]0, \frac{4}{3}\right[$ e risulta:

$$f_3'(x) = \frac{20}{(x+4)^2}$$

pertanto f_3 è strettamente crescente nell'intervallo considerato;
risulta inoltre:

$$f_3''(x) = \frac{-40}{(x+4)^3}$$

in particolare f_3 è concava;
d) $f_4(x) = \dfrac{-2x+4}{x+4}$, $x \in \left]\dfrac{4}{3}, +\infty\right[$
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x - 2 = 0$$

da cui si ottiene il punto:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

per quello che riguarda il segno di f_4 abbiamo:

$$f_4(x) > 0 \text{ per } x \in \left]\frac{4}{3}, 2\right[, \;\; f_2(x) < 0 \text{ per } x \in]2, +\infty[\,;$$

risulta inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = -2,$$

in particolare la retta di equazione $y = -2$ è un asintoto verticale di f_4, inoltre f_4 è definita in $x = \dfrac{4}{3}$ e risulta:

$$f_4\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4},$$

:f_4 è derivabile per $x \in \left]\dfrac{4}{3}, +\infty\right[$ e risulta:

$$f_4'(x) = \frac{-4}{(x+4)^2}$$

pertanto f_4 è strettamente decrescente nell'intervallo considerato;
risulta inoltre:

$$f_4''(x) = \frac{8}{(x+4)^3}$$

in particolare f_3 è convessa;
per quello che riguarda f dobbiamo ancora osservare che nel punto $x = 0$ essa non è continua infatti: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\dfrac{4}{3}$, $f(0) = -1$;
inoltre f non è derivabile, oltre che nel punto $x = 0$, nei punti $x = -4$ e $x = \dfrac{4}{3}$, infatti:

$$\lim_{x\to -4^-} f'(x) = \lim_{x\to -4^-} f_1'(x) = \frac{1}{49}, \lim_{x\to -4^+} f'(x) = \lim_{x\to -4^+} f_2'(x) = \frac{-5}{49},$$

$$\lim_{x\to \frac{4}{3}^-} f'(x) = \lim_{x\to \frac{4}{3}^-} f_3'(x) = \frac{180}{(16)^2}, \lim_{x\to \frac{4}{3}^+} f'(x) = \lim_{x\to \frac{4}{3}^+} f_4'(x) = \frac{-36}{(16)^2};$$

inoltre, pur essendo limitata inferiormente e superiormente f non ha minimo assoluto, invece ha massimo assoluto $f(-4) = \frac{8}{7}$;
unendo i risultati precedenti otteniamo il seguente grafico di f:

ESERCIZIO 10

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico al variare di $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = \frac{x + |x-a|}{|x| - 8}.$$

SOLUZIONE

Si osserva che $I.E.(f_a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 8\}$;pertanto:

$$I.E.(f_a) =]-\infty, -8[\cup]-8, 8[\cup]8, +\infty[;$$

si ricava facilmente che f_a non presenta particolari simmetrie;
l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{|a|}{8} \end{pmatrix}$;
a questo punto dobbiamo discutere i valori assoluti al variare di a, precisamente si hanno tre casi:
i) se $a = 0$ la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-8} & \text{per } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{per } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

ii) se $a > 0$ la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{-x-8} & \text{per } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{a}{x-8} & \text{per } x \in [0, a] \\ \dfrac{2x-a}{x-8} & \text{per } x \in]a, +\infty[\end{cases}$$

iii) infine se $a < 0$ la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{-x-8} & \text{per } x \in]-\infty, a[\\ \dfrac{2x-a}{-x-8} & \text{per } x \in [a, 0] \\ \dfrac{2x-a}{x-8} & \text{per } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

in ognuno dei tre casi si studiamo separatamente le varie funzioni procedendo in modo del tutto analogo all'esercizio precedente e si ottengono i seguenti grafici:

ESERCIZIO 11

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = |x-1| + \sqrt[3]{x-2}.$$

SOLUZIONE

Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$;
non si notano particolari simmetrie del grafico;
l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1+\sqrt[3]{-2} \end{pmatrix}$;
a questo punto conviene discutere il valore assoluto, precisamente la funzione si può scrivere come:

$$f(x) = \begin{array}{ll} x-1+\sqrt[3]{x-2} & \text{per } x \geq 1 \\ -x+1+\sqrt[3]{x-2} & \text{per } x < 1 \end{array}$$

studiamo le due funzioni separatamente:
a) $f_1(x) = x-1+\sqrt[3]{x-2}$, $x \geq 1$
abbiamo

$$f_1(1) = -1, \ \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 1, \ \lim_{x\to+\infty} f_1(x) - x = +\infty$$

in particolare f_1 non ha asintoti e non è limitata superiormente;
f_1 è derivabile per $x \neq 2$ e risulta:

$$f_1'(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$$

si ha che $f_1'(x) > 0$ per ogni $x \neq 2$, in particolare f_1 è strettamente crescente negli intervalli $]1, 2[$, $]2, +\infty[$;
f_1 interseca l'asse delle ascisse in un punto $x = \alpha$ con $1 < \alpha < 2$;
risulta inoltre:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}$$

pertanto $f_1''(x) < 0$ per $x > 2$, $f_1''(x) > 0$ per $1 < x < 2$, in particolare f_1 è convessa per $1 < x < 2$ e concava per $x > 2$, il punto $x = 2$ risulta essere un punto di flesso in quanto in esso muta la concavità della funzione;

b) $f_2(x) = -x + 1 + \sqrt[3]{x-2}$, $x < 1$

abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty, \ \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = -1, \ \lim_{x\to-\infty} f_1(x) + x = -\infty$$

inoltre f_2 è definita in 1 e $f_2(1) = -1$, in particolare f_2 non ha asintoti e non è limitata superiormente;

f_2 è derivabile per $x < 1$ e risulta:

$$f_2'(x) = -1 + \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$$

si ha che $f_2'(x) > 0$ per $-1 + \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} > 0$, cioè $-3(x-2)^{\frac{2}{3}} + 1 > 0$, $(x-2)^{\frac{2}{3}} < \frac{1}{3}$, $(x-2)^2 < \frac{1}{27}$, $-\frac{1}{\sqrt{27}} < x - 2 < \frac{1}{\sqrt{27}}$, $-\frac{1}{\sqrt{27}} + 2 < x < \frac{1}{\sqrt{27}} + 2$, in particolare, essendo $2 - \frac{1}{\sqrt{27}} < 1$, f_2 è strettamente decrescente nell'intervallo considerato;

f_2 interseca l'asse delle ascisse in un punto $x = \beta$ con $-1 < \beta < 0$;

risulta inoltre:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}$$

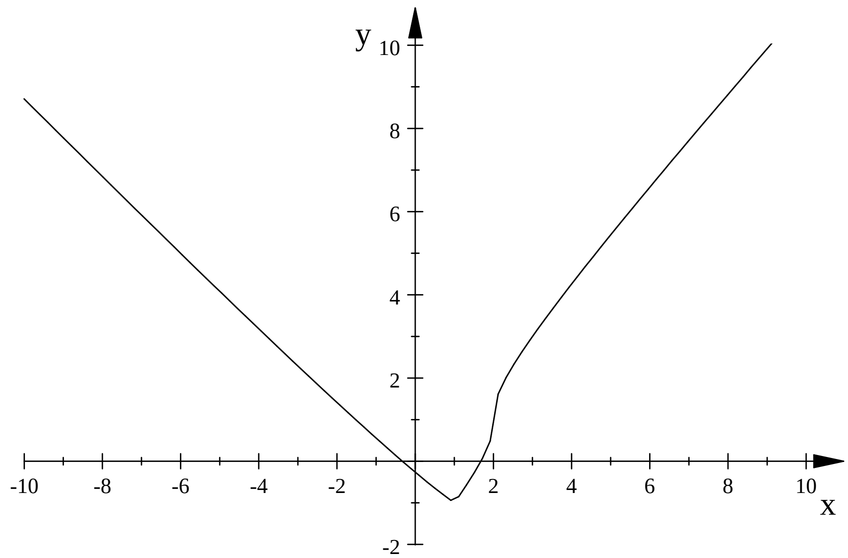
pertanto $f_2''(x) > 0$ per $x < 1$, in particolare f_2 è convessa;

per quello che riguarda f aggiungiamo che essa non è derivabile nei punti $x = 2$, come già precedentemente osservato, e $x = 1$ in quanto risulta:

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} f_2'(x) = \frac{2}{3}, \ \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f_1'(x) = \frac{4}{3},$$

inoltre f ammette minimo assoluto nel punto $x = 1$ e tale minimo vale $f(1) = -1$;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 12}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + (x-3)^2.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 6x + 8 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ o } x \geq 4\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[;$$

osservando che $x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$ si ricava facilmente che il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 3$, equivalentemente $f(3-x) = f(3+x)$, infatti:

$$\begin{aligned} (3-x) &= \sqrt{(3-x-3)^2 - 1} + (3-x-3)^2 = \sqrt{x^2-1} + x^2 \\ f(3+x) &= \sqrt{(3+x-3)^2 - 1} + (3+x-3)^2 = \sqrt{x^2-1} + x^2 \end{aligned}$$

in particolare potremmo limitare lo studio della funzione all'intervallo $[4, +\infty[$, comunque la studieremo globalmente;

l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

inoltre:

$$f(2) = f(4) = 1,$$

pertanto non ci sono asintoti per f e non è limitata superiormente;

6. f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f) \backslash \{2, 4\}$ e risulta:

$$f'(x) = (x - .3) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} + 2 \right)$$

dunque si ha che f è strettamente decrescente per $x \in] - \infty, 2[$ e strettamente crescente per $x \in]4, +\infty[$, in particolare;

i punti $x = 2$ e $x = 4$ sono punti di minimo assoluto, tale minimo vale 1;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} + 2 + \frac{-(x-3)^2}{(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 - 6x + 8}} \\ &= 2 - \frac{1}{(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 - 6x + 8}} \\ &= 2 - \frac{1}{\sqrt{\left((x-3)^2 - 1\right)^3}} \end{aligned}$$

per studiare il segno di $f''(x)$ si considera la disequazione:

$$2 - \frac{1}{\sqrt{\left((x-3)^2 - 1\right)^3}} > 0$$

da cui si ottiene:

$$\left((x-3)^2 - 1\right)^3 > \frac{1}{4}$$

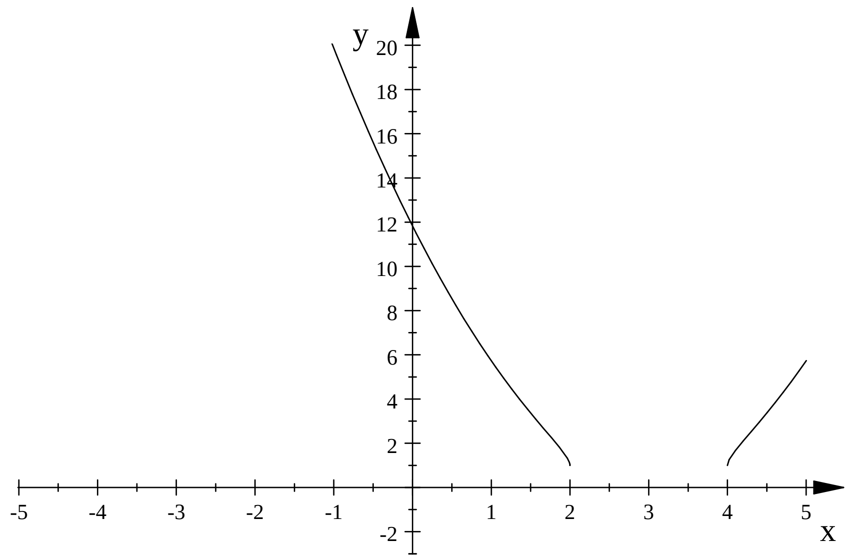
$$(x-3)^2 > 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

e in definitiva:

$$x < 3 - \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}, \ x > 3 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$

in particolare f è convessa per $x \in \left]-\infty, 3 - \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\right[\cup \left]3 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}, +\infty\right[$ e f è concava per $x \in \left]3 - \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}, 2\right[\cup \left]4, 3 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\right[$, inoltre $x = 3 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$ sono punti di flesso;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



ESERCIZIO 13

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x - 3} + (x - 1).$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -3 \text{ o } x \geq \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[;$$

non si rilevano particolari simmetriedel grafico di f;

f non interseca l'asse delle ordinate in quanto in $x = 0$ non è definita;
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 3} + (x - 1) = 0$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = (1 - x)^2 \\ x < 1 \end{cases}$$

ossia i punti:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-7 \pm \sqrt{65}}{2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \text{ per } x \in \left]-\infty, \frac{-7-\sqrt{65}}{2}\right[\cup \left]\frac{-7+\sqrt{65}}{2}, +\infty\right[, \\ f(x) &< 0 \text{ per } x \in \left]\frac{-7-\sqrt{65}}{2}, -3\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{-7+\sqrt{65}}{2}\right[; \end{aligned}$$

risulta inoltre:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\left(\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}} + \left(-1+\frac{1}{x}\right)\right)\right) = +\infty, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\right) = +\infty, \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\pm\left(\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}} \mp \left(-1+\frac{1}{x}\right)\right)\right) = 1 \pm \sqrt{2}, \\ \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \left(1\pm\sqrt{2}\right)x\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{2x^2+5x-3} - 1 \mp \sqrt{2}x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\pm\sqrt{2}x\left(\sqrt{1+\frac{5}{2x}-\frac{3}{2x^2}} - 1\right) - 1\right) = \pm\sqrt{2}\frac{5}{4} - 1, \end{aligned}$$

in particolare le rette di equazione $y = \left(1+\sqrt{2}\right)x + \dfrac{5\sqrt{2}}{4} - 1$ e $y = \left(1-\sqrt{2}\right)x - \dfrac{5\sqrt{2}}{4} - 1$ sono asintoti obliqui di f, inoltre:

$$f(-3) = -4,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2};$$

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)\backslash\left\{-3, \dfrac{1}{2}\right\}$ e risulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-3}} + 1\right) \\ &= \frac{4x+5+2\sqrt{2x^2+5x-3}}{2\sqrt{2x^2+5x-3}} \end{aligned}$$

per studiare il segno di f' dobbiamo studiare la disequazione:

$$2\sqrt{2x^2+5x-3} > -4x - 5$$

la quale ha le seguenti soluzioni:

$$x > -\frac{5}{4}, \text{ oppure } \begin{cases} 4(2x^2 + 5x - 3) > (-4x - 5)^2 \\ x \leq -\frac{5}{4} \end{cases}$$

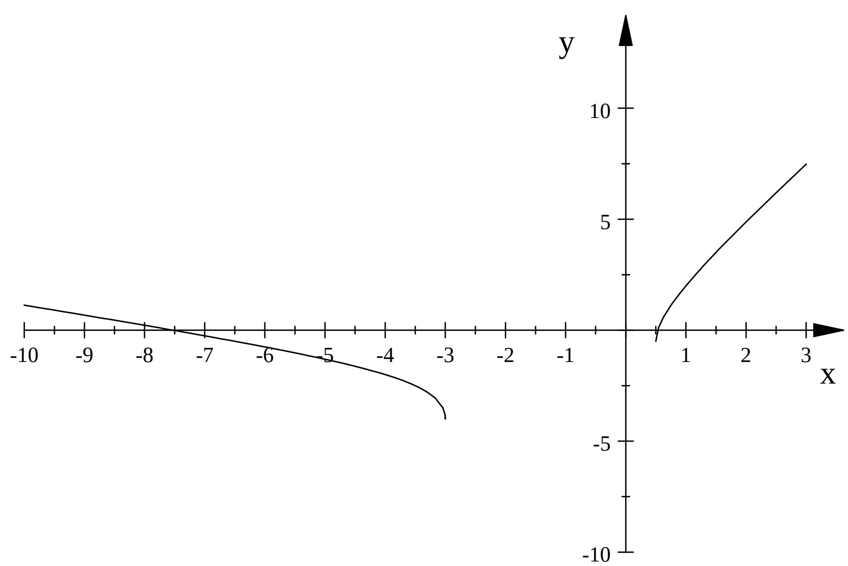
ossia:

$$x > -\frac{5}{4}, \text{ oppure } \begin{cases} 8x^2 + 20x + 37 < 0 \\ x \leq -\frac{5}{4} \end{cases}$$

ed essendo $8x^2 + 20x + 37 > 0$ per ogni x si ha che f è strettamente decrescente per $x \in \left]-\infty, -3\right[$ e strettamente crescente per $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$;
in particolare il punto $x = -3$ è un punto di minimo assoluto, tale minimo vale -4;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{8(2x^2 + 5x - 3) - 2(4x + 5)^2}{4\left(2x^2 + 5x - 3\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-8x^2 - 20x - 37}{2\left(2x^2 + 5x - 3\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

si verifica facilmente che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I.E.(f) \setminus \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ f è concava e non ci sono punti di flesso;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 14}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{|2x^2 - 15x|}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$;

si ricava facilmente che f non è né pari, né dispari, né periodica, tuttavia, essendo

$$2x^2 - 15x = 2\left(x - \frac{15}{4}\right)^2 - \frac{225}{8}$$

si ha che il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x = \dfrac{15}{4}$, infatti:

$$f\left(\frac{15}{4} - x\right) = \sqrt{\left|2\left(\frac{15}{4} - x - \frac{15}{4}\right)^2 - \frac{225}{8}\right|} = \sqrt{\left|2x^2 - \frac{225}{8}\right|} = f\left(\frac{15}{4} + x\right);$$

l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$2x^2 - 15x = 0$$

in particolare si ottiene $x = 0$ e $x = \dfrac{15}{2}$ quindi si hanno due intersezioni con l'asse delle ascisse, precisamente i punti:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$;

questo punto dobbiamo discutere il valore assoluto, la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 15x} & \text{per } x \in]-\infty, 0] \cup \left[\dfrac{15}{2}, +\infty\right[\\ \sqrt{-2x^2 + 15x} & \text{per } x \in \left]0, \dfrac{15}{2}\right[\end{cases}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= +\infty, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\sqrt{2}, \\
\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) \mp \sqrt{2}x\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{2x^2 - 15x} \mp \sqrt{2}x\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\left(\sqrt{2x^2 - 15x} \mp \sqrt{2}x\right) \frac{(\sqrt{2x^2 - 15x} \pm \sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2 - 15x} \pm \sqrt{2}x)}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 15x - 2x^2}{\sqrt{2x^2 - 15x} \pm \sqrt{2}x}\right) = \mp\frac{15}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

in particolare non è limitata superiormente e le rette $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{15}{4}\right)$, $y = -\sqrt{2}\left(x - \frac{15}{4}\right)$ sono asintoti obliqui di f; rispettivamente destro e sinistro;

f è derivabile per $x \neq 0$ e $x \neq \frac{15}{2}$ e risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x - 15}{2\sqrt{2x^2 - 15x}} & \text{per } x \in]-\infty, 0[\cup \left]\dfrac{15}{2}, +\infty\right[\\ \dfrac{-4x + 15}{2\sqrt{-2x^2 + 15x}} & \text{per } x \in \left]0, \dfrac{15}{2}\right[\end{cases}$$

essendo $4x - 15 > 0$ per $x > \frac{15}{4}$ si ha che f è strettamente crescente per $x \in]0, \frac{15}{4}[\cup \left]\right]\frac{15}{2}, +\infty\left[\right.$e strettamente decrescente per $x \in]-\infty, 0[\cup \left]\frac{15}{4}, \frac{15}{2}\right[$, in particolare il punto $x = \frac{15}{4}$ è un punto di massimo relativo per f, tale massimo vale $f\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{4}$, inoltre f ha punti due punti di minimo assoluto, $x = 0$, $x = \frac{15}{2}$, tale minimo vale 0;

$x = 0$ e $x = \frac{15}{2}$ sono punti cuspidali;

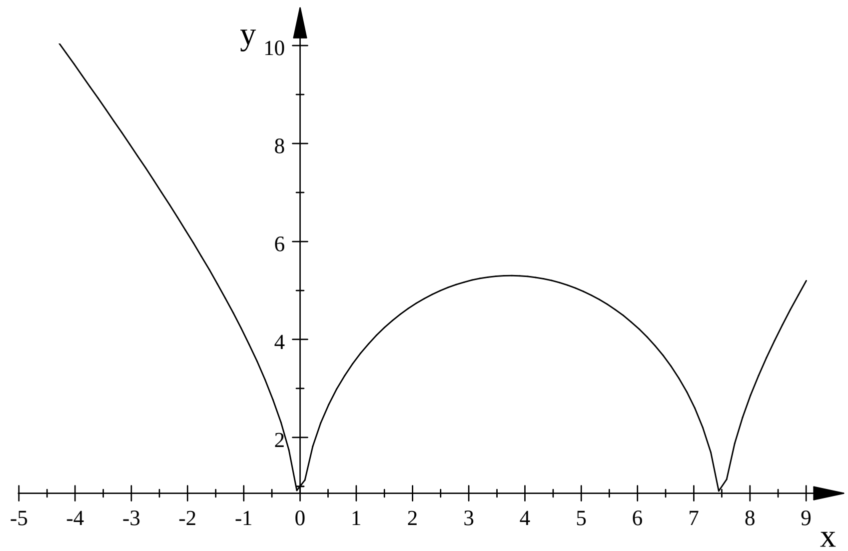
come già osservato nei punti precedenti f non ammette massimo assoluto;

risulta:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-225}{4(2x^2 - 15x)^{\frac{3}{2}}} & \text{per } x \in]-\infty, 0[\cup \left]\dfrac{15}{2}, +\infty\right[\\ \dfrac{-225}{4(-2x^2 + 15x)^{\frac{3}{2}}} & \text{per } x \in \left]0, \dfrac{15}{2}\right[\end{cases}$$

in particolare f è concava per $x \in]-\infty, 0[\cup \left]0, \frac{15}{2}\right[\cup \left]\frac{15}{2}, +\infty\right[$;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 15}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 8x}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$;
si ricava facilmente che il grafico di f non presenta particolari simmetrie;
l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
l'intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x^3 + 5x^2 + 8x = 0$$

ed essendo $x^3 + 5x^2 + 8x = x(x^2 + 5x + 8)$, con $x^2 + 5x + 8 > 0$ per ogni x, non si ottengono altre intersezioni;
in particolare per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$;
abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \pm\infty,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=2,\\
\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-2x\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} 2\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2+8x}-x\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\left(5x^2+8x\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2+8x}\right)^2+x^2+x\sqrt[3]{x^3+5x^2+8x}}\\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

in particolare non è limitata superiormente e la retta $y=2\left(x-\frac{5}{3}\right)$ è asintoto obliquo di f;
f è derivabile per $x\neq 0$ e risulta:

$$
f'(x)=\frac{2\left(3x^2+10x+8\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^3+5x^2+8x\right)^2}}
$$

essendo $3x^2+10x+8>0$ per $x>-\frac{4}{3}$ o $x<2$, si ha che f è strettamente crescente per $x\in]-\infty,-2[\cup\left]-\frac{4}{3},+\infty\right[$e strettamente decrescente per $x\in\left]-2,-\frac{4}{3}\right[$, in particolare il punto $x=-2$ è un punto di massimo relativo per f, tale massimo vale $f(-2)=-2\sqrt[3]{4}$, mentre il punto $x=-\frac{4}{3}$ è un punto di minimo relativo, tale minimo vale $f\left(-\frac{4}{3}\right)=-2\sqrt[3]{\frac{112}{27}}$;
in $x=0$ f non è derivabile, infatti:

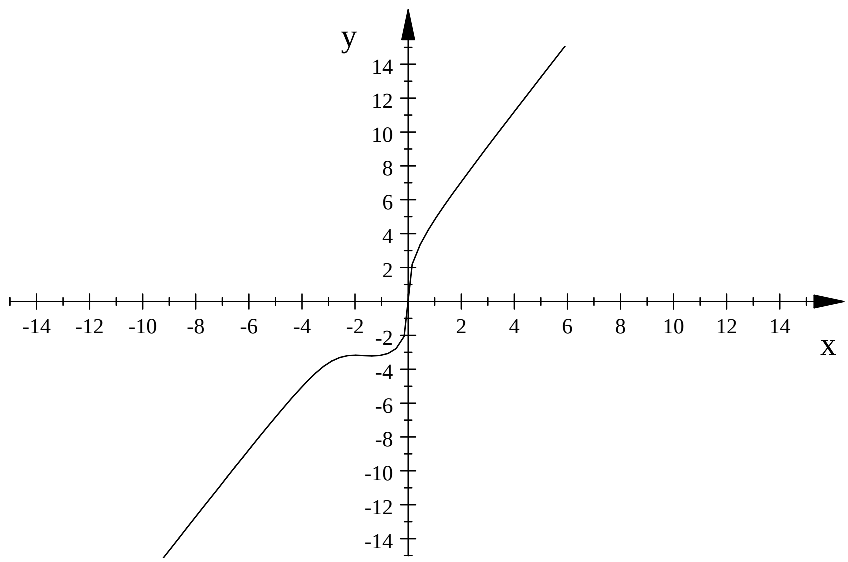
$$
\lim_{x\to 0^\pm} f'(x)=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{2\left(3x^2+10x+8\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^3+5x^2+8x\right)^2}}=\pm\infty;
$$

come già osservato nei punti precedenti f non ammette né massimo, né minimo assoluto;
risulta:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 2\frac{3\left(6x+10\right)\left(x^3+5x^2+8x\right)-2\left(3x^2+10x+8\right)^2}{9\sqrt[3]{\left(x^3+5x^2+8x\right)^5}}\\
&= 2\frac{3\left(6x^4+40x^3+98x^2+80x\right)-2\left(9x^4+148x^2+64+60x^3+160x\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^3+5x^2+8x\right)^5}}\\
&= -4\frac{x^2+40x+64}{9\sqrt[3]{\left(x^3+5x^2+8x\right)^5}}
\end{aligned}
$$

in particolare $f'' > 0$, cioè f è convessa, per $x \in]-\infty, -20-\sqrt{324}[\cup]-20+\sqrt{324}, 0[$ e $f'' < 0$, cioè f è concava, per $x \in]-20-\sqrt{324}, -20+\sqrt{324}[\cup]0, +\infty[$, f ammette tre punti di flesso: $x = -20-\sqrt{324}$, $x = -20+\sqrt{324}$, $x = 0$;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 16}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+3}}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \dfrac{x^2(x-3)}{x+3} \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ o } x \geq 3 \text{ o } x = 0\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, -3[\cup \{0\} \cup [3, +\infty[\,;$$

non si rilevano particolari simmetriedel grafico di f;

f interseca l'asse delle ordinate nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e l'asse delle ascisse nel punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (oltre che nel già citato) punto;
per quello che riguarda il segno di f abbiamo $f(x) > 0$ per ogni $x \in I.E.(f) \setminus \{0{,}3\}$ risulta inoltre:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \right) = \pm 1, \\
\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - (\pm x)\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\pm x \left(\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} - 1 \right) \right) = \mp 3,
\end{aligned}$$

in particolare le rette di equazione $y = x - 3 - 1$ e $y = -x + 3$ sono asintoti obliqui di f, inoltre:

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty,$$

in particolare la retta di equazione $x = 3$ è un asintoto verticale di f,
f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f) \setminus \{0, 3\}$ e risulta:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(2x\,(x-3)\,(x+3) + x^2\,(x+3) - x^2\,(x-3)\right)}{2\sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+3}}(x+3)^2} \\
&= \frac{x\left(x^2 + 3x - 9\right)}{\sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+3}}\,(x+3)^2}
\end{aligned}$$

per studiare il segno di f' dobbiamo studiare la disequazione:

$$x(x^2 + 3x - 9) > 0$$

la quale ha le seguenti soluzioni:

$$\frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2} < x < -3, \text{ oppure } x > 3,$$

in particolare si ha che f è strettamente decrescente per $x \in \left]-\infty, \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right[$ e strettamente crescente per $x \in \left]\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}, -3\right[\cup]3, +\infty[$;
in particolare il punto $x = \dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\frac{\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2-9\right)-\left(x^2+3x-9\right)\left(x^2-x-3\right)}{\frac{(x-3)}{x+3}\sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+3}}\,(x+3)^4} \\ &= \frac{9x(x-6)}{\frac{(x-3)}{x+3}\sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+3}}\,(x+3)^4} \end{aligned}$$

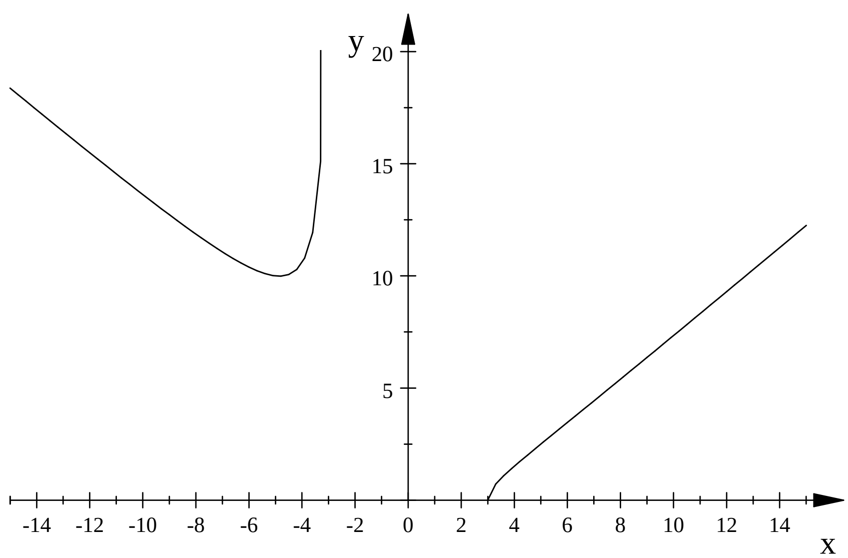
pertanto si ha che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I.E.(f)\setminus\{x > 6 \text{ oppure } x < 0\}$ quindi f è convessa negli intervalli

$$]-\infty,-3[,\ ]6,+\infty[$$

f è concava nell'intervallo

$$]3,6[$$

e il punto $x = 6$ è un punto di flesso;
possiamo aggiungere che f non ammette massimo assoluto in quanto non è limitata superiormente e non ha massimi relativi, f ha minimo assoluto uguale a 0 raggiunto nei punti $x = 0$ e $x = 3$;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 17}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \ln\frac{x^2-2}{x-1}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$
\begin{aligned}
I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^2-2}{x-1} > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\sqrt{2} < x < 1 \text{ o } x > \sqrt{2} \right\}
\end{aligned}
$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[;$$

non si rilevano particolari simmetriedel grafico di f;

f interseca l'asse delle ordinate nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$ e l'asse delle ascisse nei punti $\begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$;

.per quello che riguarda il segno di f abbiamo: $f(x) > 0$ per

$$\frac{x^2-2}{x-1} > 1$$

ossia:

$$\frac{x^2-x-1}{x-1} > 0$$

da cui si ricava:

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1 \right[\cup \left] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x \in \left] -\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[;$$

risulta inoltre:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) &= -\infty, \\
\lim_{x \to 1^-} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) &= -\infty, \\
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 0;
\end{aligned}
$$

in particolare la funzione non è limitata né superiormente né inferiormente e le rette di equazione $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ sono asintoti verticali per f, inoltre non esistono asintoti obliqui;
f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ e risulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-1}{x^2-2} \frac{2x\,(x-1) - x^2 + 2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)\,(x^2-2)} \end{aligned}$$

quindi $f' > 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$, in particolare si ha che f è strettamente crescente e non esistono punti di massimo o minimo relativo;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2)(x-1)(x^2-2) - (x^2-2x+2)(3x^2-2x-2)}{(x-1)^2\,(x^2-2)^2} \\ &= \frac{-x(x^3 - 4x^2 + 10x - 8)}{(x-1)^2\,(x^2-2)^2} \end{aligned}$$

per studiare f'' si studiano il segno e gli zeri della funzione

$$\phi(x) = x^3 - 4x^2 + 10x - 8;$$

essendo

$$\phi'(x) = 3x^2 - 8x + 10$$

si ha $\phi'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi ϕ si annulla in uno ed un solo punto x_0 e poiché $\phi(1) < 0$ e $\phi(\sqrt{2}) > 0$, risulta $x_0 \in]1, \sqrt{2}[$;

abbiamo: $f''(x) > 0$ se e solo se $-x\phi(x) > 0$, cioè se e solo se

$$\begin{cases} -x > 0 \\ \phi(x) > 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} -x < 0 \\ \phi(x) < 0 \end{cases}$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} x < 0 \\ x > x_0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} x > 0 \\ x < x_0 \end{cases}$$

pertanto:

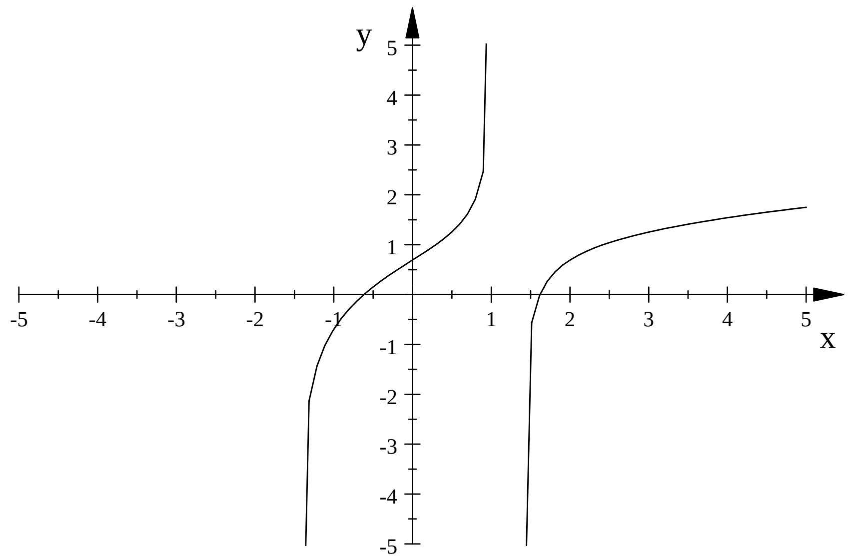
$$f''(x) > 0 \text{ se e solo se } 0 < x < 1$$

inoltre

$$f''(x) < 0 \text{ se e solo se } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ oppure } x > \sqrt{2}$$

e $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;

quindi f è convessa nell'intervallo $]0, 1[$ e concava negli intervalli $]-\sqrt{2}, 0[$ e $]\sqrt{2}, +\infty[$, in $x = 0$ f ha un flesso;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 18}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = x - \ln|\ln x|\,.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } \ln x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]0,1[\cup]1,+\infty[;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to 1^\pm} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 1, \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) - x &= -\infty, \end{aligned}$$

pertanto le rette di equazione $x = 0$, $x = 1$ sono asintoti verticali per f e non ci sono asintoti obliqui; inoltre f non è limitata né superiormente, né inferiormente; per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > \ln|\ln x|$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } e^x > |\ln x|$$

confrontando i grafici delle funzioni e^x e $|\ln x|$ si ha che esiste $\overline{x} \in]0, 1[$ tale che $f(x) < 0$ per $0 < x < \overline{x}$, $f(\overline{x}) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \in]\overline{x}, 1[\cup]1, +\infty[$;
f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è somma delle funzioni derivabili x e $\ln|\ln x|$ e risulta:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln x}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per:

$$\frac{x \ln x - 1}{x \ln x} > 0$$

ossia se:

$$\begin{cases} x \ln x > 1 \\ x > 1 \end{cases}, \text{ oppure } \begin{cases} x \ln x < 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases},$$

o ancora:

$$\begin{cases} \ln x > \dfrac{1}{x} \\ x > 1 \end{cases}, \text{ oppure } \begin{cases} \ln x < \dfrac{1}{x} \\ 0 < x < 1 \end{cases},$$

essendo $\ln x < 0$ per $0 < x < 1$ si ottiene immediatamente che $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$, inoltre, confrontando i grafici delle funzioni elementari $\ln x$ e $\dfrac{1}{x}$, cioè la curva logaritmica con l'iperbole equilatera $xy = 1$, si ricava che esiste un punto $x_0 > 1$ tale che $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ e $f'(x) < 0$ per $1 < x < x_0$, infine si ha $f'(x_0) = 0$, dunque si ha che f è strettamente decrescente per $x \in]1, x_0[$ e strettamente crescente per $x \in]0, 1[\cup]x_0, +\infty[$, in particolare il punto x_0 è un punto di minimo relativo;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = \frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

per studiare il segno di $f''(x)$ si considera la disequazione:

$$\ln x > -1$$

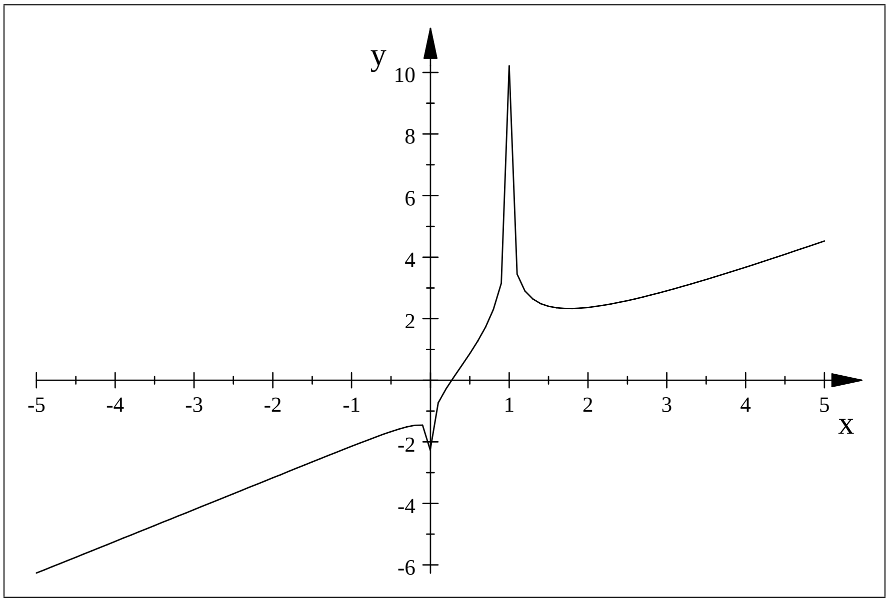
da cui si ottiene:

$$x > e^{-1}$$

in particolare f è convessa per $x \in \left]e^{-1}, 1\right[\cup]1, +\infty[$ e f è concava per $x \in \left]0, e^{-1}\right[$, inoltre $x = e^{-1}$ è un punto di flesso e, essendo $f(e^{-1}) = e^{-1} > 0$, si ha che $\overline{x} < e^{-1}$;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

$f(x) = x - \ln|\ln x|$



ESERCIZIO 19

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{\sqrt{2}x+3}\right).$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \frac{3x+2}{\sqrt{2}x+3} > 0 \\ \sqrt{2}x + 3 \neq 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < -\frac{3\sqrt{2}}{2} > 0 \text{ o } x > -\frac{2}{3} \right\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = \left]-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \ln\frac{3\sqrt{2}}{2},\\ \lim_{x\to\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^-} f(x) &= +\infty,\\ \lim_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)^+} f(x) &= -\infty,\end{aligned}$$

pertanto la rette di equazione $y = \ln\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e un asintoto orizzontale per f e le rette di equazione $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{2}{3}$ sono asintoti verticali, ci sono asintoti obliqui; inoltre f non è limitata né superiormente, né inferiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } \frac{3x+2}{\sqrt{2}x+3} > 1$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x < -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x > \frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

inoltre $f(x) = 0$ per $x = \dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$, $f(0) = \ln\frac{2}{3}$;

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$f'(x) = \frac{9-2\sqrt{2}}{(3x+2)(\sqrt{2}x+3)}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in I.E.(f)$, non esistono massimi o minimi relativi;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = -\frac{(9-2\sqrt{2})(6\sqrt{2}x+9+2\sqrt{2})}{(3x+2)^2(\sqrt{2}x+3)^2}$$

per studiare il segno di $f''(x)$ si considera la disequazione:

$$6\sqrt{2}x + 9 + 2\sqrt{2} < 0$$

da cui si ottiene:

$$f''(x) > 0 \text{ per } x < -\frac{9+2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$$

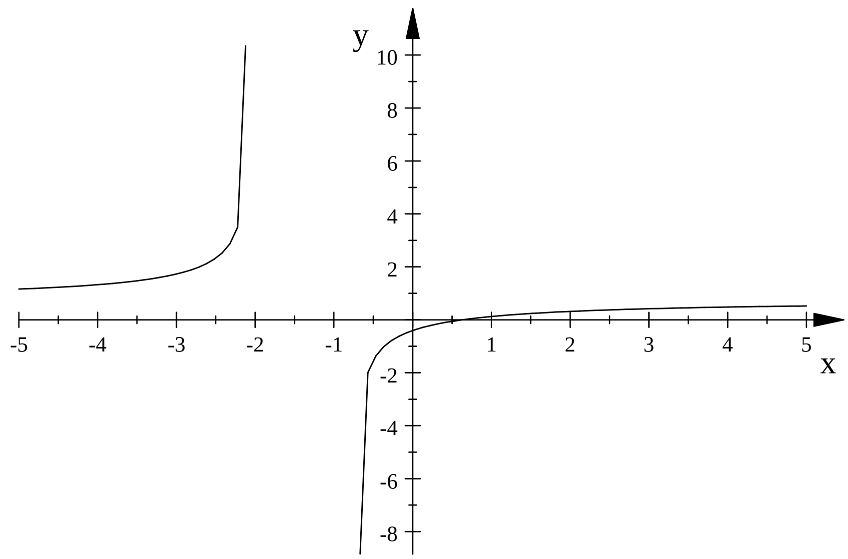
ed essendo:

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} < -\frac{9+2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} < -\frac{2}{3}$$

si ha che f è convessa per $x < -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e f è concava per $x > -\dfrac{2}{3}$, in particolare non esistono punti di flesso;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

$f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{\sqrt{2x+3}}\right)$



ESERCIZIO 20

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x-3| & x < 0 \\ \dfrac{x-|2x-4|}{x+3} & x \geq 0 \end{cases}.$$

SOLUZIONE

Si osserva che $I.E.(f) = \mathbb{R}$;

si ricava facilmente che f non presenta particolari simmetrie;

l'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{4}{3} \end{pmatrix}$;

a questo punto dobbiamo discutere i valori assoluti, la funzione si può scrivere nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(3-x) & \text{per } x < 0 \\ \dfrac{-x+4}{x+3} & \text{per } x \in [0,2] \\ \dfrac{3x-4}{x+3} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

studiamo separatamente le tre funzioni:

a) $f_1(x) = \ln(3-x)$, $x \in]-\infty, 0[$
si ricava facilmente che non si hanno intersezioni con l'asse delle ascisse per $x < 0$ e che $f_1(x) > 0$ per ogni $x \in]-\infty, 0[$;
risulta inoltre:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f_1(x) &= +\infty, \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} &= 0, \\ \lim_{x\to 0^-} f_1(x) &= \ln 3, \end{aligned}$$

in particolare non si hanno asintoti di f_1;
f_1 è derivabile per $x \in]-\infty, 0[$ e risulta:

$$f_1'(x) = \frac{1}{x-3}$$

pertanto f_1 è strettamente decrescente per $x \in]-\infty, 0[$;
risulta:

$$f_1''(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$$

in particolare f_1 è concava;
b) $f_2(x) = \dfrac{-x+4}{x+3}$, $x \in [0,2]$
si ricava facilmente che non ci sono intersezioni con l'asse delle ascisse per f_2;
per quello che riguarda il segno di f_2 abbiamo:

$$f_2(x) > 0 \text{ per } x \in [0,2];$$

inoltre risulta:

$$f_2(0) = \frac{4}{3},\ f_2(2) = \frac{1}{3};$$

f_2 è derivabile per $x \in]0,2[$ e risulta:

$$f_2'(x) = \frac{-7}{(x+3)^2}$$

pertanto f_2 è strettamente decrescente nell'intervallo considerato;
risulta inoltre:

$$f_2''(x) = \frac{14}{(x+3)^3}$$

in particolare f_2 è convessa;
c) $f_3(x) = \dfrac{3x-4}{x+3}$, $x > 2$
si ricava facilmente che non si hanno intersezioni con l'asse delle ascisse per $x > 2$ e che $f_3(x) > 0$ per ogni $x \in]2, +\infty[$;

risulta inoltre:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_3(x) &= 3,\\ \lim_{x\to 2^+} f_3(x) &= \frac{6}{5},\end{aligned}$$

in particolare la retta $y = 3$ è un asintoto orizzontale di f_3;
f_3 è derivabile per $x \in]2, +\infty[$ e risulta:

$$f_3'(x) = \frac{13}{(x+3)^2}$$

pertanto f_3 è strettamente crescente nell'intervallo considerato;
risulta inoltre:

$$f_3''(x) = \frac{-26}{(x+4)^3}$$

in particolare f_3 è concava;
per quello che riguarda f dobbiamo ancora osservare che nei punti $x = 0$ e $x = 2$ essa non è continua;
inoltre f è derivabile per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$
inoltre f ha un massimo relativo nel punto $x = 2$ e tale massimo vale $f(2) = \dfrac{1}{3}$,
invece f non ha né massimo, né minimo assoluto in quanto non è limitata né superiormente, né inferiormente;
unendo i risultati precedenti otteniamo il seguente grafico di f:

ESERCIZIO 21

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \ln\left(2x\sqrt{8 - x^2}\right).$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$\begin{aligned}I.E.(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} x > 0 \\ 8 - x^2 > 0 \end{cases}\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < 2\sqrt{2}\right\}\end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = \left]0, 2\sqrt{2}\right[;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\infty,\\ \lim_{x\to (2\sqrt{2})^-} f(x) &= -\infty,\end{aligned}$$

pertanto le rette di equazione $x = 0$ e $x = 2\sqrt{2}$ sono asintoti verticali per f, inoltre f non è limitata inferiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } 2x\sqrt{8-x^2} > 1$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } 4x^4 - 32x^2 - 1 \leq 0$$

da cui si ottiene, considerando l'insieme di esistenza di f,

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } \sqrt{4 - \frac{\sqrt{63}}{2}} < x < \sqrt{4 + \frac{\sqrt{63}}{2}}$$

inoltre $f(x) = 0$ per $x = \sqrt{4 \pm \frac{\sqrt{63}}{2}}$;

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$f'(x) = \frac{8-3x^2}{x(8-x^2)}$$

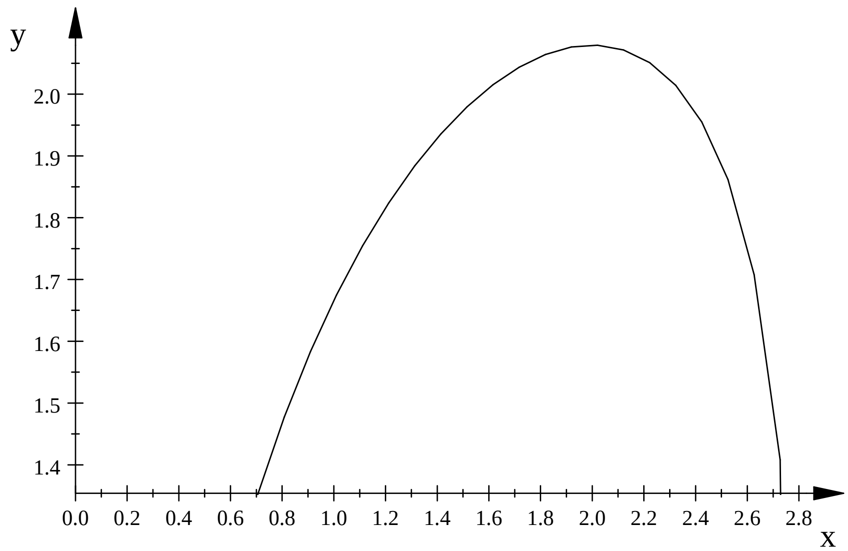
in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \left]0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right[$, $f(x) = 0$ per $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2}\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right[$,, $f(x) = 0$, f è strettamente decrescente per $x \in \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2}\right[$ e ammette un massimo relativo nel punto $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, non esistono minimi relativi;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = -\frac{6x^2(8-x^2) + (8-3x^2)}{x^2(8-x^2)^2}$$

si verifica subito che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$ pertanto f è concava;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



ESERCIZIO 22

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \left(\ln \sqrt{|x|}\right) + \sqrt{x^2 - 1}.$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x,\, x \geq 1\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[;$$

si osserva che f è una funzione pari, dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e possiamo limitare lo studio all'intervallo $[1, +\infty[$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 1, \\ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) &= +\infty, \end{aligned}$$

inoltre:

$$f(1) = 0$$

pertanto non ci sono asintoti per f, e f non è limitata superiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in I.E.(f)$$

e $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$;

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f) \setminus \{\pm 1\}$ perché è composizione di funzioni derivabili e, in $]1, +\infty[$ risulta:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} + 2x^2}{2x\sqrt{x^2-1}}$$

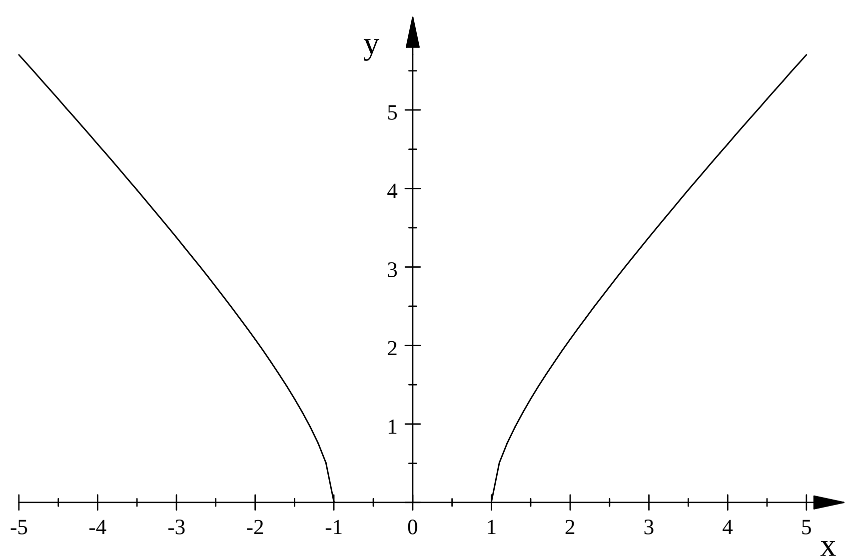
in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]1, +\infty[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in]1, +\infty[$, e, per la simmetria del grafico, f è strettamente decrescente per $x \in]-\infty, -1[$, non ammette massimi relativi, il minimo assoluto è raggiunto nei punti $x = \pm 1$ e vale zero;

per quello che riguarda la derivata seconda in $]1, +\infty[$ abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2(1 + 4\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1} - (\sqrt{x^2-1} + 2x^2)(2x^2-1)}{2x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{-2x^2 - (x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{2x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

per cui si ha che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]1, +\infty[$ pertanto f è concava;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 23}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{4}\right)}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \ln\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{4}\right) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{4}\right) \geq 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2^x \leq 2 - \sqrt{3},\, 2^x \geq 2 + \sqrt{3} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq \log_2(2 - \sqrt{3}),\, x \geq \log_2(2 + \sqrt{3}) \right\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = \left]-\infty, \log_2(2 - \sqrt{3})\right] \cup \left[\log_2(2 + \sqrt{3}), +\infty\right[;$$

si osserva che f è una funzione pari, dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e possiamo limitare lo studio all'intervallo $\left[\log_2(2 + \sqrt{3}), +\infty\right[$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 0, \end{aligned}$$

inoltre:

$$f(\log_2(2 + \sqrt{3})) = 0$$

pertanto non ci sono asintoti per f, e f non è limitata superiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in I.E.(f)$$

e $f(x) = 0$ se e solo se $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$;

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f) \setminus \left\{\log_2(2 \pm \sqrt{3})\right\}$ perché è composizione di funzioni derivabili e, risulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{4}{2^x + 2^{-x}}(2^x - 2^{-x})}{2\sqrt{\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{4}\right)}} \\ &= \frac{2(2^x - 2^{-x})}{\sqrt{\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{4}\right)}(2^x + 2^{-x})} \end{aligned}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \left]\log_2(2+\sqrt{3}), +\infty\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]\log_2(2+\sqrt{3}), +\infty\right[$, e, per la simmetria del grafico, f è strettamente decrescente per $x \in \left]-\infty, \log_2(2-\sqrt{3})\right[$, non ammette massimi relativi, il minimo assoluto è raggiunto nei punti $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$, e vale zero;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\left(2^x + 2^{-x}\right)^2 \ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{4}\right) - 2(2^x - 2^{-x})^2\left(\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{4}\right) + 2\right)}{\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{4}\right)\left(2^x + 2^{-x}\right)^2} \\ &= \frac{8\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{4}\right) - 4(2^x - 2^{-x})^2}{\ln\left(\frac{2^x+2^{-x}}{4}\right)\left(2^x + 2^{-x}\right)^2} \end{aligned}$$

in particolare si ha $f''(x) > 0$ se e solo se:

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{4}\right) - (2^x - 2^{-x})^2 > 0$$

studiamo la funzione φ nell'intervallo $\left]\log_2(2+\sqrt{3}), +\infty\right[$, abbiamo:

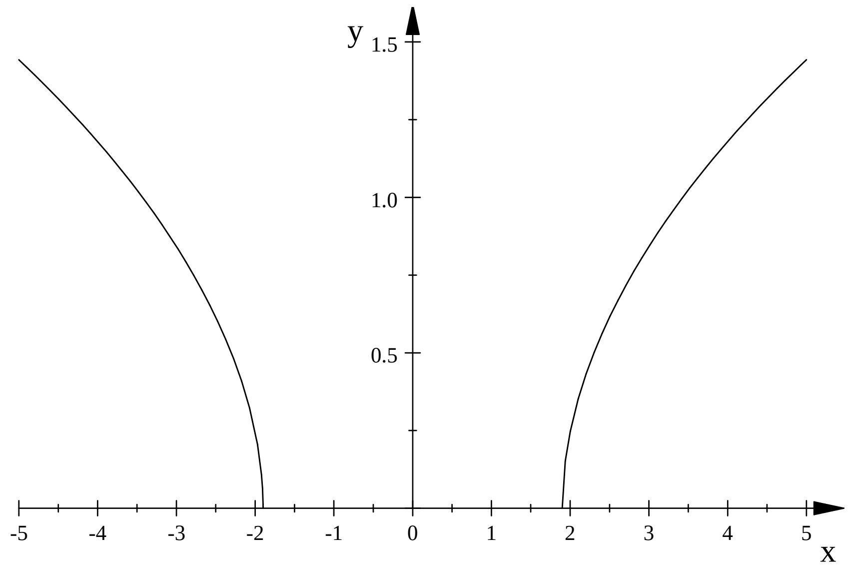
$$\lim_{x \to \left(\log_2(2+\sqrt{3})\right)^+} \varphi(x) = -\left(2^{\log_2(2+\sqrt{3})} - 2^{-\log_2(2+\sqrt{3})}\right)^2 < 0,$$

inoltre:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} - 2(2^x - 2^{-x})\left(2^x + 2^{-x}\right) \\ &= -2\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\left(2^{2x} + 2^{-2x}\right) \end{aligned}$$

quindi, nell'intervallo considerato, $\varphi'(x) < 0$, ossia φ è decrescente, dunque $\varphi(x) < 0$ per ogni $x \in \left]\log_2(2+\sqrt{3}), +\infty\right[$, da ciò segue in particolare che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \left]\log_2(2+\sqrt{3}), +\infty\right[$ pertanto f è concava;

dalle considerazioni precedenti, usando la simmetria rispetto all'asse delle ordinate, otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 24}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|\ln(x^2-1)|}{x^2-25}}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$\begin{aligned}
I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \dfrac{\left|\ln\left(x^2-1\right)\right|}{x^2-25} \geq 0 \\ x^2-1>0 \\ x^2-25 \neq 0 \end{cases} \right\} \\
&= \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-25>0 \end{cases} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid -5<x,\, x>5\}
\end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[;$$

si osserva che f è una funzione pari, dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e possiamo limitare lo studio all'intervallo $]5,+\infty[$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^+} f(x) &= +\infty,\\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= 0,\end{aligned}$$

pertanto le rette di equazione $x=5$ e $y=0$ sono asintoti, rispettivamente, verticale e orizzontale per f, inoltre f non è limitata superiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x)>0 \text{ per ogni } x\in I.E.(f)$$

e non ci sono intersezioni con gli assi coordinati;
f è derivabile per ogni $x\in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili in tale insieme e, considerando che $\ln(x^2-1)>0$ per $x\in I.E.(f)$, risulta:

$$f'(x)=\frac{x\left[x^2-25-\left(x^2-1\right)\ln(x^2-1)\right]}{\left(x^2-25\right)^2\left(x^2-1\right)\sqrt{\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-25}}}$$

in particolare si ha $f'(x)>0$ per

$$x\left[x^2-25-\left(x^2-1\right)\ln(x^2-1)\right]>0$$

essendo $x>0$ in $]5,+\infty[$, studiamo la funzione $\varphi(x)=x^2-25-\left(x^2-1\right)\ln(x^2-1)$ nell'intervallo $]5,+\infty[$, abbiamo:

$$\lim_{x\to 5^+}\varphi(x)=-24\ln 24<0,$$

inoltre:

$$\varphi'(x)=-2x\ln(x^2-1)$$

quindi, nell'intervallo considerato, $\varphi'(x)<0$, ossia φ è decrescente, dunque $\varphi(x)<0$ per ogni $x\in\,]5,+\infty[$, da ciò segue in particolare che $f'(x)<0$ per ogni $x\in\,]5,+\infty[$ pertanto f è strettamente decrescente per $x>5$ e, usando la simmetria del grafico rispetto all'asse delle ordinate, strettamente crescente per $x<-5$ in particolare non ammette massimi e minimi né relativi né assoluti;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

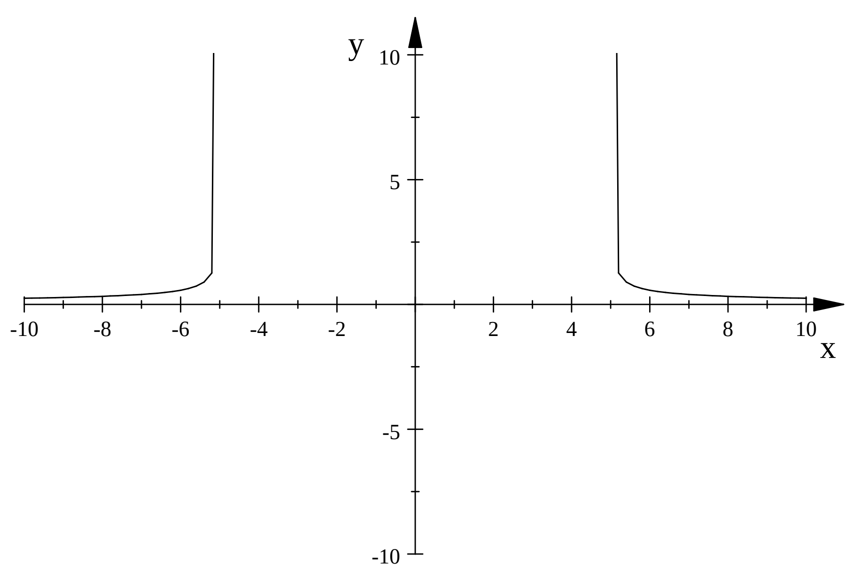
$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\left[5x^2-25-\left(3x^2-1\right)\ln(x^2-1)\right](x^2-25)\left(x^2-1\right)\ln(x^2-1)}{\left(x^2-25\right)^3\left(x^2-1\right)^2\ln(x^2-1)\sqrt{\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-25}}}+ \\
&\quad -\frac{x^2\left[x^2-25-\left(x^2-1\right)\ln(x^2-1)\right]\left[\left(5x^2-53\right)\ln(x^2-1)+x^2-25\right]}{\left(x^2-25\right)^3\left(x^2-1\right)^2\ln(x^2-1)\sqrt{\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-25}}} \\
&= \frac{\left(x^2-25\right)\left[x^4+22x^2+25\right]\ln(x^2-1)}{\left(x^2-25\right)^3\left(x^2-1\right)^2\ln(x^2-1)\sqrt{\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-25}}}+ \\
&\quad +\frac{\left(x^2-1\right)^2\left[2x^3+2x^2-50x+25\right]\left(\ln(x^2-1)\right)^2-x^2(x^2-25)^2}{\left(x^2-25\right)^3\left(x^2-1\right)^2\ln(x^2-1)\sqrt{\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-25}}}
\end{aligned}$$

usando il fatto che nell'intervallo considerato risulta $\ln(x^2-1)>1$, si ha:

$$f''(x) > \frac{\left(x^2-25\right)\left(22x^2+50\right)+\left(x^2-1\right)^2\left(2x^3+2x^2-50x+25\right)}{\left(x^2-25\right)^3\left(x^2-1\right)^2\ln(x^2-1)\sqrt{\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-25}}}$$

non è difficile provare che $\left(2x^3+2x^2-50x+25\right)>$ per ogni $x\in]5,+\infty[$, pertanto $f''(x)>0$ per ogni $x\in]5,+\infty[$ ossia f è convessa per x appartenente a tale intervallo e, per simmetria, anche per $x\in]-\infty,-5[$;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 25}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = \left]0, +\infty\right[\,;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0,\\
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= +\infty,\\
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty,
\end{aligned}$$

pertanto non esistono asintoti per f, inoltre f non è limitata superiormente; per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } \ln x > 0$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > 1$$

inoltre $f(x) = 0$ per $x = 1$;
f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

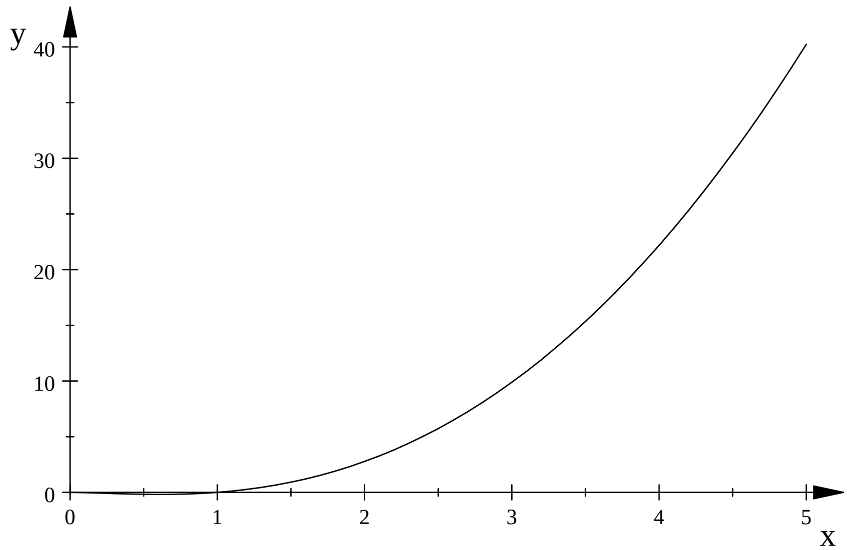
$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $f(x) = 0$ per $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$, f è strettamente decrescente per $x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$ e ammette un minimo relativo nel punto $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, ed essendo $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e} < 0$, tale valore è il minimo assoluto di f; non esistono massimi relativi,
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = 2\ln x + 3$$

in particolare risulta $f''(x) > 0$ per $2\ln x + 3 > 0$, ossia se e solo se $x > e^{-\frac{3}{2}}$, pertanto f è convessa per $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty\right[$, f è concava per $x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right[$ e il punto $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ è un punto di flesso;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



ESERCIZIO 26

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{2x}{\ln|x|}.$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \ln|x| \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1 \} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[\,;$$

si osserva che $f(-x) = -f(x)$, pertanto f è dispari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine e possiamo limitare lo studio di f all'insieme $]0, 1[\cup]1, +\infty[$;

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0, \\
\lim_{x\to 1^\pm} f(x) &= \pm\infty, \\
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 0,
\end{aligned}$$

pertanto la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticali per f, inoltre f non è limitata né inferiormente né superiormente, non esistono asintoti orizzontali né obliqui;

per quello che riguarda il segno di f, nell'insieme considerato, abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > e \text{ e } f(x) < 0 \text{ per } 0 < x < 1,\ 1 < x < e;$$

f è derivabile in $]0,1[\cup]1,+\infty[$ perché è composizione di funzioni derivabili in tale insieme e risulta:

$$f'(x) = \frac{2\ln x - 2}{(\ln x)^2}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in\ ]e,+\infty[$, $f(x) = 0$ per $x = e$ e $f(x) < 0$ per $x \in\ ]0,1[\cup]1,e[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in\ ]e,+\infty[$, f è strettamente decrescente per $x \in\ ]0,1[\cup]1,e[$ e ammette un minimo relativo nel punto $x = e$, usando la simmetria possiamo affermare che f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ ed è strettamente crescente anche per ogni $x \in\ ]-\infty,-e[$, strettamente decrescente per $x \in\ ]-e,-1[\cup]-1,0[$ e ammette un massimo relativo nel punto $x = -e$ non esistono massimo e minimo assoluto;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = 2\frac{-\ln x + 2}{x(\ln x)^3}$$

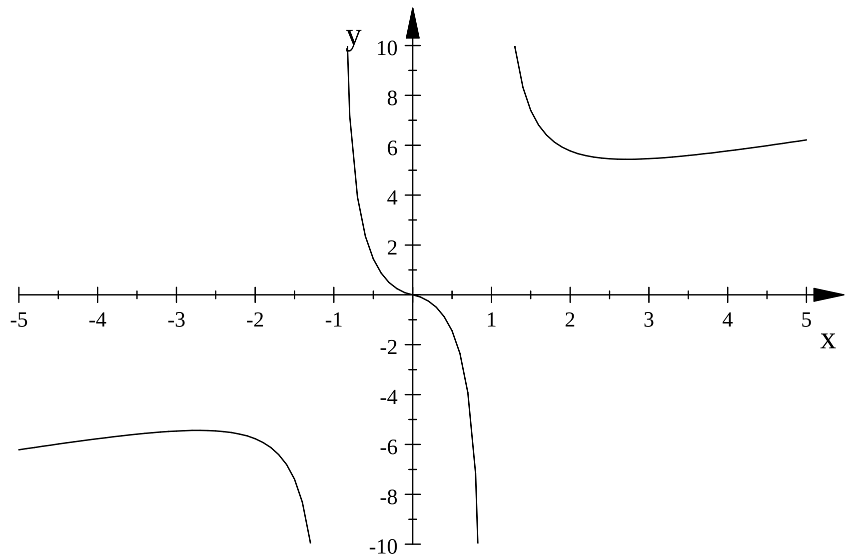
in particolare si ha:

$$f''(x) > 0 \text{ per } \frac{-\ln x + 2}{x(\ln x)^3} > 0$$

ossia, per $1 < x < e^2$, usando la simmetria rispetto all'origine abbiamo che f è concava per $-e^2 < x < -1$, $0 < x < 1$, $x > e^2$ ed è convessa per $x < -e^2$, $-1 < x < 0$, $1 < x < e^2$, inoltre i punti $x = \pm e^2$ sono punti di flesso;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

$f(x) = \frac{2x}{\ln|x|}$



$\boxed{\text{ESERCIZIO 27}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = e^{\left(\dfrac{x^2-3x}{4-x}\right)}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \{x \in \mathbb{R} \ \mid 4 - x \neq 0\}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty, \\
\lim_{x\to 4^-} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x\to 4^+} f(x) &= 0, \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0,
\end{aligned}$$

pertanto la retta di equazione $x = 4$ è un asintoto verticale per f e la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale, inoltre f non è limitata superiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ per ogni } x \in I.E.(f);$$

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili in tale insieme e risulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\left(\dfrac{x^2-3x}{4-x}\right)} \frac{(2x-3)(4-x)+\left(x^2-3x\right)}{(4-x)^2} \\ &= e^{\left(\dfrac{x^2-3x}{4-x}\right)} \frac{8x-12-x^2}{(4-x)^2} \end{aligned}$$

in particolare si ha:

$$f'(x) > 0 \text{ per ogni } x \in I.E.(f) \text{ tale che } x^2 - 8x + 12 < 0$$

ossia se e solo se

$$x \in I.E.(f) \text{ e } 2 < x < 6$$

dunque f è strettamente decrescente per ogni $x \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]6, +\infty\right[$, f è strettamente crescente per $x \in \left]2, 4\right[\cup\left]4, 6\right[$ inoltre ammette un massimo relativo nel punto $x = 6$ e un minimo relativo nel punto $x = 2$;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\left(\dfrac{x^2-3x}{4-x}\right)} \left[\left(\frac{8x-12-x^2}{(4-x)^2}\right)^2 + \frac{(8-2x)(4-x)-2\left(8x-12-x^2\right)}{(4-x)^3}\right] \\ &= e^{\left(\dfrac{x^2-3x}{4-x}\right)} \frac{136x^2+272+x^4-328x-16x^3}{(4-x)^4} \end{aligned}$$

si verifica subito che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$ pertanto f è concava;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

$\boxed{\text{ESERCIZIO 28}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = 2 + e^{\dfrac{3}{2-|x|}}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$ Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - |x| \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, -2[\,\cup\,]-2, 2[\,\cup\,]2, +\infty[\,;$$

si osserva che f è pari, quindi possiamo restringere il suo studio all'insieme $[0, 2[\,\cup\,]2, +\infty[$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= 2, \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= 3, \\ f(0) &= 2 + e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

pertanto le rette di equazione $x = 2$ e $y = 3$ sono asintoti, rispettivamente verticale (sinistro) e orizzontale, per f, inoltre f non è limitata superiormente; il grafico di f interseca l'asse delle ordinate nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 + e^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ invece non interseca l'asse delle ascisse;
per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 2 \text{ per ogni } x \in I.E.(f);$$

in particolare f è limitata inferiormente, ma non ammette minimo assoluto;
f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f) \setminus \{0\}$ perché è composizione di funzioni derivabili in tale insieme e, in $]0, 2[\,\cup\,]2, +\infty[$ risulta:

$$f'(x) = e^{\dfrac{3}{2-x}} \frac{3}{(2-x)^2}$$

$f''(x) > 0$ per ogni $x \in]0, 2[\cup \left]2, \dfrac{7}{2}\right[$
in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]0, 2[\,\cup\,]2, +\infty[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in]0, 2[\,\cup\,]2, +\infty[$, usando la simmetria del grafico di f rispetto all'asse delle ordinate abbiamo che essa è strettamente decrescente per $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$ e dunque ammette un minimo relativo nel punto $x = 0$, non esistono massimi relativi;
il punto $x = 0$ è un punto angoloso perché risulta $f'_+(x) = \dfrac{3}{4} e^{\frac{3}{2}}$, $f'_-(x) = -\dfrac{3}{4} e^{\frac{3}{2}}$;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = e^{\dfrac{3}{2-x}} \frac{3\,(7-2x)}{(2-x)^4}$$

si verifica subito che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]0,2[\cup \left]2, \frac{7}{2}\right[$, $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$, $f''(x) = 0$ per $x = \frac{7}{2}$, pertanto, usando la simmetria, f è convessa per ogni $x \in \left]-\frac{7}{2}, -2\right[\cup]-2, 2[\cup \left]2, \frac{7}{2}\right[$, è concava per ogni $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$ e presenta un flesso nei punti $x = \pm\frac{7}{2}$, il valore del flesso è:

$$f\left(\pm\frac{7}{2}\right) = 2 + e^{-2}$$

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

$\boxed{\text{ESERCIZIO 29}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{2x}}{2}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \mathbb{R};$$

inoltre abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= 0, \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty, \end{aligned}$$

pertanto la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f, non esistono asintoti verticali né obliqui, inoltre f non è limitata superiormente;
per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

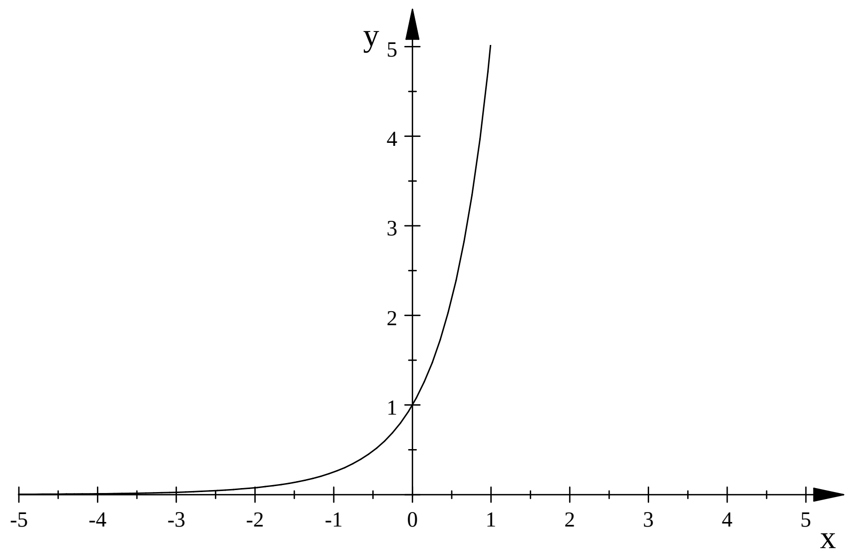
$$f'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x}}{2}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$, non esistono massimi o minimi relativi o assoluti;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = \frac{e^x + 4e^{2x}}{2}$$

si verifica subito che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$ pertanto f è concava; dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 30}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = 3^x - |x|\,.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \mathbb{R};$$

abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty,\\
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty,
\end{aligned}$$

pertanto non esistono asintoti per f, inoltre f non è limitata né superiormente né inferiormente;

il grafico di f interseca l'asse delle ordinate nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché è composizione di funzioni derivabili in tale insieme e risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} 3^x \ln 3 - 1 & \text{per } x > 0 \\ 3^x \ln 3 + 1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
dalle considerazioni precedenti possiamo anche affermare che il grafico di f interseca l'asse delle ascisse in un solo punto $\begin{pmatrix} x_0 \\ 3^{x_0} - |x_0| \end{pmatrix}$ ed essendo $f(-1) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 1$, abbiamo $-1 < x_0 < 0$;
il punto $x = 0$ è un punto angoloso per f perché risulta:

$$f'_+(x) = \ln 3 - 1, f'_-(x) = \ln 3 + 1;$$

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } 3^x - |x| > 0$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > x_0;$$

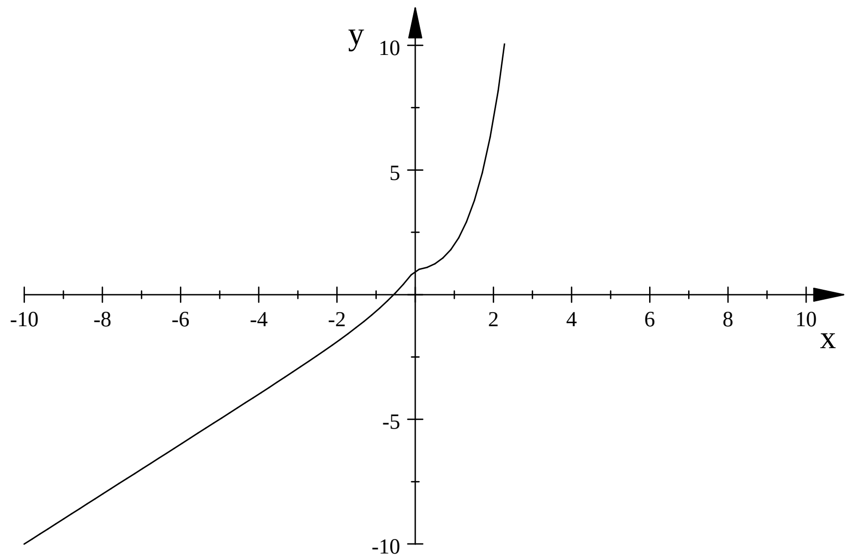
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = 3^x (\ln 3)^2$$

si verifica subito che $f''(x) > 0$ per ogni x pertanto f è concava;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

$f(x) = 3^x - |x|$



$\boxed{\text{ESERCIZIO 31}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{e^{\left(\frac{x-1}{3}\right)}}{x^2}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

pertanto:

$$I.E.(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0, \\
\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty, \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty
\end{aligned}$$

pertanto le rette di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono rispettivamente asintoti verticale e orizzontale per f, inoltre f non è limitata superiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ per ogni } x \in I.E.(f);$$

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$f'(x) = \frac{e^{\left(\frac{x-1}{3}\right)}\left(x^2-6x\right)}{3x^4}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$, $f(x) = 0$ per $x = 6$ e $f(x) < 0$ per $x \in]0, 6[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$, f è strettamente decrescente per $x \in]0, 6[$ e ammette un minimo relativo nel punto $x = 6$ non esistono massimi relativi;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^{\left(\frac{x-1}{3}\right)}\left(\left(x^2-6x\right)+3\left(2x-6\right)-12\left(x-6\right)\right)}{9x^4} \\ &= \frac{e^{\left(\frac{x-1}{3}\right)}\left(x^2-12x+54\right)}{9x^4} \end{aligned}$$

si verifica subito che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$ pertanto f è convessa;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

ESERCIZIO 32

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{x-1}{e^x}.$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$I.E.(f) = \mathbb{R};$$

inoltre abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0, \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty, \end{aligned}$$

pertanto la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale destro per f, inoltre f non è limitata inferiormente;

il grafico di f interseca l'asse delle ordinate nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e quello delle ascisse nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > 1;$$

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]-\infty, 2[$, $f(x) = 0$ per $x = 2$ e $f(x) < 0$ per $x \in]2, +\infty[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in]-\infty, 2[$, f è strettamente decrescente per $x \in]2, +\infty[$ e ammette un massimo relativo nel punto $x = 2$, tale massimo è anche assoluto e il suo valore è:

$$f(2) = \frac{1}{e^2},$$

non esistono minimi relativi;

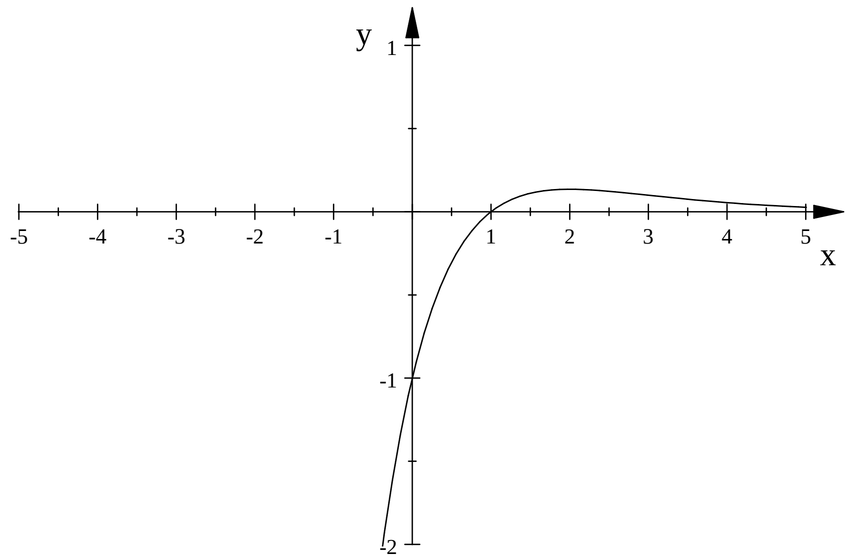
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = \frac{-3+x}{e^x}$$

si verifica subito che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]-\infty, 3[$, $f''(x) = 0$ per $x = 3$, $f''(x) > 0$ per $x \in]3, +\infty[$, dunque f è concava perogni $x \in]-\infty, 3[$, è convessa per ogni $x \in]3, +\infty[$ e ha un flesso nel punto $x = 3$, il valore del flesso è

$$f(3) = \frac{2}{e^3};$$

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 33}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2^x}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \geq 0\}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = [2, +\infty[\,;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} f(2) &= 0, \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= 0, \end{aligned}$$

pertanto la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f; per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in I.E.(f)$$

e

$$f(x) = 0 \text{ se e solo se } x = 2;$$

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f) \setminus \{2\}$ perché è composizione di funzioni derivabili in tale insieme e risulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}2^x - 2^x \ln 2\sqrt{x-2}}{2^{2x}} \\ &= \frac{1 - 2\ln 2(x-2)}{2\left(2^x\sqrt{x-2}\right)} \end{aligned}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ se e solo se:

$$1 - 2\ln 2(x-2) > 0$$

ossia se e solo se:

$$2 < x < \frac{1 + 4\ln 2}{2\ln 2}$$

dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]2, \frac{1+4\ln 2}{2\ln 2}\right[$, f è strettamente decrescente per $x \in \left]\frac{1+4\ln 2}{2\ln 2}, +\infty\right[$ e ammette un massimo relativo nel punto $x = \frac{1+4\ln 2}{2\ln 2}$, tale massimo relativo è anche assoluto e vale:

$$f\left(\frac{1+4\ln 2}{2\ln 2}\right) = f\left(2 + \frac{1}{2\ln 2}\right) = \frac{1}{4\left(2^{\frac{1}{2\ln 2}}\right)\sqrt{2\ln 2}}$$

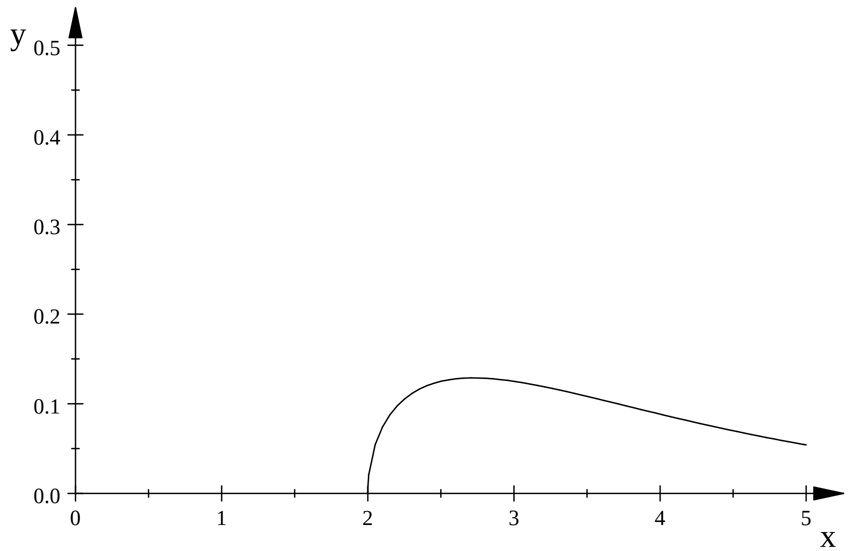
il minimo assoluto è $f(2) = 0$;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = \frac{-4\ln 2(x-2) - 1 + 4\left(\ln 2\right)^2 (x-2)^2}{2^x\sqrt{x-2}(x-2)}$$

in particolare si ha $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$ tale che:

$$-4\ln 2(x-2) - 1 + 4\left(\ln 2\right)^2(x-2)^2 > 0x > \frac{\ln 2 + 1}{\left(\ln 2\right)^2} + 2$$

pertanto f è convessa per $x \in \left]\frac{\ln 2+1}{\left(\ln 2\right)^2} + 2, +\infty\right[$, f è concava per $x \in \left]2, \frac{\ln 2+1}{\left(\ln 2\right)^2} + 2\right[$ e ha un flesso per $x = \frac{\ln 2+1}{\left(\ln 2\right)^2} + 2$;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:
$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2^x}$



ESERCIZIO 34

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico al variare di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f_a(x) = \frac{ax}{e^x - 3}.$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f_a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid e^x - 3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \ln 3\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f_a) =]-\infty, \ln 3[\cup]\ln 3, +\infty[\,;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f_a(x) &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}, \\ \lim_{x \to (\ln 3)^-} f_a(x) &= \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}, \\ \lim_{x \to (\ln 3)^+} f_a(x) &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}, \\ \lim_{x \to +\infty} f_a(x) &= 0 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

inoltre:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{f_a(x)}{x} &= -\frac{a}{3}, \\
\lim_{x\to-\infty}\left(f_a(x)-\frac{a}{3}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

pertanto la retta di equazione $y=-\frac{a}{3}x$ è un asintoto obliquo (sinistro) per f_a, la retta $x=\ln 3$ è un asintoto verticale e la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale (destro), inoltre f_a non è limitata né inferiormente né superiormente;
per quello che riguarda il segno della funzione abbiamo:

$$\begin{aligned}
\text{per } a &> 0\ f_a(x)>0 \text{ se e solo se } x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]\ln 3,+\infty[\,, \\
\text{per } a &< 0\ f_a(x)>0 \text{ se e solo se } x\in\,]0,\ln 3[\,,
\end{aligned}$$

inoltre $f_a(x)=0$ se e solo se $x=0$;
f_a è derivabile per ogni $x\in I.E.(f_a)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$f'_a(x)=\frac{a(e^x-3-xe^x)}{(e^x-3)^2}$$

in particolare si ha $f'_a(x)>0$ se e solo se $a(e^x-3-xe^x)>0$, studiamo la seguente funzione ausiliaria:

$$\varphi(x)=e^x-3-xe^x$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) &= -3 \\
\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) &= -\infty \\
\varphi(0) &= -2 \\
\varphi'(x) &= -xe^x
\end{aligned}$$

pertanto $\varphi'(x)$ è positiva per $x<0$ e negativa per $x>0$, segue che $\varphi(x)<0$ per ogni x, dunque risulta:

$$\begin{aligned}
f'_a(x) &> 0 \text{ per ogni } x\in I.E.(f_a) \text{ se } a<0 \\
f'_a(x) &< 0 \text{ per ogni } x\in I.E.(f_a) \text{ se } a>0
\end{aligned}$$

quindi f_a è strettamente crescente per ogni $x\in I.E.(f_a)$ se $a<0$ e f_a è strettamente decrescente per ogni $x\in I.E.(f_a)$ se $a>0$, non ammette né massimi né minimi relativi;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''_a(x)=\frac{ae^x(xe^x-2e^x+3x+6)}{(e^x-3)^3}$$

per studiare il segno di f_a'' studiamo la seguente funzione ausiliaria:

$$\psi(x) = xe^x - 2e^x + 3x + 6$$

si ha:

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to-\infty} \psi(x) & = & -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \psi(x) & = & +\infty \\ \psi(0) & = & 6 \\ \psi'(x) & = & xe^x - e^x + 3 \\ & = & -\varphi(x) \end{array}$$

pertanto $\psi'(x)$ è positiva per ogni $x < 0$, quindi ψ è crescente, in particolare esiste $\alpha < 0$ tale che $\psi(x) < 0$ per $x < \alpha$, $\psi(\alpha) = 0$ e $\psi(x) > 0$ per $x > \alpha$, riassumendo abbiamo:

per $a > 0$ f_a è convessa per $x \in]-\infty, \alpha[\cup]\ln 3, +\infty[$, è concava per $x \in]\alpha, \ln 3[$ e ammette un flesso per $x =$
per $a < 0$ f_a è concava per $x \in]-\infty, \alpha[\cup]\ln 3, +\infty[$, è convessa per $x \in]\alpha, \ln 3[$ e ammette un flesso per $x =$

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

ESERCIZIO 35

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-3}}.$$

SOLUZIONE Si ha:

$$\begin{array}{rcl} I.E.(f) & = & \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} -1 \le \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2-3}} \le 1 \\ \dfrac{1-x^2}{x^2-3} \ge 0 \\ x^2 - 3 \ne 0 \end{cases} \right\} \\ & = & \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} 0 \le \dfrac{1-x^2}{x^2-3} \le 1 \\ x \ne \pm\sqrt{3} \end{cases} \right\} \\ & = & \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2-3} \ge 0 \\ \dfrac{x^2-2}{x^2-3} \ge 0 \\ x \ne \pm\sqrt{3} \end{cases} \right\} \end{array}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = \left[-\sqrt{2}. - 1\right]; \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$$

si verifica subito che la funzione è pari, quindi basta limitarne lo studio all'intervallo $\left[1, \sqrt{2}\right]$;
abbiamo:

$$f(1) = \frac{\pi}{2},\ f(\sqrt{2}) = 0$$

inoltre la funzione è limitata:

$$0 \leq f(x) \leq \pi;$$

f è derivabile per ogni $x \in \left]1, \sqrt{2}\right[$ perché è composizione di funzioni derivabili in tale intervallo e risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{x^2-3}\right)^2}} \frac{-8x}{\left(x^2-3\right)^2}$$

in particolare si ha $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \left]1, \sqrt{2}\right[$ quindi f è strettamente decrescente per ogni x appartenente all'intervallo considerato non esistono massimi o minimi relativi interni, nel punto $x = 1$ la funzione raggiunge il massimo assoluto mentre nel punto $x = \sqrt{2}$ il minimo assoluto;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-(x^2-2)(1-x^2)\left(x^2-3\right) + x\left(2x(1-x^2) + (x^2-2)(-2x)\right)(x^2-3) + 4x^2(x^2-2)(1-x^2)}{(x^2-2)(1-x^2)\left(x^2-3\right)\sqrt{2(x^2-2)(1-x^2)\left(x^2-3\right)^2}} \\ &= \frac{-2\left(2x^8 - 11x^6 + 19x^4 + 14x^2 - 6\right)}{(x^2-2)(1-x^2)\left(x^2-3\right)\sqrt{2(x^2-2)(1-x^2)\left(x^2-3\right)^2}} \end{aligned}$$

in particolare si ha che, nell'intervallo che stiamo considerando, $f''(x) < 0$ se e solo se:

$$\phi(x) = 2x^8 - 11x^6 + 19x^4 + 14x^2 - 6 < 0$$

poniamo $t = x^2$ risulta:

$$\phi(t) = 2t^4 - 11t^3 + 19t^2 - 14t + 6$$

abbiamo:

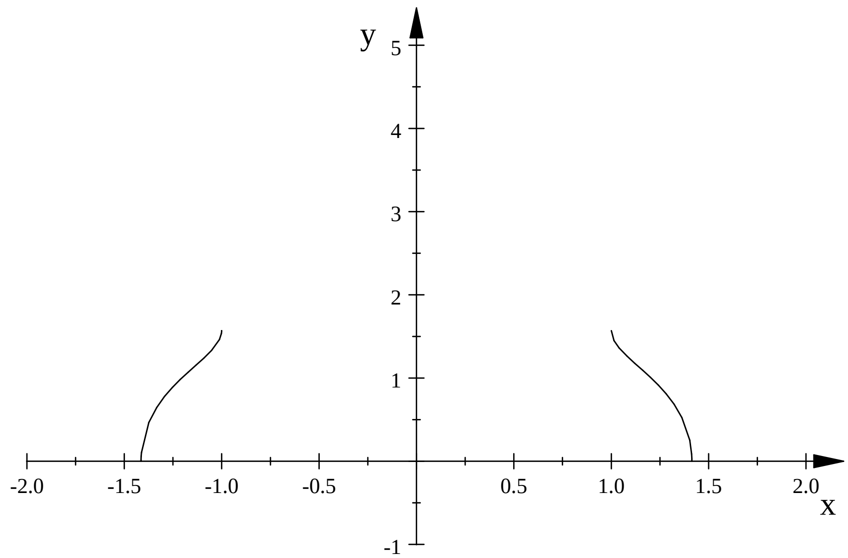
$$\phi(1) = -1,\ \phi(2) = -6$$

inoltre:

$$\phi'(t) = 8t^3 - 33t^2 + 38t - 14$$

studiando la funzione $\phi'(t)$ abbiamo: $\phi'(1) = -1$, $\phi'(2) = -146$, inoltre $\phi''(t) = 24t^2 - 66t + 38$, si verifica subito che nell'intervallo che stiamo considerando risulta $\phi'' < 0$ quindi ϕ' è decrescente, in particolare ϕ è negativa in $\left]1, \sqrt{2}\right[$, in particolare $f''(x) < 0$ pertanto f è concava;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 36}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sin x + 2\sin\frac{x}{2}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \mathbb{R};$$

tuttavia f è periodica di periodo 4π e possiamo limitare lo studio all'intervallo $[0, 4\pi]$;
la funzione è limitata e vale $-3 \leq f(x) \leq 3$;
usando la formula di duplicazione per la funzione seno possiamo scrivere:

$$f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + 1\right),$$

abbiamo:

$$f(0) = f(4\pi) = 0$$

inoltre, nell'intervallo considerato, $f(x) = 0$ anche per $x = 2\pi$;
per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ per } \sin\frac{x}{2} > 0$$

ossia se e solo se$0 < x < 2\pi$;

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + \cos \frac{x}{2} \\ &= 2\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 + \cos \frac{x}{2} - 1 \end{aligned}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ se e solo se:

$$\cos \frac{x}{2} < -1 \text{ oppure } \cos \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$$

ossia, considerando la limitazione della funzione coseno, se e solo se

$$\cos \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$$

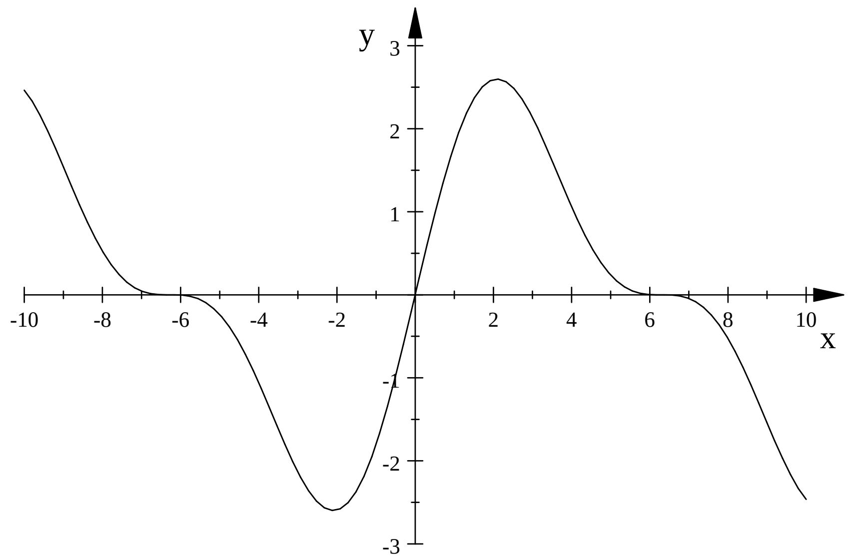
cioè per ogni $x \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right[$, $f(x) = 0$ per $x = \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \frac{10\pi}{3}$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right[$, f è strettamente decrescente per $x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right[$, ammette un massimo relativo nel punto $x = \frac{2\pi}{3}$ e un minimo relativo nel punto $x = \frac{10\pi}{3}$, il valore del massimo relativo è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, quello del minimo relativo è $f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, in particolare si tratta rispettivamente del massimo assoluto e minimo assoluto della funzione;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x - \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2} \\ &= -\sin \frac{x}{2}\left(2\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

in particolare si ha che $f''(x) > 0$ per $\sin \frac{x}{2}\left(2\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ ed essendo:

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} &> 0 \text{ per } 0 < x < 2\pi \\ \cos \frac{x}{2} &> -\frac{1}{4} \text{ per } x \in \left]0, 2ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\right[\cup \left]4\pi - 2ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right), 4\pi\right[\end{aligned}$$

posto $\theta = 2ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)$ abbiamo che f è concava per $x \in]0, \theta[\cup]2\pi, 4\pi - \theta[$ e f è convessa per $x \in]\theta, 2\pi[\cup]4\pi - \theta, 4\pi[$, i punti $x = 0, \theta, 2\pi, 4\pi - \theta, 4\theta$ sono punti di flesso;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico



$\boxed{\text{ESERCIZIO 37}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$ Si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{c} x > 0 \\ 8 - x^2 > 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < 2\sqrt{2} \right\} \end{aligned}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = \left]0, 2\sqrt{2}\right[;$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \to \left(2\sqrt{2}\right)^-} f(x) &= -\infty, \end{aligned}$$

pertanto le rette di equazione $x = 0$ e $x = 2\sqrt{2}$ sono asintoti verticali per f, inoltre f non è limitata inferiormente;

per quello che riguarda il segno di f abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } 2x\sqrt{8-x^2} > 1$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } 4x^4 - 32x^2 - 1 \leq 0$$

da cui si ottiene, considerando l'insieme di esistenza di f,

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } \sqrt{4 - \frac{\sqrt{63}}{2}} < x < \sqrt{4 + \frac{\sqrt{63}}{2}}$$

inoltre $f(x) = 0$ per $x = \sqrt{4 \pm \frac{\sqrt{63}}{2}}$;

f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$f'(x) = \frac{8-3x^2}{x(8-x^2)}$$

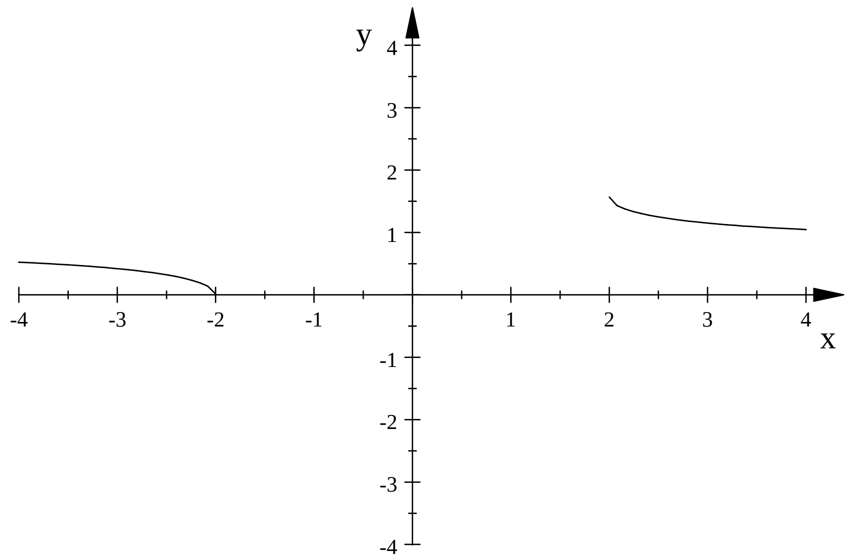
in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \left]0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right[$, $f(x) = 0$ per $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2}\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right[$,, $f(x) = 0$, f è strettamente decrescente per $x \in \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2}\right[$ e ammette un massimo relativo nel punto $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, non esistono minimi relativi;

per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = -\frac{6x^2(8-x^2) + (8-3x^2)}{x^2(8-x^2)^2}$$

si verifica subito che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$ pertanto f è concava;

dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 38}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \ln|\cos x - \sin x|\,.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si ha:

$$I.E.(f) = \{x \in \mathbb{R} \;|\; \cos x - \sin x \neq 0\}$$

pertanto:

$$I.E.(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\};$$

osserviamo che f è periodica di periodo π, quindi basta limitare lo studio all'intervallo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$;
osserviamo ancora che in tale intervallo risulta $\sin x > \cos x$, quindi possiamo riscrivere f nel modo seguente:

$$f(x) = \ln(\sin x - \cos x);$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \to \left(\frac{5\pi}{4}\right)^-} f(x) &= -\infty, \end{aligned}$$

pertanto le rette di equazione $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$ sono asintoti verticali per f, inoltre f non è limitata inferiormente;
calcoliamo le intersezione del grafico di f con l'asse delle ascisse:

$$f(x) = 0 \text{ se e solo se } \sin x - \cos x = 1$$

ossia se e solo se $\sin x = 1 + \cos x$, dacui si ottiene:

$$x = \frac{\pi}{2}, \text{ oppure } x = \frac{3\pi}{2};$$

non conviene soffermarci ora sullo studio del segno di f, consideriamo invece la derivata, abbiamo che f è derivabile per ogni x tale che $\cos x - \sin x \neq 0$, cioè per ogni $x \in I.E.(f)$ e risulta:
ossia

$$f'(x) = \frac{\sin x + \cos x}{-\cos x + \sin x}$$

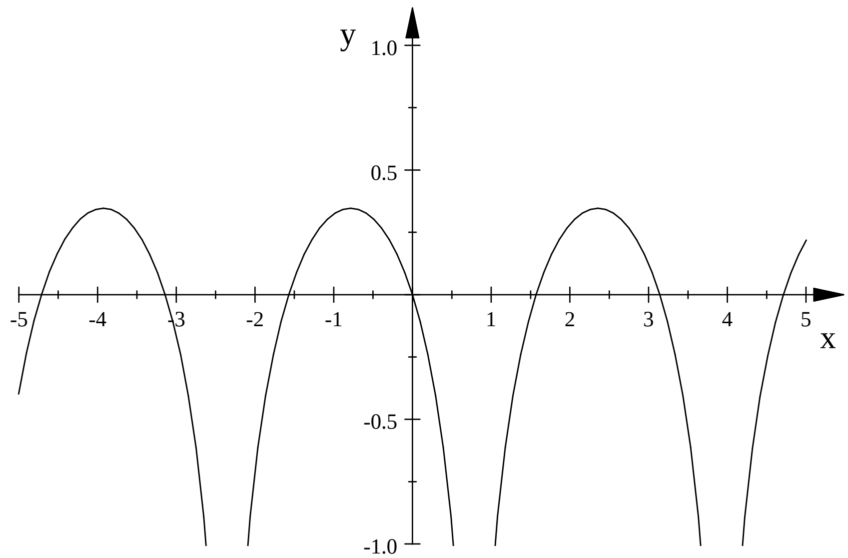
considerando l'intervallo in cui studiamo f si ha:

$$\sin x + \cos x > 0 \text{ se e solo se } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

pertanto si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, $f(x) = 0$ per $x = \frac{3\pi}{4}$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, f è strettamente decrescente per $x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ e ammette un massimo relativo nel punto $x = \frac{3\pi}{4}$, non esistono minimi relativi, il punto di massimo relativo è anche di massimo assoluto e il massimo è $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$;
in particolare possiamo affermare che $f(x) < 0$ per $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e $f(x) > 0$ per $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$f''(x) = \frac{-\left(-\sin x + \cos x\right)^2 - \left(\sin x + \cos x\right)^2}{\left(-\cos x + \sin x\right)^2}$$

si verifica subito che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ pertanto f è concava;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 39}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = 2\sin x + (\cos x)^2.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si verifica subito che $I.E.(f) = \mathbb{R}$; inoltre f è periodica di periodo 2π quindi limiteremo il nostro studio all'intervallo $[0, 2\pi]$, si osserva anche che f è limitata, infatti da:

$$-1 \leq \sin x \leq 1,\ 0 \leq (\cos x)^2 \leq 1$$

segue:

$$-2 \leq f(x) \leq 3;$$

abbiamo:

$$f(0) = f(2\pi) = 1,$$

per quello che riguarda il segno di f abbiamo $f(x) > 0$ se e solo se:

$$2\sin x + (\cos x)^2 > 0$$

ossia se e solo se:

$$-(\sin x)^2 + 2\sin x + 1 > 0$$

da cui si ottiene, considerando la limitatezza di $\sin x$:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \sin x < 1$$

e in definitiva, nell'intervallo considerato,

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x \in [0, \vartheta[\cup]3\pi - \vartheta, 2\pi] \text{ con } \pi < \vartheta < \frac{5\pi}{4} \text{ e } \sin\vartheta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

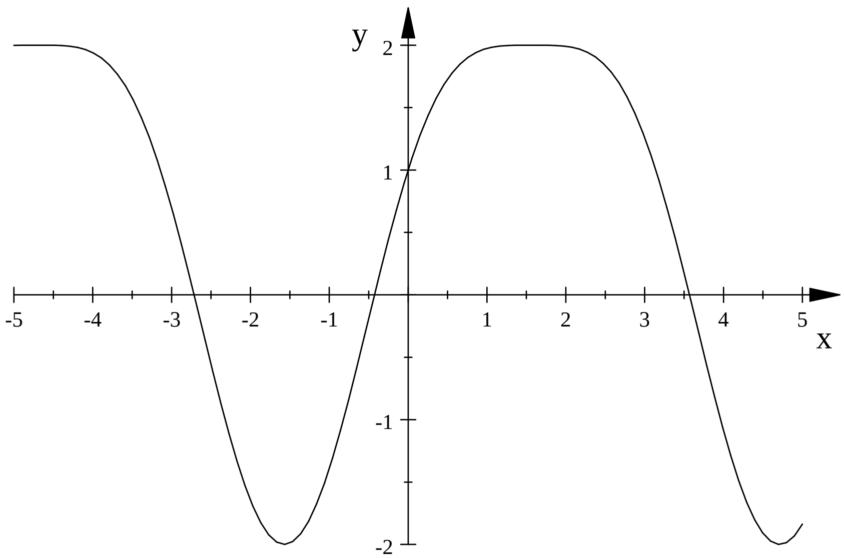
inoltre $f(x) = 0$ per $x = \vartheta$ e $x = 3\pi - \vartheta$ e $f(x) < 0$ per $x \in]\vartheta, 3\pi - \vartheta[$;
f è derivabile per ogni $x \in I.E.(f)$ perché è composizione di funzioni derivabili e risulta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x - 2\sin x \cos x \\ &= 2\cos x(1 - \sin x) \end{aligned}$$

essendo $\cos x > 0$ per $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}.2\pi\right[$e $1 - \sin x > 0$ per ogni $x \neq \frac{\pi}{2}$ si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}.2\pi\right[$, $f(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}.2\pi\right[$, f è strettamente decrescente per ogni $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, ammette un massimo relativo nel punto $x = \frac{\pi}{2}$ e un minimo relativo nel punto $x = \frac{3\pi}{2}$, essendo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ e $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$ si ha che 2 è il massimo assoluto e -2 è il minimo assoluto di f;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\sin x - 2(\cos x)^2 + 2(\sin x)^2 \\ &= 2(2(\sin x)^2 - \sin x - 1) \end{aligned}$$

in particolare risulta $f''(x) > 0$ per $\sin x < -\frac{1}{2}$, ossia se e solo se $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, $f''(x) = 0$ per $x = \frac{7\pi}{6}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$, $f''(x) < 0$ per $0 < x < \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, pertanto f è convessa per $x \in \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[$, è concava per $x \in \left]0, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$ e ammette flesso nei punti $x = \frac{7\pi}{6}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:



$\boxed{\text{ESERCIZIO 40}}$

Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \sqrt{(\cos x)^2 - (\sin x)^2}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Usando la relazione fondamentale della trigonometria possiamo scrivere:

$$f(x) = \sqrt{\cos 2x}$$

pertanto si ha:

$$\begin{aligned} I.E.(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos 2x \geq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } \; k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ con } \; k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

si verifica subito che la funzione è periodica di periodo π, quindi nello studio ci limiteremo all'intervallo:

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right];$$

la funzione è limitata, infatti:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

e abbiamo:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

f è derivabile per ogni $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ e risulta:

$$f'(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

in particolare si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, dunque f è strettamente crescente per ogni $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, è strettamente decrescente per $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ e ammette un massimo relativo nel punto $x = 0$, essendo $f(0) = 1$, si tratta del massimo assoluto, il minimo assoluto è 0 ed è raggionto nei punti $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$;
per quello che riguarda la derivata seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2\cos 2x\sqrt{\cos 2x} - \dfrac{(\sin 2x)^2}{\sqrt{\cos 2x}}}{\cos 2x} \\ &= \frac{-2(\cos 2x)^2 - (\sin 2x)^2}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}} \end{aligned}$$

si verifica subito che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I.E.(f)$ pertanto f è concava;
dalle considerazioni precedenti otteniamo il seguente grafico:

$f(x) = \sqrt{(\cos x)^2 - (\sin x)^2}$