CALCOLO DI LIMITI DI FUNZIONI CON IL TEOREMA DI DE L'HÔPITAL E CON LA FORMULA DI TAYLOR

$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{-x + x\,|x| + e^x - 1}\right).$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x - x}{-x + x\,|x| + e^x - 1}\right),$$

essendo $|x| = x$ per $x \geq 0$ abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x - x}{-x + x\,|x| + e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x - x}{-x + x^2 + e^x - 1}\right),$$

si tratta di un limite del tipo $\dfrac{0}{0}$, si verifica facilmente che valgono le ipotesi del teorema di de l'Hôpital, applicandolo si ottiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x - x}{-x + x^2 + e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x - 1}{-1 + 2x + e^x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{2 + e^x}\right) = 0.\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x - x}{-x + x\,|x| + e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x - x}{-x - x^2 + e^x - 1}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos x - 1}{-1 - 2x + e^x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\sin x}{-2 + e^x}\right) = 0\end{aligned}$$

quindi possiamo concludere che il limite richiesto esiste ed è uguale a 0.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2e^{2x} + 3x}{3e^{2x} + 2\sin x} + \frac{x - \ln 5x}{x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right).$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^{2x}+3x}{3e^{2x}+2\sin x}+\frac{x-\ln 5x}{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+3x}{3e^{2x}+2\sin x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln 5x}{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)},$$

il primo addendo è un un limite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, applicando il teorema di de l'Hôpital si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+3x}{3e^{2x}+2\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}+3}{6e^{2x}+2\cos x}=\frac{2}{3}.$$

Per quanto riguarda il secondo addendo osserviamo

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln 5x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln 5x}{x}\right)=+\infty.$$

Quindi il secondo addendo è un limite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, applicando il teorema di de l'Hôpital si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln 5x}{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}=0,$$

quindi possiamo concludere che il limite richiesto esiste e vale $\frac{2}{3}$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^3+\sqrt{x}-2x}-1}{3x^3-\sqrt{x}}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si tratta di un limite del tipo $\frac{0}{0}$. Si verifica facilmente che valgono le ipotesi del teorema di de l'Hôpital, applicandolo si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3+\sqrt{x}-2x}-1}{3x^3-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\right)e^{x^3+\sqrt{x}-2x}}{9x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(6x^2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}\right)e^{x^3+\sqrt{x}-2x}}{18x^2\sqrt{x}-1} = -1.$$

ESERCIZIO 4

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x+x^2\right)-\cos x - x - 1}{\ln(1+x)-\sin x}.$$

SOLUZIONE

Si tratta di un limite del tipo $\frac{0}{0}$. Utilizzando le formule di Mc Laurin abbiamo

$$\sin\left(x+x^2\right) = \left(x+x^2\right) - \frac{\left(x+x^2\right)^3}{3!} + o\left(\left(x+x^2\right)^3\right) = x + x^2 + o\left(x^2\right),$$

quindi

$$\sin\left(x+x^2\right)-\cos x - x - 1 = \left(x+x^2+o\left(x^2\right)\right) - \left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - x - 1.$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Inoltre

$$\ln(1+x)-\sin x = \left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - \left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right) = -\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right).$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x+x^2\right)-\cos x - x - 1}{\ln(1+x)-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)} = -3.$$

ESERCIZIO 5

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x}}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

SOLUZIONE

Si tratta di un limite del tipo $\dfrac{0}{0}$.
Poiché

$$\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}}{\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}}{\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-3x}}.$$

Applicando il teorema di de l'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-3e^{-3x}}=0.$$

ESERCIZIO 6

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right).$$

SOLUZIONE

Si tratta di un limite del tipo $0\cdot\infty$. Osserviamo che:

$$x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}},$$

quindi, applicando il teorema di de l'Hôpital si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

ESERCIZIO 7

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\dfrac{1}{x^2}}.$$

SOLUZIONE

Si tratta di un limite del tipo 0^0; osserviamo che:

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}.$$

Calcoliamo il limite della funzione a esponente, cioè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{x^2},$$

applicando il teorema di de l'Hôpital si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{2x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x\left(1+x^2\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}.$$

D'altra parte

$$x\left(1+x^2\right)=x^3+o\left(x^3\right),\ \text{per } x \text{ che tende a } +\infty.$$

Quindi abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(1+x^2\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{x^{-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-3x^{-4}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{1+x^2}=+\infty.$$

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x\left(1+x^2\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=0,$$

da cui:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^0=1.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 8}}$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\arctan(x+1)-\arctan x\right].$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si tratta di un limite del tipo $\infty \cdot 0$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\arctan(x+1) - \arctan x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x+1) - \arctan x}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{1+(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2x+1)}{(x^2+1)\left[1+(x+1)^2\right]} = 0.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 9}}$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln\left(1+\frac{1}{\ln x}\right) - \frac{1}{\ln x}\right].$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si tratta di un limite del tipo $\infty \cdot 0$, poniamo $\ln x = y$, otteniamo $x = e^y$ e

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln\left(1+\frac{1}{\ln x}\right) - \frac{1}{\ln x}\right] = \lim_{y\to+\infty} e^y\left[\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\right]$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{1}{y}}{e^{-y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{y}} + \dfrac{1}{y^2}}{-e^{-y}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{y^3\left(1+\dfrac{1}{y}\right)}}{-e^{-y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-e^y}{y^3+y^2}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^3}\frac{-1}{1+\frac{2}{y^3}} = 0 \cdot (-1) = 0.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 10}}$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to1^+} x^{\frac{x}{(x-1)^2}}\, e^{\frac{-x}{x-1}}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$
Osserviamo che

$$x^{\frac{x}{(x-1)^2}}e^{\frac{-x}{x-1}} = \exp\left(\frac{x\ln x}{(x-1)^2} - \frac{x}{x-1}\right) = \exp\frac{x(\ln x-(x-1))}{(x-1)^2}.$$

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x(\ln x-(x-1))}{(x-1)^2},$$

poniamo $y = x-1$ abbiamo

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x(\ln x-(x-1))}{(x-1)^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)(\ln(x+1)-x)}{x^2}.$$

Dalla formula di McLaurin si ha

$$\ln(x+1)-x = -\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right), \text{ per } x \text{ che tende a } 0.$$

Perciò

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)(\ln(x+1)-x)}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 11}}$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}}{(1-\cos x)}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si tratta di un limite del tipo $\frac{0}{0}$. Osserviamo che per $x>0$ si ha

$$\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}}{(1-\cos x)} = \frac{e\left(1-e^{\frac{\ln(x+1)}{\sin x}-1}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}} = \frac{e\left(1-e^{\frac{\ln(x+1)}{\sin x}-1}\right)}{\frac{x}{\sqrt{2}}+o(x)} \tag{1}$$

e dalle formule di Mc Laurin

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(x+1)}{\sin x}-1\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)}{x + o\left(x\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{x + o\left(x\right)} = 0.$$

Quindi, ricordando la (1), otteniamo Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}}{(1-\cos x)} = e\sqrt{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln(x+1)}{\sin x} - 1}{\frac{x}{\sqrt{2}} + o\left(x\right)} = e\sqrt{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(x+1\right) - \sin x}{\sin x\left(x + o\left(x\right)\right)}$$

$$= e\sqrt{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} = \frac{e\sqrt{2}}{2}.$$

ESERCIZIO 12

Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right) e^{x^2-x}\right]^{\frac{1}{x\sin x}}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x \sin x^2 - x^2\cos x}{2\cos x \ln\left(1+x^2\right) - \sin 2x^2}\right)^2$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\sqrt{1+x^3}}{e^{x^2}\cos x - \left(\cos x\right)^2 + 2x^2}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 \cos x - x\sin x}{x\ln\left(1+x\right)}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^{x-1}$,

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln\left(1+x+x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right) - \frac{1}{x}\right) x^2$,

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \arctan x - \frac{\pi}{2}x^2 + x$.

SOLUZIONE

1) Abbiamo

$$\left[\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) e^{x^2-x}\right]^{\frac{1}{x\sin x}} = \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) + x^2 - x}{x\sin x}\right)$$

e

$$\ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) + x^2 - x = \ln\left(1 + \frac{x-x^2}{1+x^2}\right) + x^2 - x$$

$$= \frac{x-x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-x^2}{1+x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x-x^2}{1+x^2}\right)^2\right) + x^2 - x$$

$$= \left(x - x^2\right)\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-x^2}{1+x^2}\right)^2 + o\left(x^2\right)$$

$$= \frac{-\left(x-x^2\right)x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-x^2}{1+x^2}\right)^2 + o\left(x^2\right) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

D'altra parte

$$x\sin x = x^2 + o\left(x^2\right).$$

Perciò

$$\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) + x^2 - x}{x\sin x} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)},$$

quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) + x^2 - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} = -\frac{1}{2},$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)e^{x^2-x}\right]^{\frac{1}{x\sin x}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) + x^2 - x}{x\sin x}\right) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

2) Abbiamo

$$e^x\sin x^2 - x^2\cos x = (1+x+o(x))\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + o\left(x^6\right)\right) - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)$$

$$= \left(x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right) = x^3 + o\left(x^3\right)$$

e

$$2\cos x\ln\left(1+x^2\right) - \sin 2x^2 = 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right) - \left(2x^2 - \frac{\left(2x^2\right)^3}{3!} + o\left(x^6\right)\right)$$

$$\left(2x^2 - 2x^4 + o\left(x^4\right)\right) - \left(2x^2 - \frac{\left(2x^2\right)^3}{3!} + o\left(x^6\right)\right) = -2x^4 + o\left(x^4\right).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x\sin x^2 - x^2\cos x}{2\cos x\ln\left(1+x^2\right) - \sin 2x^2}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3 + o\left(x^3\right)}{-2x^4 + o\left(x^4\right)}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty.$$

3) <u>1^o modo</u>. Applicando ripetutamente il teorema di de l'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\sqrt{1+x^3}}{e^{x^2}\cos x - (\cos x)^2 + 2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \sqrt{1+x^3} - \frac{3x^3}{2\sqrt{1+x^3}}}{2xe^{x^2}\cos x - e^{x^2}\sin x + 2\sin x\cos x + 4x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} - \frac{6x^2}{2\sqrt{1+x^3}} + \frac{9x^5}{4(1+x^3)}}{2e^{x^2}\cos x + 4x^2e^{x^2}\cos x - 2xe^{x^2}\sin x - 2xe^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x + 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2 + 4} = 0.$$

$\underline{2^o \text{ modo}}$. Utilizziamo la formula di Mc Laurin abbiamo

$$\sin x - x\sqrt{1+x^3} = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) - x\left(1 + \frac{1}{2}x^3 + o\left(x^3\right)\right)$$

$$= -\frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

e

$$e^{x^2}\cos x - (\cos x)^2 + 2x^2 = \left(1 + x^2 + o\left(x^2\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right)^2 + 2x^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) - \left(1 - x^2 + o\left(x^2\right)\right) + 2x^2 = \frac{7}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\sqrt{1+x^3}}{e^{x^2}\cos x - (\cos x)^2 + 2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)}{\frac{7}{2}x^2 + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{3!}}{\frac{7}{2}} = 0.$$

4) Abbiamo

$$\sin x^2\cos x - x\sin x = \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + o\left(x^6\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right) - x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o\left(x^4\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)\right) = -\frac{1}{3}x^4 + o\left(x^4\right)$$

e

$$x\ln(1+x) = x^2 + o\left(x^2\right).$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cos x - x\sin x}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{3}x^2 = 0.$$

5) Abbiamo

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^{x-1} = e^{(x-1)\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)}.$$

Ora occupiamoci del limite

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1)\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right).$$

Risulta

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1)\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)}{\frac{1}{x-1}}$$

e, applicando il teorema di de l'Hôpital, otteniamo

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2}{x\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^{3/2}}{x\sqrt{1+x}} = 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)^{x-1}=1.$$

6) Abbiamo

$$\left(\ln\left(1+x+x^2\right)-\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{x}\right)x^2=\left(\ln\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)-\frac{1}{x}\right)x^2$$

$$=x^2\left(\ln\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)-\frac{1}{x}\right)=x^2\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^2\left(-\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\left(1+x^2\right)^2}+o\left(1\right).$$

Quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(1+x+x^2\right)-\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{x}\right)x^2=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{1}{2}.$$

7) Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\arctan x-\frac{\pi}{2}x^2+x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}+x^{-1}}{x^{-2}}.$$

Ora, applicando il teorema di de l'Hôpital, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}+x^{-1}}{x^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}-x^{-2}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0.$$

ESERCIZIO 13

Discutere la seguente affermazione:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x+\sin x}$$

non esiste, infatti , poiché è del tipo $\dfrac{0}{0}$, applicando il teorema di de l'Hôpital, si ha:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x+\sin x}=\frac{4x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\cos x}$$

l'ultimo limite non esiste, quindi non esiste neppure il limite di partenza.

SOLUZIONE

Si applica in modo errato il teorema di de l'Hôpital infatti non è vero che se esiste il limite del rapporto delle funzioni allora esiste anche quello del rapporto delle derivate. In questo caso abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x+\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{2} = 0 \ .$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 14}}$

Trovare l'errore nel ragionamento che segue:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x-\cos x}{3x+\sin x} \ ,$$

non esiste , infatti , poiché è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, applicando il teorema di de l'Hôpital, si ha:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x-\cos x}{3x+\sin x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4+\sin x}{3+\cos x} \ ;$$

l'ultimo limite non esiste, quindi non esiste neppure il limite di partenza.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si applica in modo errato il teorema di de l'Hôpital infatti non è vero che se esiste il limite del rapporto delle funzioni allora esiste anche quello del rapporto delle derivate. In questo caso abbiamo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x-\cos x}{3x+\sin x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4-\frac{\cos x}{x}}{3+\frac{\sin x}{x}} = \frac{4}{3} \ .$$

FORMULA DI TAYLOR.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Scrivere la formula di Taylor di centro 0 e grado n con il resto di Lagrange di

$$f(x) = (1+x)^{1/2} \quad , \ x \in [-1, +\infty[.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad ,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \quad , \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi il polinomio di Taylor richiesto è dato da

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{2}x + ... + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)\frac{x^n}{n!}$$

e il resto di Lagrange è dato da

$$R_n(x) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n\right)\frac{x^{n+1}(1+\xi)^{-\frac{1}{2}-n}}{(n+1)!} \quad ,$$

dove ξ è un punto opportuno dell'intervallo di estremi 0 e x.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

Scrivere il polinomio di di Taylor centrato in 0 di grado 4 della funzione

$$f(x) = e^x \log(1+x) \quad , \ x \in [-1, +\infty[.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Poiché f è derivabile almeno quattro volte possiamo applicare il teorema PINKO PALLO. Ricordando che

$$e^x = \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^4\right)$$

e

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o\left(x^4\right),$$

abbiamo

$$e^x \log(1+x) = \left(\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^4\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o\left(x^4\right)\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right) + o\left(x^4\right).$$

Si ha

$$\left(\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)$$

e, quindi,

$$e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)$$

Quindi, per il summenzionato teorema, il polinomio di Taylor richiesto è uguale a

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}.$$

ESERCIZIO 3

Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente calcolare la derivata quarta in 0 della funzione

$$f(x) = e^x \log(1+x) \ \ , \ x \in [-1, +\infty[\,.$$

SOLUZIONE

Poiché

$$e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right),$$

si ha

$$D^4\left(e^x \log(1+x)\right)_{|x=0} = (4!)\left(-\frac{1}{6}\right) = -4.$$

ESERCIZIO 4

Verificare che

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right), \text{ per } x \text{ che tende a } 0. \tag{2}$$

SOLUZIONE

Posto

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

per verificare la (2) basta applicare il teorema di Taylor-Peano. Perciò è sufficiente verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - P(x)}{x^{2n+1}} = 0. \tag{3}$$

Applicando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - P(x)}{x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}}{(2n+1)\,x^{2n}}.$$

Ora

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k = \frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2},$$

quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}}{(2n+1)\,x^{2n}} = \lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{(2n+1)\left(1+x^2\right)} = 0.$$

Da ciò segue la (3) e quindi la (2).

$\boxed{\text{ESERCIZIO 5}}$

Calcolare $\ln 2$ con approssimazione inferiore a $\dfrac{1}{10}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Utilizzando la formula di Taylor di $\ln(1+x)$ con il resto di Lagrange abbiamo che esiste $\xi \in\,]0,1[$ tale che

$$\ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}.$$

Perciò

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Scegliendo $n=9$ e si ha

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{9}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| < \frac{1}{10}$$

e, poiché

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1879}{2520} = 0.745\,63,$$

otteniamo che un valore approssimato a meno di $\frac{1}{10}$ di $\ln 2$ è dato da $0.745\,63$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 6}}$

Calcolare $\sin 1$ con approssimazione inferiore a $\dfrac{1}{100}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Utilizzando la formula di Taylor di $\sin x$ con il resto di Lagrange abbiamo che esiste $\xi \in]0,1[$ tale che

$$\left|\sin 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right| = \frac{|\sin \xi|}{(2n+2)!} < \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Scegliendo $n = 2$ si ha

$$\left|\sin 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right| < \frac{1}{720}.$$

e, poiché

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \frac{101}{120} = 0.841\,67,$$

otteniamo che un valore approssimato a meno di $\dfrac{1}{100}$ di $\sin 1$ è dato da $0.841\,67$.