1. MONOTONIA DI FUNZIONI, RICERCA DI MASSIMI E MINIMI RELATIVI, APPLICAZIONI DEI TEOREMI DI ROLLE, LAGRANGE, CAUCHY

ESERCIZIO 1*

Siano f, g due funzioni definite in un intervallo $[a, b]$, supponiamo che f e g siano derivabili in $x_0 \in [a, b]$ e che

i) $f(x_0) = g(x_0)$,

ii) $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Provare che:

se $x_0 \in]a, b[$ risulta $f'(x_0) = g'(x_0)$;

se $x_0 = a$ risulta $f'(a) \geq g'(a)$;

se $x_0 = b$ risulta $f'(b) \leq g'(b)$.

SOLUZIONE

Consideriamo la funzione

$$F(x) = f(x) - g(x).$$

Da i) segue che $F(x_0) = 0$, da ii) segue che $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, quindi x_0 è un punto di minimo per F; in particolare se $x_0 \in]a, b[$ dal teorena di Fermat discende che $F'(x_0) = 0$, ossia

$$f'(x_0) = g'(x_0).$$

Se $x_0 = a$, per ogni $x \in]a, b]$ si ha

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} \geq 0.$$

Quindi

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \geq 0,$$

vale a dire

$$f'(a) \geq g'(a);$$

se $x_0 = b$ si procede in modo analogo, i dettagli sono lasciati al lettore.

ESERCIZIO 2

Sia

$$f_k(x) = (\cos x - k \sin x) \sin x,$$

con $k \in \mathbb{R}$, e sia $I = \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$. Discutere l'applicabilità del teorema di Rolle a f_k in I al variare di k. Descrivere inoltre l'insieme $S_k = \left\{c \in \left]0, \frac{\pi}{8}\right[\ \mid f_k'(c) = 0\right\}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si osservi che per ogni $k \in \mathbb{R}$ la funzione f_k è continua in I e derivabile in $\left]0, \frac{\pi}{8}\right[$ perché prodotto di funzioni continue e derivabili. Inoltre risulta

$$f_k(0) = 0$$

e

$$f_k\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - k\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right),$$

pertanto $f_k(0) = f_k\left(\frac{\pi}{8}\right)$ se e solo se $k = 1 + \sqrt{2}$.

Derivando f_k si ottiene

$$f_k'(x) = -(\sin x)^2 + (\cos x)^2 - 2k \sin x \cos x = \cos 2x - k \sin 2x,$$

da cui:

$$f_k'(x) = 0 \text{ se e solo se } \cot 2x = k,$$

cioè

$$2x = \operatorname{arccot} k.$$

In particolare $x \in \left]0, \frac{\pi}{8}\right[$ se e solo se $k > 1$, quindi:

$$S_k = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } k \le 1, \\ \frac{1}{2}\operatorname{arccot} k, & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}^*}$

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Provare che se f si annulla in n punti di $[a, b]$ allora f' si annulla in almeno $n - 1$ punti di $]a, b[$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti in cui si annulla f. Supponiamo che $a \le x_1 < x_2 < ... < x_n \le b$. Nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ per $i = 1, ..., n-1$, f risulta continua inoltre f è derivabile in $]x_i, x_{i+1}[$ e $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$, applicando il teorema di Rolle in $[x_i, x_{i+1}]$ si ha che esiste $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tale che $f'(c_i) = 0$; ciò implica che f' si annulla in almeno $n - 1$ punti.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}^*}$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, dimostrare che l'equazione $e^x - ax^2 - bx - c = 0$ ha al più 3 soluzioni.

SOLUZIONE

Supponiamo che l'equazione $e^x - ax^2 - bx - c = 0$ abbia almeno quattro soluzioni, consideriamo la funzione

$$f(x) = e^x - ax^2 - bx - c,$$

per l'esercizio precedente, $f'(x) = 0$ ha almeno tre soluzioni, quindi $f''(x) = 0$ ha almeno due soluzioni e $f'''(x) = 0$ ne ha almeno una, ma $f'''(x) = e^x \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi abbiamo trovato un assurdo.

ESERCIZIO 5*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$; provare che se $f(a) = f(b) = 0$ allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

SOLUZIONE

Consideriamo al funzione

$$F(x) = f(x)e^{\lambda x};$$

si verifica subito che tale funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, quindi esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $F'(\xi) = 0$, cioè

$$F'(\xi) = e^{\lambda\xi} \left(f'(\xi) + \lambda f(\xi)\right) = 0,$$

da cui $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

ESERCIZIO 6

Dire se la seguente proposizione è vera:
sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, se $f'(0) = 0$ allora esistono $x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$.

SOLUZIONE

La proposizione è falsa infatti basta considerare la funzione $f(x) = x^3$, essa è iniettiva e soddisfa $f'(0) = 0$.

ESERCIZIO 7

Sia $f(x) = e^{(x-1)}$; verificare che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $I = \left[-\sqrt{5}, -1\right]$, e determinare i punti $c \in] -\sqrt{5}, -1[$ tali che $f'(c) = \dfrac{f(-1) - f(-\sqrt{5})}{-1 + \sqrt{5}}$

SOLUZIONE

Si osserva che f è continua in I e derivabile in $\left]-\sqrt{5},-1\right[$ perché composizione di funzioni continue e derivabili; inoltre risulta

$$f'(x) = e^{(x-1)}.$$

Pertanto, la relazione

$$f'(c) = \frac{f(-1) - f(-\sqrt{5})}{-1+\sqrt{5}} = \frac{e^{-2} - e^{-\sqrt{5}-1}}{\sqrt{5}-1}$$

è soddisfatta se e solo se

$$c = 1 + \ln \frac{e^{-2} - e^{-\sqrt{5}-1}}{\sqrt{5}-1}.$$

ESERCIZIO 8

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = x - 3(\sin 2x)^2$; verificare che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $I = [0, \pi]$ e determinare i punti $c \in]0,\pi[$ tali che $f'(c) = \dfrac{f(\pi) - f(0)}{\pi}$.

SOLUZIONE

f è continua in I e derivabile in $]0, \pi[$ perché composizione di funzioni continue e derivabili. Inoltre risulta

$$f'(x) = 1 - 12 \cos 2x \sin 2x.$$

Pertanto

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

se e solo se

$$12 \cos 2c \sin 2x = 0,$$

da cui

$$c = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}.$$

ESERCIZIO 9

Sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x + 6}{3a^2 + 4}, & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{\sin x^2}{3x} + 1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali f_a soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-\sqrt{\pi}, \pi]$. Per tali valori determinare almeno un punto $c \in \,]-\sqrt{\pi}, \pi[$ tale che $f_a'(c) = \dfrac{f_a(\pi) - f_a(-\sqrt{\pi})}{\pi - \sqrt{\pi}}$.

SOLUZIONE

Si verifica facilmente che per ogni valore di a la funzione f_a è continua per $x \neq 0$. Esaminiamo la continuità e la derivabilità in 0.
Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f_a(x) = \frac{6}{3a^2 + 4} = f_a(0),$$

$$\lim_{x \to 0^-} f_a(x) = 1.$$

Quindi f_a è continua in 0 se solo se

$$\frac{6}{3a^2 + 4} = 1,$$

ossia se e solo se:

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}, \ -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Inoltre

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_a(h) - f_a(0)}{h} = \frac{2}{3a^2 + 4}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f_a(h) - f_a(0)}{h} = \frac{1}{3}.$$

Quindi per $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ oppure $a = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, f_a è derivabile in 0, perciò soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in $[0, \pi]$.

Inoltre, ponendo $f = f_a$ per $a = \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}$, risulta

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(-\sqrt{\pi})}{\pi + \sqrt{\pi}} = \frac{1 - 1}{\pi + \sqrt{\pi}} = 0. \tag{1}$$

Cerchiamo $c \in [0, \pi[$. Poiché $f'(x) = \dfrac{\cos x}{3}$, abbiamo che una soluzione di (1) è data da

$$c = \frac{\pi}{2}.$$

ESERCIZIO 10*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Provare che se esiste un numero reale non negativo L tale che $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x, y \in]a, b[$, allora risulta: $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$ per ogni $x, y \in [a, b]$.

SOLUZIONE

Dal teorema di Lagrange si ha che dati $x, y \in [a, b]$ esiste ξ nell'intervallo di estremi x e y tale che

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Quindi:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \, |x - y| \leq L \, |x - y| \, .$$

ESERCIZIO 11*

Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua in $[1, +\infty[$ e derivabile in $]1 + \infty[$; supponiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, provare che esiste $\xi \in]1, +\infty[$ tale che $\xi^2 f'(\xi) = l - f(1)$.

SOLUZIONE

Consideriamo la funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \in]0, 1], \\ l, & \text{se } x = 0. \end{cases} .$$

Si verifica facilmente che g è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $]0, 1[$. Applicando il teorema di Lagrange a g si ha che esiste $\eta \in]0, 1[$ tale che

$$f(1) - l = g(1) - l = g(1) - g(0) = g'(\eta) = -\frac{1}{\eta^2} f'\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

da cui, ponendo $\xi = \dfrac{1}{\eta}$, segue la tesi.

ESERCIZIO 12

Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y| \, .$$

SOLUZIONE

Sia $f(x) = \arctan x$, risulta $|f'(x)| = \dfrac{1}{1 + x^2} \leq 1$, quindi applicando l'esercizio 10 si ha l'asserto.

ESERCIZIO 13*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in $]a, b[$. Supponiamo che $f(a) = f(b)$ e che esista un numero reale non negativo L per cui valga $|f''(x)| \leq L$ per ogni $x \in]a, b[$, allora per ogni $x, y \in [a, b]$ risulta

$$|f(x) - f(y)| \leq L \, (b - a) \, |x - y| \, .$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Osserviamo innanzitutto che, per il il teorema di Rolle, esiste $\eta \in]a, b[$ tale che $f'(\eta) = 0$, inoltre, se $x, y \in [a, b]$ e $x < y$, nell'intervallo $[x, y]$ si può applicare il teorema di Lagrange, quindi esiste $\xi \in]x, y[$ tale che

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(y - x).$$

Ora, osserviamo che $f'(\xi) = f'(\xi) - f'(\eta)$, quindi, applicando il teorema di Lagrange nell'intervallo di estremi ξ e η si ha che esiste ζ interno al suddetto intervallo tale che

$$f'(\xi) - f'(\eta) = f^{'}{}'(\zeta)(\xi - \eta),$$

da cui si ottiene

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|y - x| = \left|f^{'}{}'(\zeta)\right| |\xi - \eta|\,|y - x| \leq L\,(b - a)\,|y - x|\,.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 14*}}$

Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, dimostrare che se $\lambda \in \widetilde{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lambda,$$

allora

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x + 1) - f(x)] = \lambda. \tag{2}$$

Vale il viceversa?

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Supponiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lambda,$$

allora per ogni intorno V_λ di λ esiste un numero reale positivo M tale che se $x > M$ allora $f'(x) \in V_\lambda$. Fissiamo un tale V_λ e sia $x > M$, allora per il teorema di Lagrange esiste $\xi \in]x, x + 1[$ tale che

$$f(x + 1) - f(x) = f'(\xi)$$

ed essendo $\xi > x > M$ risulta $f'(\xi) \in V_\lambda$, quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x + 1) - f(x)] = \lambda.$$

Il viceversa non vale, infatti sia $f(x) = \sin 2\pi x$, si ha

$$f(x+1) - f(x) = \sin 2\pi(x+1) - \sin 2\pi x = 0.$$

Quindi
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0.$$

D'altra parte $f'(x) = 2\pi \cos 2\pi x$, quindi non esiste $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

ESERCIZIO 15*

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile due volte in $]a,b[$. Supponiamo che esista un numero reale non negativo L tale che

$$|f''(x)| \leq L \text{ per ogni } x \in]a,b[\ ,$$

allora per ogni $x, y \in [a,b]$ risulta

$$\left| f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) \right| \leq \frac{L\,(x-y)^2}{2}.$$

SOLUZIONE

Osserviamo che:

$$f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) = \left(f(x) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) - \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y)\right).$$

Applicando il teorema di Lagrange abbiamo che esistono $\xi \in \left]x, \dfrac{x+y}{2}\right[$ e $\eta \in \left]\dfrac{x+y}{2}, y\right[$ tali che:

$$f(x) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) = -f'(\xi)\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

e
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y) = -f'(\eta)\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Dalle uguaglianze precedenti si ottiene

$$\left| f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) \right| = |f'(\xi) - f'(\eta)| \left|\frac{x-y}{2}\right|.$$

D'altra parte dall'esercizio 10 si ha

$$|f'(\xi) - f'(\eta)| \leq L\,|x-y|$$

ed essendo $|\xi - \eta| \leq |x - y|$, perché $\xi, \eta \in]x, y[$, si ottiene:

$$\left| f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) \right| = |f'(\xi) - f'(\eta)| \left| \frac{x-y}{2} \right| \leq L \frac{(x-y)^2}{2}$$

.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 16*}}$

Sia $f \in C^3([0,1])$. Utilizzare il teoema di Cauchy per dimostrare che se $f(0) = 0$ allora per ogni $x \in [0,1]$ risulta:

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x)}{x^3} \right| \leq \frac{1}{3} \max_{x\in[0,1]} |f'''(x)| . \tag{3}$$

Inoltre, provare che $\frac{1}{3}$ è la migliore costante nella precedente disuguaglianza, nel senso che esiste una funzione $f \in C^3([0,1])$ tale che f''' non sia identicamente nulla e per la quale nella disuguaglianza precedente valga il segno di uguaglianza.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Poniamo

$$F(x) = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x).$$

Abbiamo

$$F'(x) = x^2 f'''(x).$$

Applicando il teorema di Cauchy otteniamo

$$\frac{F(x)}{x^3} = \frac{F(x) - F(0)}{x^3 - 0^3} = \frac{F'(\xi)}{3\xi^2} = \frac{1}{3} f'''(\xi)$$

per un opportuno $\xi \in]0,1[$, da cui:

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x)}{x^3} \right| = \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{F(x)}{x^3} \right| \leq \frac{1}{3} \max_{x\in[0,1]} |f'''(x)| .$$

Per dimostrare che $\frac{1}{3}$ è la migliore costante nella disuguaglianza (3) consideriamo la funzione $f(x) = x + x^3$. Otteniamo

$$f'(x) = 1 + 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6.$$

Perció

$$\frac{x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x)}{x^3} = 2 = \frac{1}{3} 6 = \frac{1}{3} \max_{x\in[0,1]} |f'''(x)| .$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 17}}$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \dfrac{2x^5}{(x^2-3)^2}$. Determinare l'insieme di esistenza, $(IE(f))$, e i punti di massimo e minimo relativo di f.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo

$$IE(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 3 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \pm\sqrt{3}\right\}.$$

Poiché f è derivabile, dal teorema di Fermat segue che i punti di massimo e di minimo relativo sono da ricercare fra le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = 0,$$

cioè

$$\frac{2x^4(x^2-15)}{(x^2-3)^3} = 0.$$

Da quest'ultima si ottengono i punti:

$$x = -\sqrt{15},\ x = 0,\ x = \sqrt{15}$$

Per decidere se i punti trovati precedentemente sono di massimo o di minimo relativo basta studiare il segno della derivata prima e si ottiene:

$$\frac{2x^4(x^2-15)}{(x^2-3)^3} > 0$$

per

$$x < -\sqrt{15},\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3},\ x > \sqrt{15},$$

possiamo, dunque, concludere che negli intervalli

$$\left]-\infty, -\sqrt{15}\right] \ , \ \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[\ , \ \left[\sqrt{15}, +\infty\right[$$

f è crescente, mentre f è decrescente negli intervalli

$$\left[-\sqrt{15}, -\sqrt{3}\right[\ , \ \left]\sqrt{3}, \sqrt{15}\right].$$

Pertanto $x = -\sqrt{15}$ è un punto di massimo relativo, $x = \sqrt{15}$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 0$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo relativo.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 18}}$

Determinare i massimi e i minimi relativi delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \dfrac{|x^2+2x|}{x-3}$;

b) $f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

a) l'insieme di esistenza di f è il seguente: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$,

inoltre abbiamo

$$x^2 + 2x \geq 0 \text{ per } x \leq -2, x \geq 0 \ ,$$

pertanto possiamo scrivere:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x-3}, & \text{se } x \leq -2,\ x \geq 0,\ x \neq 3, \\ \dfrac{x^2+2x}{3-x}, & \text{se } -2 < x < 0, \end{cases} \ ,$$

in particolare f è derivabile per $x \neq -2, 0, 3$ e risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x-6}{(x-3)^2}, & \text{se } x < -2,\ x > 0,\ x \neq 3 \\ -\dfrac{x^2-6x-6}{(3-x)^2}, & \text{se } -2 < x < 0. \end{cases} \ .$$

Dallo studio del segno del trinomio $x^2 - 6x - 6$ si ricava che

$$f'(x) > 0 \text{ se e solo se } x < -2,\ 3-\sqrt{15} < x < 0,\ 3+\sqrt{15} < x$$

$$f'(x) < 0 \text{ se e solo se } -2 < x < 3-\sqrt{15},\ 0 < x < 3,\ 3 < x < 3+\sqrt{15}$$

$$f'(x) = 0 \text{ se e solo se } x = 3-\sqrt{15},\ \ x = 3+\sqrt{15}.$$

Quindi f risulta strettamente crescente negli intervalli

$$]-\infty, -2]\,;\ \left[3-\sqrt{15}, 0\right]\,;\ \left[3+\sqrt{15}, +\infty\right[$$

e f risulta strettamente decrescente negli intervalli

$$\left[-2 < 3-\sqrt{15}\right];\ [0,3[\,;\ \left]3, 3+\sqrt{15}\right].$$

Quindi f ammette massimo relativo nei punti

$$x = -2,\ x = 0$$

e f ammette minimo relativo nei punti

$$x = 3 - \sqrt{15},\ x = 3 + \sqrt{15}.$$

b) In questo caso f è definita e derivabile in $\mathbb{R}$. Calcolando la derivata di f si ottiene

$$f'(x) = 3e^x + 2e^{-x} > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$

Pertanto f è strettamente crescente e non ammette massimi e minimi relativi.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 19}}$

Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti, dopo aver determinato il loro insieme di esistenza:

a) $f(x) = 3\cos x \sin x + \cos 2x$;

b) $f(x) = 3^{\tan x} + \log_3 x^5$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

a) Abbiamo $IE(f) = \mathbb{R}$.

Osserviamo che, usando la formula di duplicazione per la funzione seno, possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + \cos 2x.$$

Ora ricordiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua in un intervallo I e derivabile nella parte interna di I, allora f è crescente (decrescente) in I se e solo se $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), nel nostro caso risulta:

$$f'(x) = 3\cos 2x - 2\sin 2x,$$

usando le formule parametriche, posto $t = \tan x$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo che f è crescente se:

$$f'(x) = 3\frac{1-t^2}{1+t^2} - 4\frac{t}{1+t^2} = \frac{-3t^2 - 4t + 3}{1+t^2} \geq 0,$$

ossia se:

$$\arctan\frac{-2-\sqrt{13}}{3} + k\pi \leq x \leq \arctan\frac{-2+\sqrt{13}}{3} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi f è strettamente crescente negli intervalli $\arctan\dfrac{-2-\sqrt{13}}{3} + k\pi \leq x \leq \arctan\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i punti $x = \arctan \dfrac{-2-\sqrt{13}}{3} + k\pi$ sono di minimo relativo,

i punti $x = \arctan \dfrac{-2+\sqrt{13}}{3} + k\pi$ sono di massimo relativo.

b) Abbiamo $IE(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > 0,\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Procedendo come nel caso precedente, calcolando la derivata prima si ottiene

$$f'(x) = 3^{\tan x} \left(\frac{1}{(\cos x)^2} \right) \ln 3 + \frac{4}{x \ln 3},$$

essendo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in IE(f)$ concludiamo che f è strettamente crescente per ogni $x \in IE(f)$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 20}}$

Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della seguente funzione

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2).$$

Risulta

$$f'(x) \begin{cases} = 0, & \text{se } x = 1,\, x = 2, \\ > 0, & \text{se } x < 1,\, x > 2, \\ < 0, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

in particolare:

f è strettamente crescente in $]-\infty, 1]$ e in $[2, +\infty[$,

f è strettamente decrescente in $[1, 2]$,

e quindi $x = 2$ è un punto di minimo relativo per f e $x = 1$ è un punto di massimo relativo per f.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 21}}$

Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della seguente funzione

$$f(x) = e^{x^2} (x + 3)\,.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

La funzione f è derivabile perché prodotto di funzioni derivabili, quindi per studiare la monotonia di f basta studiare il segno della sua derivata prima; abbiamo

$$f'(x) = e^{x^2}\left(2x^2 + 6x + 1\right).$$

Quindi

$$f'(x) > 0 \text{ se e solo se } 2x^2 + 6x + 1 > 0$$

e

$$f'(x) < 0 \text{ se e solo se } 2x^2 + 6x + 1 < 0.$$

D'altra parte:

$$2x^2 + 6x + 1 > 0 \text{ se e solo se } x < \frac{-3-\sqrt{7}}{2},\ x > \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$$

e

$$2x^2 + 6x + 1 < 0 \text{ se e solo se } \frac{-3-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}.$$

Quindi :

f è strettamente crescente in $\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right]$ e in $\left[\frac{-3+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right[$,

f è strettamente decrescente in $\left[\frac{-3-\sqrt{7}}{2}, \frac{-3+\sqrt{7}}{2}\right]$,

$x = \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ è un punto di minimo relativo,

$x = \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ è un punto di massimo relativo.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 22}}$

Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la seguente equazione

$$\lambda\sqrt{x} = \ln x.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = \lambda\sqrt{x} - \ln x, \ \ x > 0,$$

risulta:

$$\varphi'(x) = \frac{\lambda\sqrt{x} - 2}{2x},$$

Pertanto, se $\lambda \leq 0$, allora $\varphi'(x) \leq 0$ per ogni $x > 0$, se $\lambda > 0$, allora $\varphi'(x) > 0$ se e solo se $x > \dfrac{4}{\lambda^2}$. Quindi:

a) se $\lambda \leq 0$ allora φ è strettamente decrescente e, poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$, φ si annulla in uno ed un solo punto x_λ; risulta inoltre $x_\lambda \in]0,1[$ se $\lambda < 0$ (perché $\varphi(1) = \lambda < 0$) e $x_\lambda = 1$ per $\lambda = 0$;

b) se $\lambda > 0$ allora φ ha nel punto $\dfrac{4}{\lambda^2}$ un minimo assoluto e risulta:

$$\min \varphi = \varphi\left(\frac{4}{\lambda^2}\right) = 2 - 2\ln\frac{2}{\lambda} = 2\ln\lambda + 2\ln\frac{e}{2}.$$

Concludendo si ha:

1. $\min\limits_{]0,+\infty[} \varphi > 0$ se e solo se $\lambda > 2e^{-1}$

in tal caso φ è positiva per ogni $x > 0$;

2. $\min\limits_{]0,+\infty[} \varphi = 0$ se e solo se $\lambda = 2e^{-1}$

in tal caso φ si annulla se e solo se $x = e^2$, il punto di minimo assoluto è infatti un punto di minimo forte nel senso che $\varphi(x) > \varphi\left(\dfrac{4}{\lambda^2}\right)$ per ogni $x \neq \dfrac{4}{\lambda^2}$;

3. $\min\limits_{]0,+\infty[} \varphi < 0$ se e solo se $0 < \lambda < 2e^{-1}$

in tal caso φ si annulla in un punto $x_\lambda \in \left]0, \dfrac{4}{\lambda^2}\right[$ e in un punto $y_\lambda \in \left]\dfrac{4}{\lambda^2}, +\infty\right[$.

ESERCIZIO 23

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, provare che per ogni $x \geq 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + x^\alpha.$$

SOLUZIONE

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = 1 + x^\alpha - (1 + x)^\alpha.$$

Risulta

$$\varphi(0) = 0$$

e

$$\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha(1 + x)^{\alpha-1} \geq 0 \text{ per ogni } x \geq 0.$$

Quindi φ è crescente in $[0, +\infty[$, in particolare

$$\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0,$$

cioè

$$(1 + x)^\alpha \leq 1 + x^\alpha.$$

ESERCIZIO 24

Discutere l'esistenza del massimo e del minimo assoluto della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2};$$

nel caso che esistano determinarli.

SOLUZIONE

Calcolando la derivata prima di f si ottiene

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Risulta

$$f'(x) > 0 \text{ se e solo se } -1 < x < 1,$$

$$f'(x) < 0 \text{ se e solo se } x < -1 \text{ oppure } x > 1$$

e

$$f'(x) = 0 \text{ se e solo se } x = -1,\ x = 1.$$

Quindi

f è strettamente crescente in $[-1, 1]$,

f è strettamente decrescente in $]-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty[$,

$x = -1$ è un punto di minimo relativo,

$x = 1$ è un punto di massimo relativo.

D'altra parte, poiché $f(1) > 0$, $f(x) \leq 0$ per $x \leq 0$, $f(x) < f(1)$ per $-1 < x < 1$, f decresce per $x > 1$, possiamo affermare che $x = 1$ è un punto di massimo assoluto per f e si ha $f(1) = \frac{1}{2}$.

Analogamente si procede per il minimo e si trova che $x = -1$ è un punto di minimo assoluto e si ha $f(1) = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 25}}$

Dopo averne provato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluto della seguente funzione

$$f(x) = (x-1)^4 (x-2)^3 .$$

nell'intervallo $[0, 3]$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Poiché f è continua, per il teorema di Weierstrass, essa ammette massimo e minimo nell'insieme limitato e chiuso $[0, 3]$; questi vanno ricercati tra i valori che f assume nei punti in cui f' si annulla e negli estremi 0, 3.

Calcolando la derivata prima di f si ottiene

$$f'(x) = 4(x-1)^3 (x-2)^3 + 3(x-1)^4 (x-2)^2$$

$$= (x-1)^3 (x-2)^2 [4(x-2) + 3(x-1)]$$

$$= (x-1)^3 (x-2)^2 (7x - 11).$$

Quindi

$$f'(x) = 0 \text{ se e solo se } x = 1,\ x = 2,\ x = \frac{11}{7}.$$

Ora, calcoliamo f nei punti $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = \frac{11}{7}$, $x = 3$. Abbiamo

$$f(0) = -8, f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 16, f\left(\frac{11}{7}\right) = -\left(\frac{4}{7}\right)^4 \left(\frac{3}{7}\right)^3 ;$$

possiamo dunque concludere che $x = 3$ è un punto di massimo assoluto e vale 16, $x = 0$ è un punto di minimo assoluto e vale -8.

ESERCIZIO 26*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

allora f ha minimo assoluto.

SOLUZIONE

Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, dalla definizione di limite si ha che esiste $a > 0$ tale che $f(x) > f(0)$ per ogni x tale che $|x| > a$. Ora, poiché f è continua, dal teorema di Weierstrass discende che f ammette minimo in $[-a, a]$, sia dunque $x_0 \in [-a, a]$ un punto di minimo per f, allora risulta $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in [-a, a]$ e poiché $0 \in [-a, a]$ si ha $f(0) \geq f(x_0)$, quindi $f(x) > f(0) \geq f(x_0)$ per ogni x tale che $|x| > a$ e quindi $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 27*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $f \geq 0$ ($f \leq 0$), se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

allora f ha massimo (minimo) assoluto.

SOLUZIONE

Supponiamo che $f \geq 0$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, dalla definizione di limite si ha che esiste $a > 0$ tale che $|f(x)| < f(0)$ per ogni x tale che $|x| > a$ ed essendo $f \geq 0$, si ha $f(x) < f(0)$. Ora, poiché f è continua, dal teorema di Weirstrass discende che f ammette massimo in $[-a, a]$, sia dunque $x_0 \in [-a, a]$ un punto di massimo per f, allora risulta $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in [-a, a]$ e poiché $0 \in [-a, a]$ si ha $f(0) \leq f(x_0)$, quindi $f(x) < f(0) \leq f(x_0)$ per ogni x tale che $|x| > a$ e quindi $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Analogamente nel caso $f(x) \leq 0$, si ha $|f(x)| < -f(0)$, cioè $f(x) > f(0)$ per ogni x tale che $|x| > a$, essendo f continua, dal teorema di Weirstrass discende che f ammette minimo in $[-a, a]$, sia dunque $x_0 \in [-a, a]$ un punto di minimo per f, allora risulta $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in [-a, a]$ e poiché $0 \in [-a, a]$ si ha $f(0) \geq f(x_0)$, quindi $f(x) > f(0) \geq f(x_0)$ per ogni x tale che $|x| > a$ e quindi $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 28

Trovare se esistono il massimo e il minimo assoluto della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{|x-1|} + |x-2|\,.$$

SOLUZIONE

Osserviamo che f è continua e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, quindi per l'esercizio 26, f non ha massimo assoluto, ma ha minimo assoluto. f non è derivabile in 1 e 2, inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + x - 2, & \text{se } x > 2, \\ \sqrt{x-1} - x + 2, & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ \sqrt{-x+1} - x + 2, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

Quindi:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + 1, & \text{se } x > 2, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - 1, & \text{se } 1 < x < 2, \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+1}} - ,1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Inoltre $f'(x)$ si annulla per $x = \frac{5}{4}$; in particolare il minimo di f è il minimo fra: $f(2) = 1$, $f(1) = 1$, $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$, dunque il minimo di f è 1.

ESERCIZIO 29

Trovare se esistono il massimo e il minimo assoluto della seguente funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} e^{-|x|}.$$

SOLUZIONE

Osserviamo che:

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e

$$f(x) = 0 \text{ se e solo se } x = 0.$$

Quindi $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, perciò 0 è il minimo assoluto ed è raggiunto per $x = 0$. Il massimo assoluto esiste perché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (si usa l'esercizio 27). Poiché f è pari ($f(x) = f(-x)$), basta considerare f in $]0, +\infty[$, in tale intervallo risulta $f(x) = \frac{x}{1+x} e^{-x}$, quindi:

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} e^{-x} - \frac{x}{1+x} e^{-x}$$

$$= \frac{1 - x\,(1+x)}{(1+x)^2} e^{-x} = -\frac{x^2 + x - 1}{(1+x)^2} e^{-x}.$$

In particolare $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + x - 1 = 0$, cioè, per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = 0 \text{ se e solo se } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Quindi

$$\max_{\mathbb{R}} f = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right) e^{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}.$$

ESERCIZIO 30

Dimostrare che se il numero reale a soddisfa

$$a \leq \frac{1}{x^3} + x^4, \text{ per ogni } x > 0,$$

allora risulta

$$a \leq \left(\frac{4}{3} \right)^{3/7} + \left(\frac{3}{4} \right)^{4/7}.$$

SOLUZIONE

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + x^4, \text{ per } x > 0.$$

f è continua per $x > 0$ e soddisfa $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, quindi essa ammette minimo (si usi la dimostrazione dell'esercizio 26), in particolare per l'ipotesi su a risulta

$$a \leq \min_{x>0} f(x).$$

Abbiamo

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} + 4x^3 = 0 \text{ se e solo se } x = \left(\frac{3}{4} \right)^{1/7}.$$

Quindi nel punto $x = \left(\frac{3}{4} \right)^{1/7}$ la funzione f ha minimo e questo è uguale a:

$$f\left(\left(\frac{3}{4} \right)^{1/7} \right) = \left(\frac{4}{3} \right)^{3/7} + \left(\frac{3}{4} \right)^{4/7}.$$