

Aste sollecitate da taglio (e momento)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



La trattazione approssimata di *Jourawsky*



Sommario

Si analizza il problema del solido di *de Saint Venant* sollecitato a taglio. Come si vedrà meglio nel seguito, la sollecitazione tagliante è associata a quella flessionale.

La risoluzione esatta del problema di *de Saint Venant* in esame non è immediata e non rientra negli scopi del presente corso. *De Saint Venant* ha pubblicato la soluzione del problema in esame nella memoria del 1856 (*Journal de Mathématiques*), dove ha tra l'altro osservato che in presenza di sollecitazioni taglianti cade l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane.

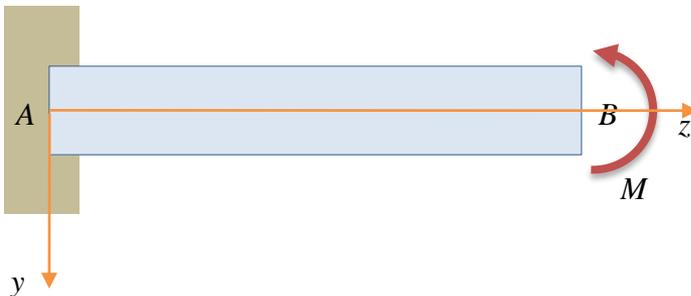
Nel seguito verrà descritta una trattazione (dovuta a *Jourawsky*) che, seppur approssimata, è rispettosa delle equazioni di equilibrio e fornisce risultati in genere accettabili nelle normali applicazioni strutturali.

Al fine di introdurre il problema in esame, prima di effettuare una trattazione analitica del problema saranno descritti degli esempi che possono anche essere facilmente verificati sperimentalmente.



Introduzione

Si consideri un'asta incastrata ad un estremo e sollecitata, in corrispondenza dell'altro estremo, da un momento parallelo all'asse x , principale d'inerzia delle sezioni trasversali della trave.



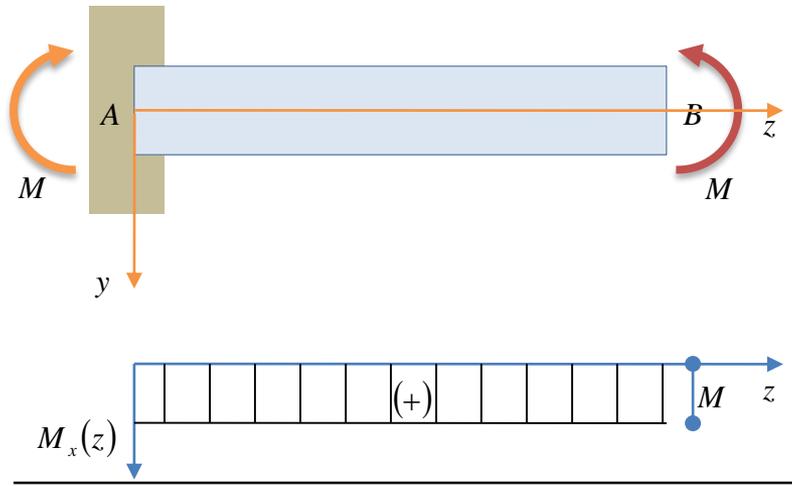


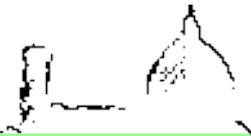
Introduzione

È immediato verificare che il sistema in esame è isostatico e che, per l'equilibrio globale, l'incastro reagisce solo con una coppia uguale ed opposta a quella applicata: l'asta in esame è allora caricata da due coppie di estremità, tali che l'asse momento coincida con un asse principale d'inerzia delle sezioni trasversali.

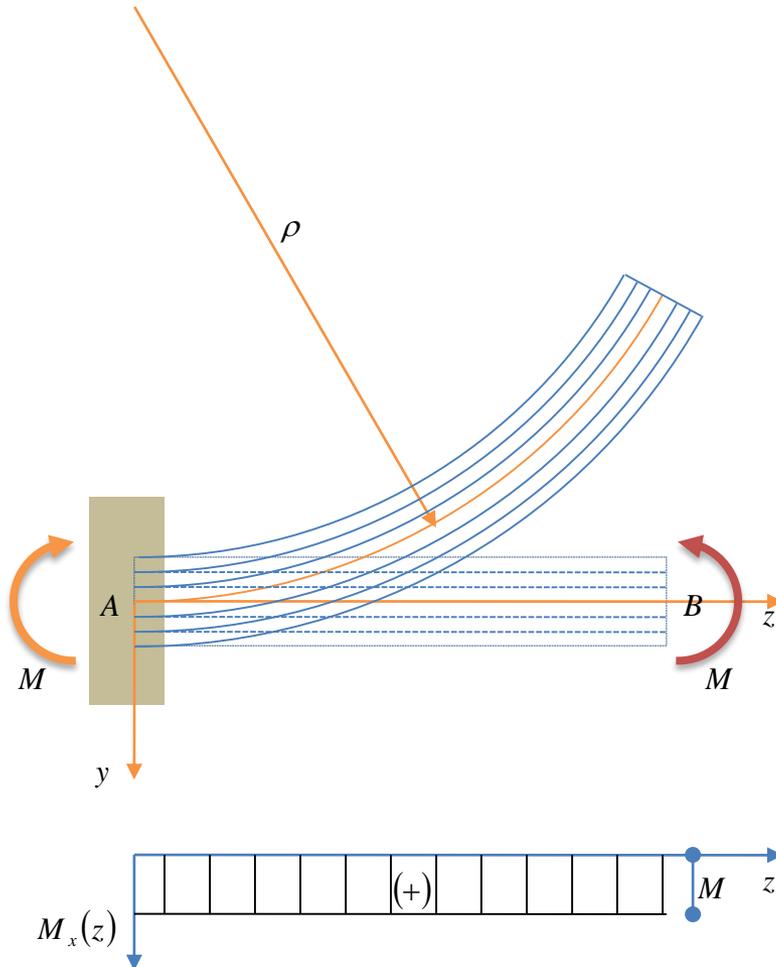
L'unica sollecitazione non nulla presente nella trave in esame è un momento flettente costante

$$M_x(z) = M$$





Introduzione



La trave in esame è allora sollecitata da una flessione retta costante. Per quanto ottenuto in relazione al problema della flessione retta, l'asse della trave si deforma secondo una curva (parabolica) approssimabile con un arco di circonferenza di raggio

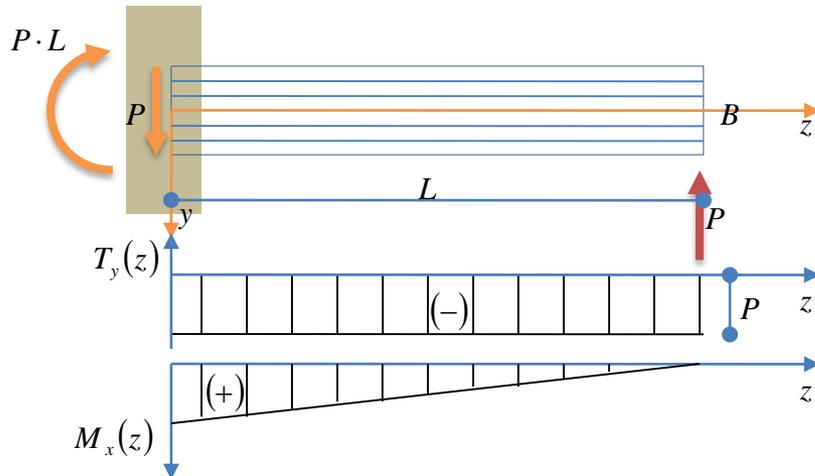
$$\rho = \frac{EI_x}{M}$$

Inoltre le sezioni trasversali si mantengono piane e quindi le fibre longitudinali si deformano secondo archi di circonferenza concentrici: se la trave fosse costituita da elementi paralleli alla linea d'asse (es. tavole di legno non incollate tra loro), questi si deformerebbero secondo archi concentrici e non avrebbero scorrimenti relativi nella direzione dell'asse ($\gamma_{yz} = 0$).



Introduzione

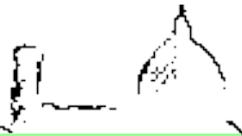
Consideriamo adesso una trave incastrata ad un estremo e sollecitata da una forza parallela all'asse y applicata in corrispondenza dell'estremo libero. È facile verificare che le reazioni dell'incastro sono quelle indicate in figura. Le caratteristiche della sollecitazione presenti nella trave sono date dalle seguenti relazioni (si riportano solo i termini non nulli)



$$T_y(z) = T_y^\ell = -P$$

$$M_x(z) = M_x^\ell - (L-z)T_y^0 = P(L-z)$$

La trave è allora sollecitata da una flessione retta avente andamento lineare e da una sollecitazione tagliante costante. *Come si vedrà meglio nelle prossime slide, il taglio è sempre associato alla flessione.*

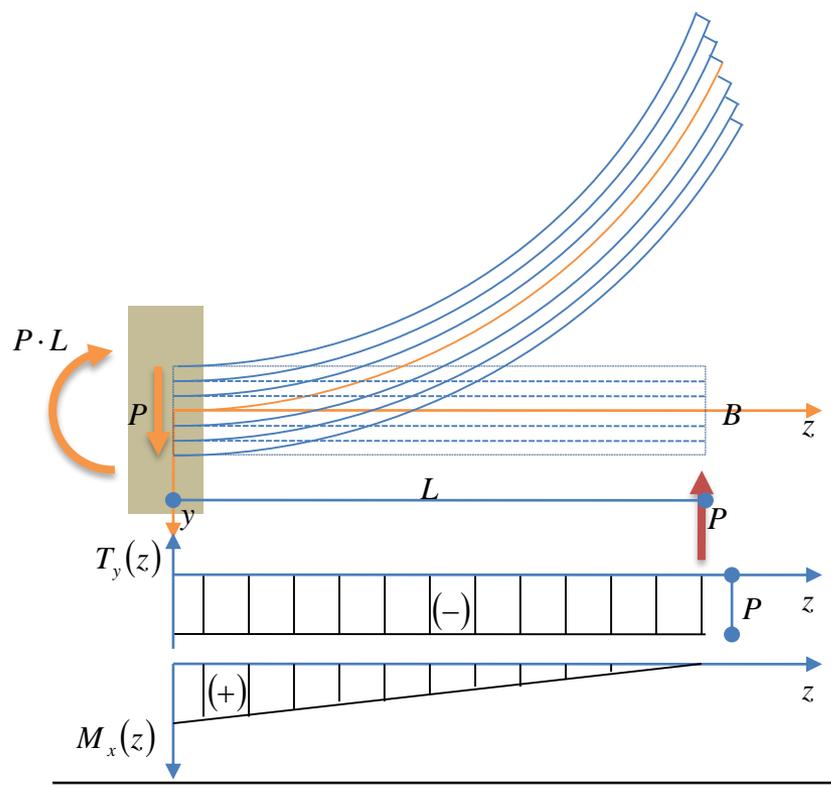


Introduzione

È facile verificare che in questo caso (ossia quando oltre ad un momento flettente è presente anche una sollecitazione tagliante), se la trave fosse costituita da elementi paralleli alla linea d'asse questi avrebbero degli scorrimenti relativi in corrispondenza delle superfici di contatto come indicato in figura.

L'allievo può verificare quanto è stato detto effettuando un semplice esperimento su una trave realizzata sovrapponendo degli elementi "flessibili" come ad esempio dei righelli di plastica per disegno.

Visto che gli scorrimenti di cui parliamo non sono presenti in una trave semplicemente inflessa, essi devono essere dovuti alla sollecitazione tagliante.

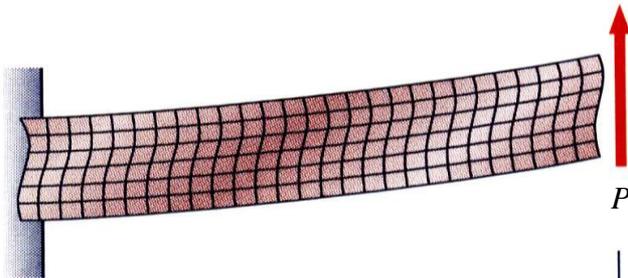




Introduzione

Ovviamente, se la trave in esame è monolitica, non si hanno gli spostamenti relativi descritti nella precedente slide, ma esiste in ogni caso, nei punti materiali del solido, la tendenza agli scorrimenti indotti dalla sollecitazione tagliante.

In particolare, per la simmetria del tensore di deformazione e del tensore di tensione, nei punti materiali del solido, a causa della sollecitazione tagliante descritta in queste slide, si avranno degli scorrimenti angolari (e quindi delle tensioni tangenziali) sia in corrispondenza di piani paralleli alla linea d'asse, sia in corrispondenza di piani contenenti la sezione trasversale.





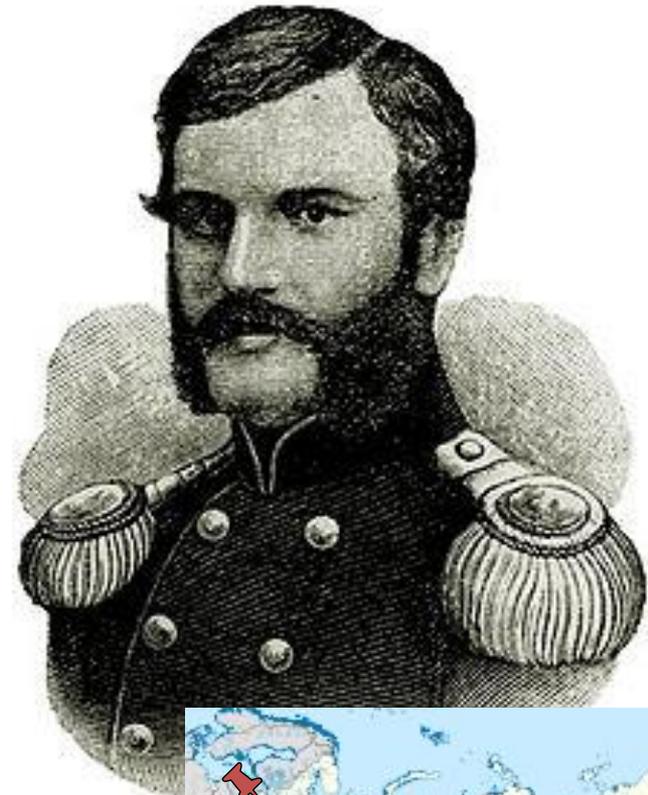
La trattazione di *Jourawsky*

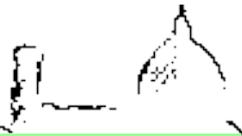
A questo punto procediamo alla descrizione della trattazione di *Jourawsky* per la stima delle tensioni tangenziali (e degli scorrimenti angolari) presenti in una trave sollecitata a taglio. Come si è detto tale teoria è approssimata, ma fornisce risultati accettabili per le particolari applicazioni ingegneristiche. Nelle normali applicazioni strutturali infatti, le tensioni (e gli scorrimenti angolari) dovuti al taglio sono in genere di entità modesta rispetto a quelle indotte dalle altre caratteristiche della sollecitazione e una loro valutazione approssimata è in genere accettabile nella pratica tecnica.



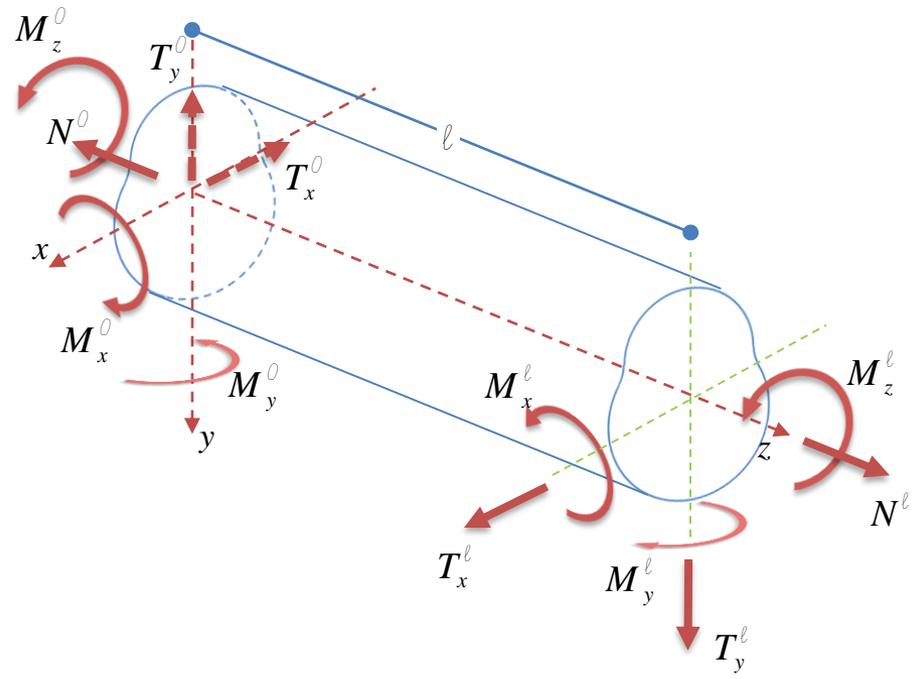
Dmitrij Ivanovič Žuravskij

- N. Oblast' di Kursk, 17 dicembre 1821
- M. San Pietroburgo, 30 novembre 1891
- ingegnere fortemente impegnato nella sua professione
- diplomato nel 1842 presso l'Istituto di ingegneria delle vie di comunicazione di San Pietroburgo (inizialmente di scuola francese, ma a quel tempo già affidato a studiosi russi)
- 1842: assegnato al progetto della ferrovia tra San Pietroburgo e Mosca
- 1844: gli fu affidato il progetto dell'opera più importante della linea, il ponte sul fiume Werebia; durante la costruzione di questo ponte dovette utilizzare travi lignee, scarsamente resistenti a taglio nella direzione parallela alle fibre, e si rese quindi conto dell'importanza della sollecitazione tangenziale e della necessità di non trascurarne gli effetti;
- Jouravsky sviluppò la sua trattazione prima che *de Saint-Venant* fornisse la soluzione esatta; lo stesso *de Saint Venant* ha riconosciuto il valore della trattazione di *Jouravsky*, utilizzata ancora oggi nella pratica tecnica





La trattazione di Jourawsky



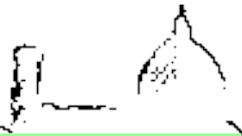
Si consideri un'asta sollecitata solo in corrispondenza delle basi. La più generale condizione di carico è in questo caso quella indicata in figura.

Vogliamo determinare le azioni di estremità presenti in un'asta sollecitata da azioni taglianti.

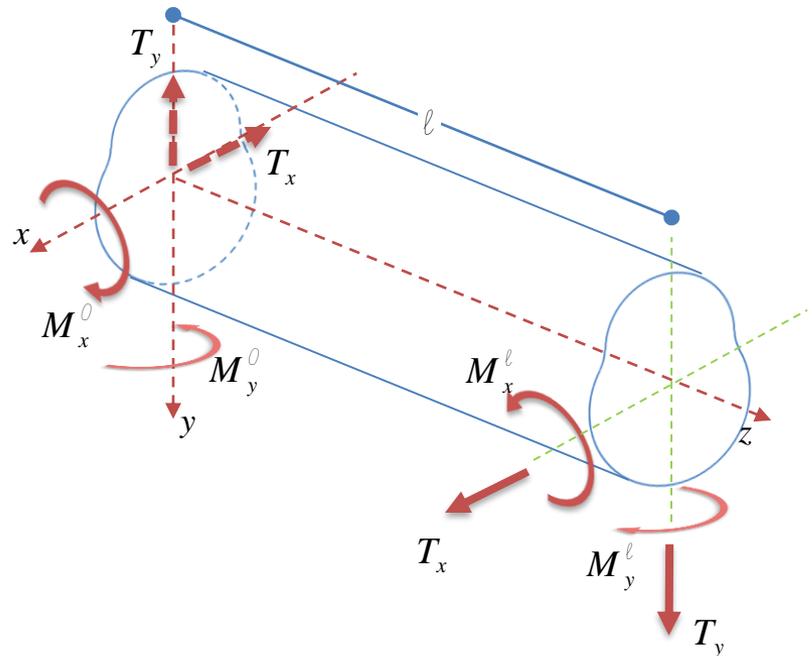
Le forze indicate in figura devono soddisfare le equazioni di equilibrio globale (SV7) riportate di seguito

$$\begin{aligned}
 N^l &= N^0 = N & T_x^l &= T_x^0 = T_x & T_y^l &= T_y^0 = T_y \\
 M_z^l &= M_z^0 & M_x^l &= M_x^0 + l T_y^0 & M_y^l &= M_y^0 - l T_x^0
 \end{aligned} \quad (SV7)$$

Gli effetti delle azioni assiali e torcenti sono stati analizzati nelle precedenti lezioni e possono essere ipotizzati nulli senza violare le precedenti equazioni di equilibrio. Dalle equazioni di equilibrio alla rotazione attorno agli assi x ed y si evince invece che la presenza delle azioni taglianti T_x e T_y implica anche la presenza di momenti M_x ed M_y .



La trattazione di Jourawsky



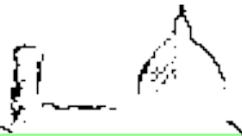
In generale, allora, in una trave sollecitata da azioni taglianti di estremità sono anche presenti delle azioni flettenti che devono soddisfare le seguenti equazioni di equilibrio globale

$$\begin{aligned}
 T_y^\ell &= T_y^0 = T_y & T_x^\ell &= T_x^0 = T_x \\
 M_x^\ell &= M_x^0 + \ell T_y^0 & M_y^\ell &= M_y^0 - \ell T_x^0
 \end{aligned}
 \tag{86}$$

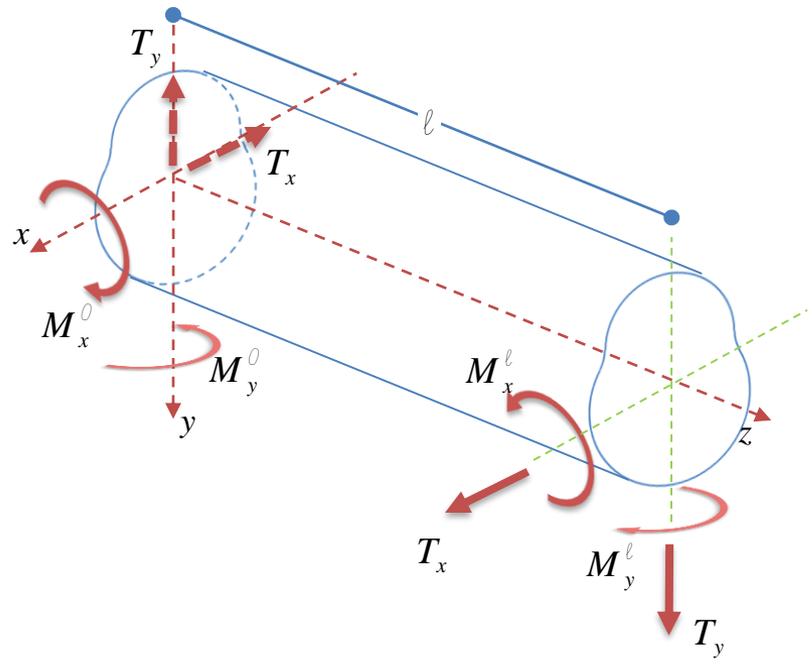
A tali azioni corrispondono le seguenti caratteristiche della sollecitazione (SV7.2)

$$\begin{aligned}
 N(z) &= 0 & T_x(z) &= T_x & T_y(z) &= T_y \\
 M_z(z) &= 0 & M_y(z) &= M_y^0 - z T_x^0 & M_x(z) &= M_x^0 + z T_y^0
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

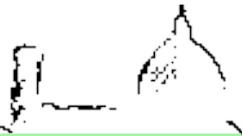
Si ricorda che, per ipotesi, gli assi x ed y del sistema di riferimento considerato sono paralleli agli assi principali d'inerzia della sezione trasversale (costante).



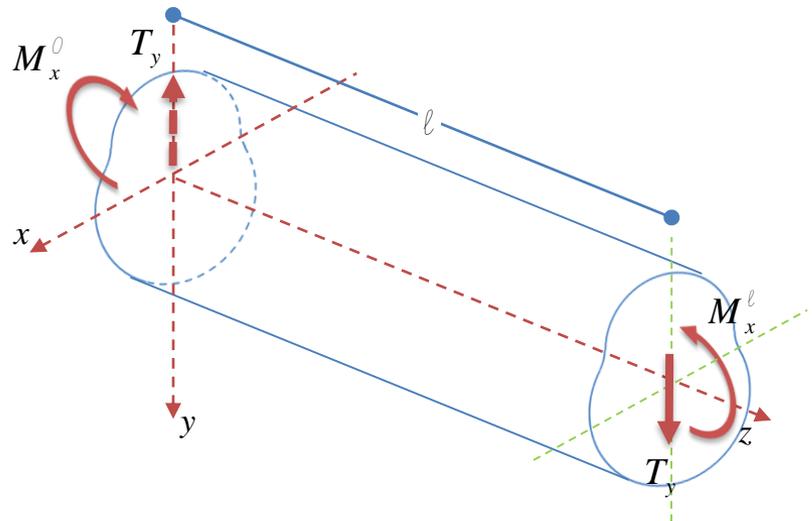
La trattazione di Jourawsky



Dalle (87) si evince che alla sollecitazione tagliante T_x è associato un momento flettente M_y , mentre alla sollecitazione tagliante T_y è associato un momento flettente M_x . I due problemi sono allora disaccoppiati e, per il principio di sovrapposizione degli effetti, possono essere analizzati separatamente in quanto l'effetto della presenza contemporanea delle due componenti taglienti è uguale alla somma degli effetti prodotti dalle singole componenti taglienti considerate separatamente.



La trattazione di Jourawsky



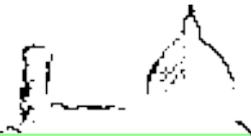
Consideriamo allora, senza perdere di generalità, una trave sollecitata da due forze di estremità uguali ed opposte, di modulo T_y , parallele all'asse y come indicato in figura. Per le (86), sulle basi della trave in esame devono anche essere presenti delle coppie agenti sul piano yz tali che

$$M_x^l = M_x^0 + lT_y$$

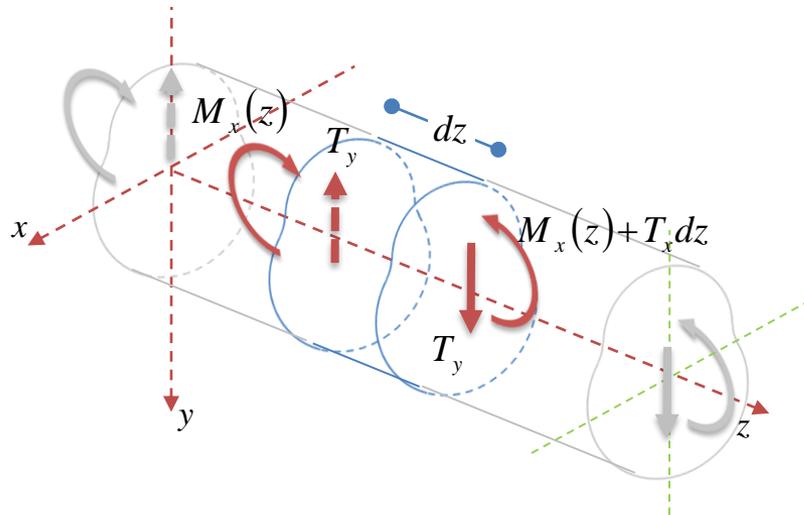
Inoltre, per le (87), le caratteristiche della sollecitazione presenti in una generica sezione trasversale, il cui baricentro ha ascissa z , sono pari a

$$\begin{aligned} T_y(z) &= T_y \\ M_x(z) &= M_x^0 + zT_y \end{aligned} \tag{88}$$

La trave in esame è allora sollecitata da un taglio T_y costante e da una flessione (retta) M_x variabile linearmente lungo l'asse.



La trattazione di Jourawsky



Consideriamo adesso due sezioni trasversali poste a distanza infinitesima: la prima avente ascissa z , la seconda avente ascissa $z+dz$ come indicato in figura. Le caratteristiche della sollecitazione presenti in tali sezioni si calcolano dalla (88) come segue

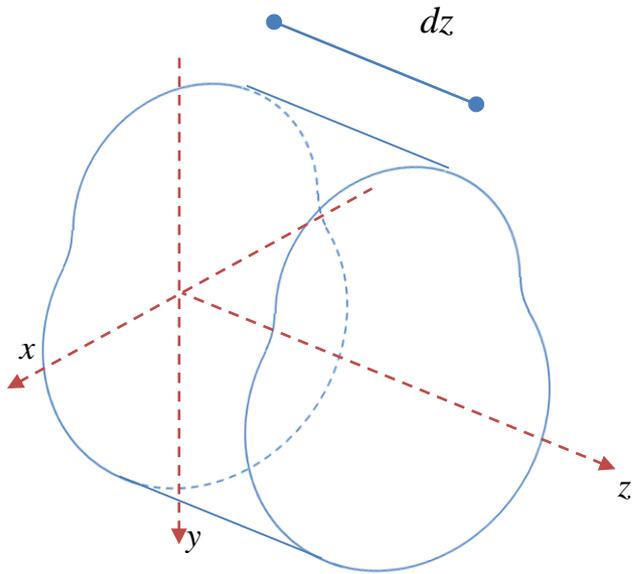
$$\begin{aligned} T_y(z) &= T_y(z+dz) = T_y \\ M_x(z) &= M_x^0 + zT_y \\ M_x(z+dz) &= M_x^0 + zT_y + T_y dz = M_x(z) + T_y dz \end{aligned} \quad (89)$$

La tensione normale σ_z presente nei punti materiali delle sezioni in esame si calcola mediante la formula di Navier (28) come segue

$$\sigma_z(z, y) = \frac{M_x(z)}{I_x} y \quad \sigma_z(z+dz, y) = \frac{M_x(z)}{I_x} y + \frac{T_y}{I_x} y dz = \sigma_z(z, y) + \frac{T_y}{I_x} y dz \quad (90)$$



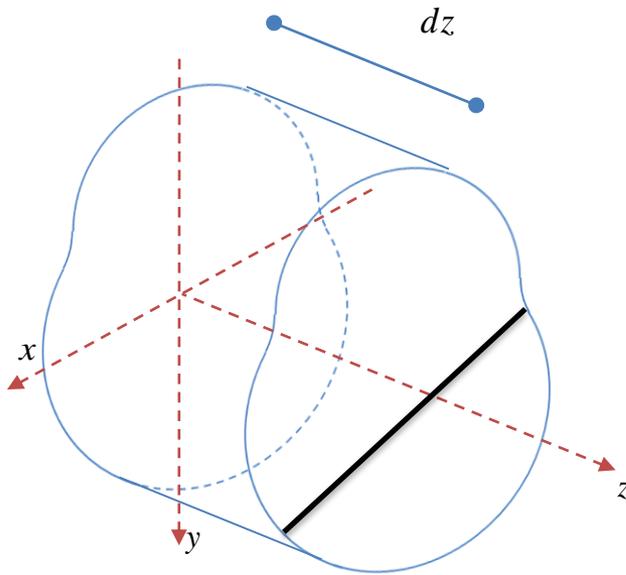
La trattazione di *Jourawsky*



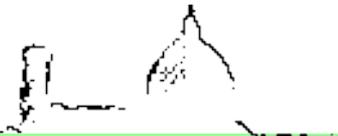
In figura è riportato un ingrandimento del tratto di trave (di lunghezza infinitesima) in esame.



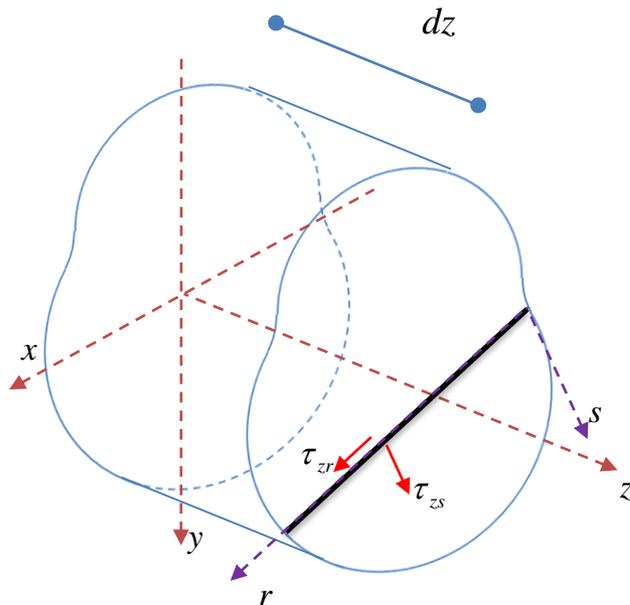
La trattazione di *Jourawsky*



Consideriamo un insieme di punti, sulla faccia di normale $+z$, allineati secondo un segmento comunque inclinato (e quindi non necessariamente parallelo ad uno degli assi principali della sezione e non necessariamente passante per il baricentro). Possiamo immaginare che, a causa della sollecitazione tagliante, oltre alle tensioni normali su tali punti possono essere presenti anche delle tensioni tangenziali.



La trattazione di Jourawsky

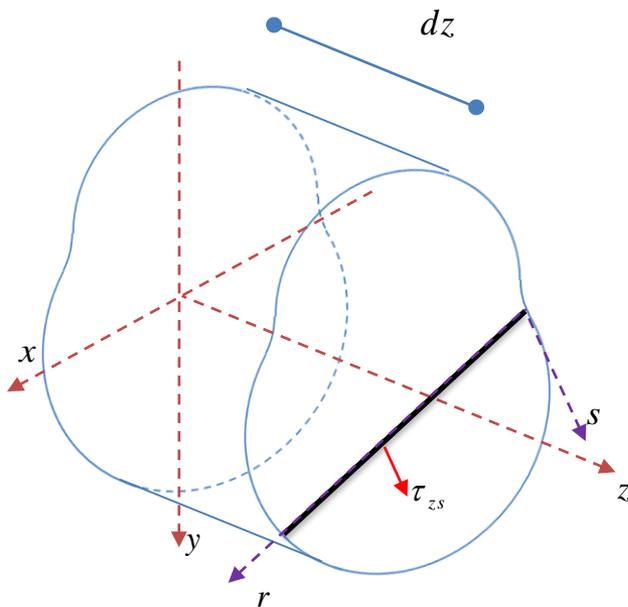


Consideriamo un insieme di punti, sulla faccia di normale $+z$, allineati secondo un segmento comunque inclinato (e quindi non necessariamente parallelo ad uno degli assi principali della sezione e non necessariamente passante per il baricentro). Possiamo immaginare che, a causa della sollecitazione tagliante, oltre alla tensioni normali su tali punti possono essere presenti anche delle tensioni tangenziali.

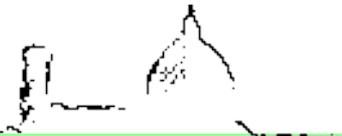
Introduciamo i due assi r ed s , ortogonali tra loro, indicati in figura. In un generico punto della corda in esame potranno allora essere presenti due componenti di tensione tangenziale τ_{zr} e τ_{zs} .



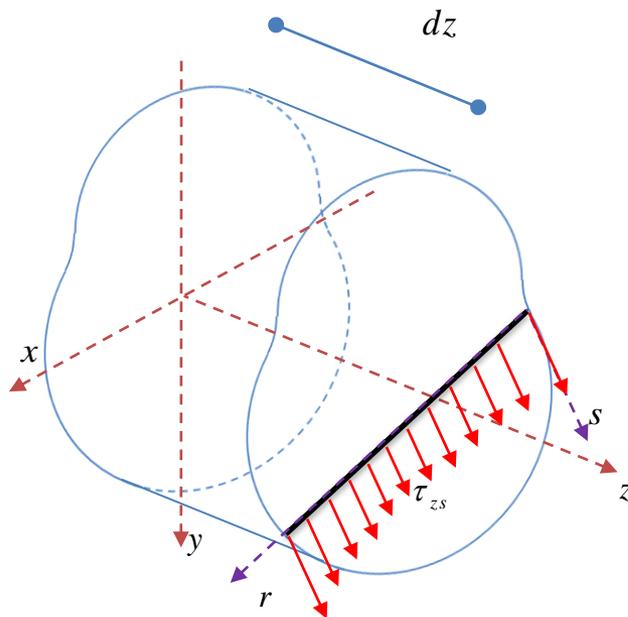
La trattazione di *Jourawsky*



Consideriamo per ora solo le componenti di tensione τ_{zs} ortogonali alla corda in esame.



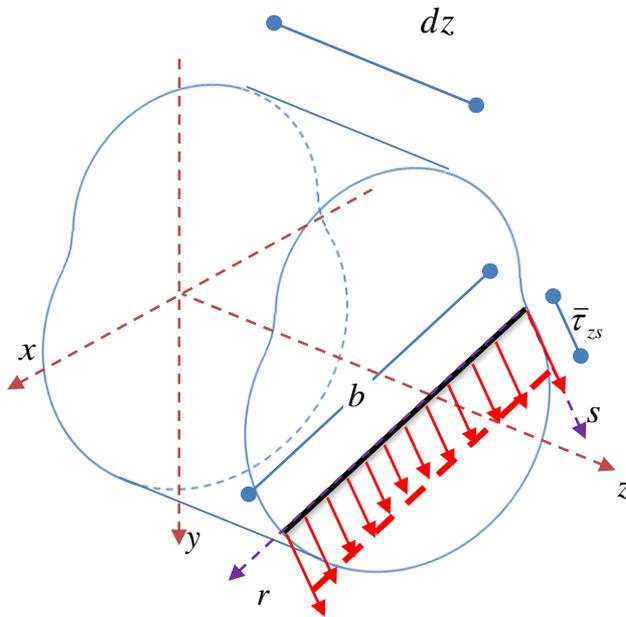
La trattazione di *Jourawsky*



Consideriamo per ora solo le componenti di tensione τ_{zs} ortogonali alla corda in esame. In generale tale componente di tensione può essere variabile sulla corda, ad esempio come indicato in figura. Attraverso la teoria che stiamo descrivendo non siamo in grado di determinare l'effettivo valore delle componenti di tensione tangenziale presenti in un punto materiale,



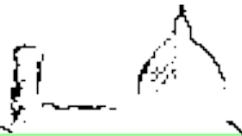
La trattazione di Jourawsky



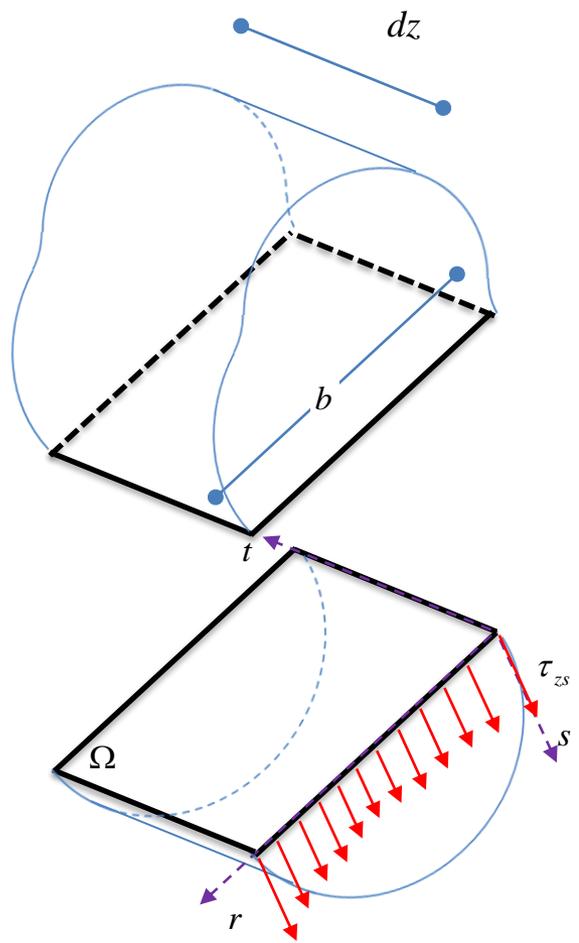
Consideriamo per ora solo le componenti di tensione τ_{zs} ortogonali alla corda in esame. In generale tale componente di tensione può essere variabile sulla corda, ad esempio come indicato in figura. Attraverso la teoria che stiamo descrivendo non siamo in grado di determinare l'effettivo valore delle componenti di tensione tangenziale presenti in un punto materiale, ma solo il valore medio della componente di tensione τ_{zs} presente in un insieme di punti allineati definito come segue:

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{1}{b} \int_0^b \tau_{zs} dr \quad (91)$$

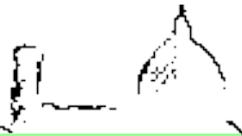
dove b rappresenta la lunghezza della corda in esame.



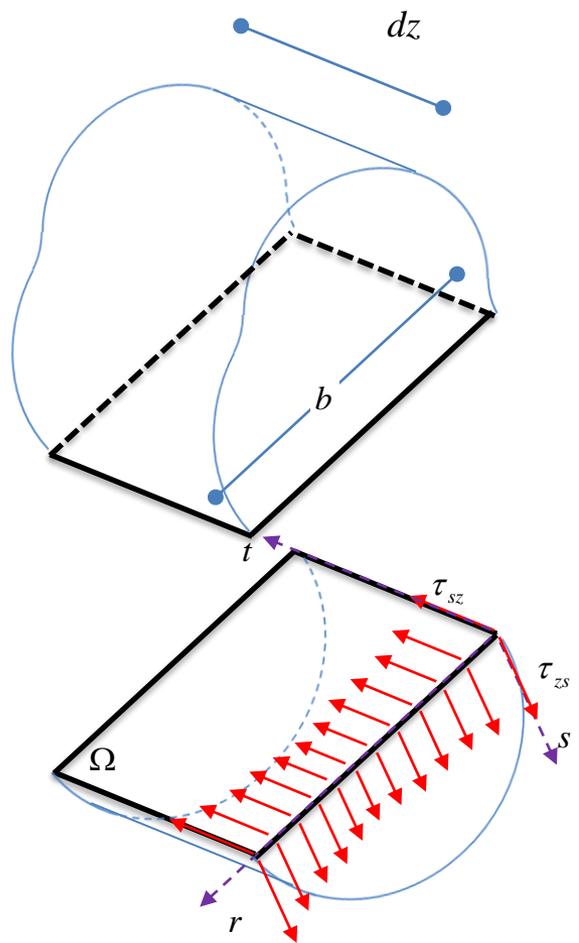
La trattazione di Jourawsky



Immaginiamo di separare il concio di trave in esame in due parti attraverso un piano parallelo all'asse z e contenente la corda in esame come indicato in figura. Indichiamo con Ω il piano di sezione ed introduciamo l'asse t , parallelo all'asse z ed avente origine in corrispondenza dell'intersezione tra gli assi r ed s come indicato in figura.



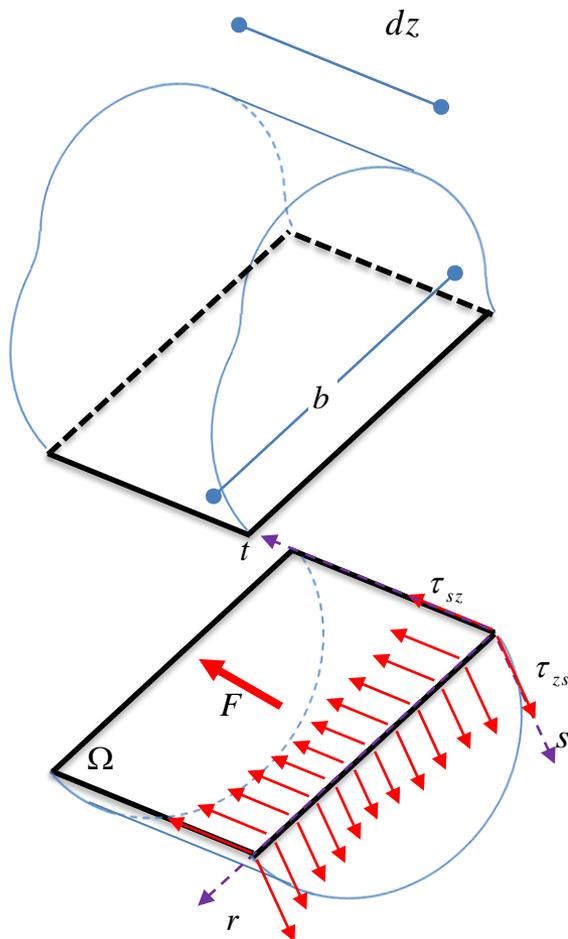
La trattazione di Jourawsky



Per la simmetria del tensore di tensione, in corrispondenza dei punti materiali appartenenti alla corda in esame sono presenti anche delle tensioni $\tau_{sz} = \tau_{zs}$ paralleli all'asse z e ortogonali alla corda come indicato in figura.



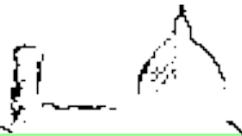
La trattazione di Jourawsky



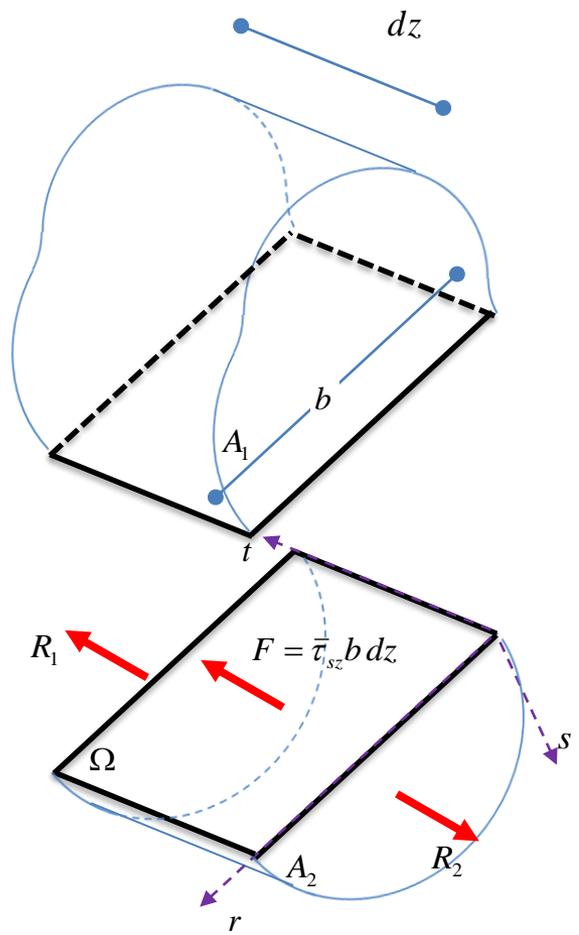
Per la simmetria del tensore di tensione, in corrispondenza dei punti materiali appartenenti alla corda in esame sono presenti anche delle tensioni $\tau_{sz} = \tau_{zs}$ paralleli all'asse z e ortogonali alla corda come indicato in figura.

Ricordando che sul tratto di trave in esame è presente una sollecitazione tagliante costante (τ_{sz} è indipendente da z) ed utilizzando la (91), il modulo della risultante di tali tensioni agenti sulla faccia Ω si calcola come segue:

$$F = \int_{\Omega} \tau_{sz} d\Omega = \int_0^{dz} \int_0^b \tau_{sz} dr dt = \bar{\tau}_{zs} b dz \quad (92)$$



La trattazione di Jourawsky



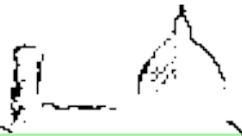
Indichiamo con A_1 e con A_2 rispettivamente le porzioni di sezione trasversale che si trovano al di sopra ed al di sotto della corda. Utilizzando le (90), il modulo della risultante delle tensioni normali σ_z presenti sulle due facce di area A_2 di normale $+z$ e $-z$ si calcola come segue

$$R_1 = \int_{A_2} \sigma_z(z, y) dA_2 = \frac{M_x(z)}{I_x} \int_{A_2} y dA_2 \quad (93)$$

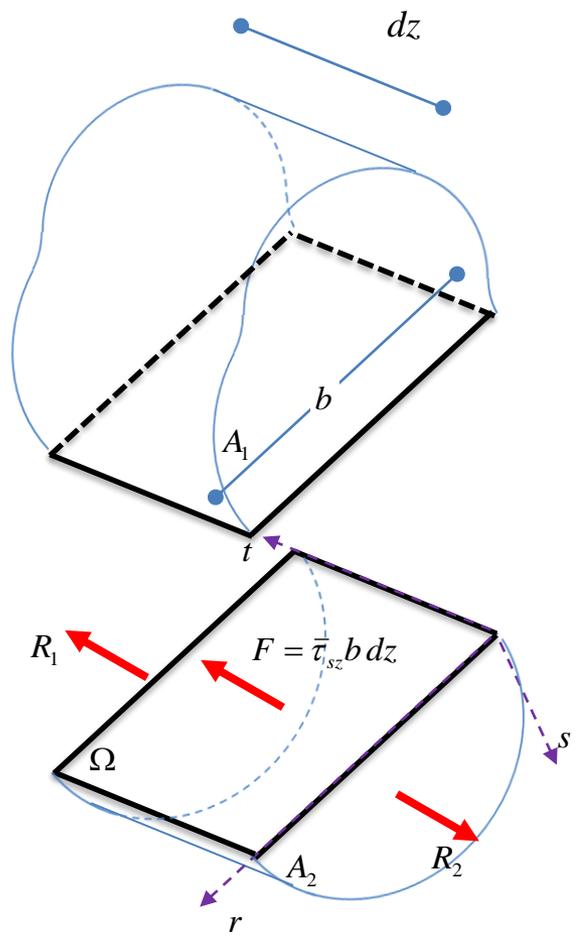
$$R_2 = \int_{A_2} \sigma_z(z + dz, y) dA_2 = \frac{M_x(z)}{I_x} \int_{A_2} y dA_2 + \frac{T_y}{I_x} dz \int_{A_2} y dA_2$$

Osservando che $\int_{A_2} y dA_2$ rappresenta il momento statico dell'area A_2 rispetto all'asse x , che si indica con $S_x^{(A_2)}$, la seconda delle (93) diventa

$$R_2 = R_1 + \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{I_x} dz \quad (94)$$



La trattazione di Jourawsky



Dall'equilibrio alla traslazione nella direzione z della porzione di trave in esame si ottiene

$$-R_1 - F + R_2 = 0 \rightarrow \bar{\tau}_{zs} b dz = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{I_x} dz \quad (95)$$

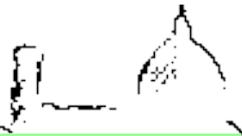
$$\rightarrow \bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x}$$

Ricordando che l'asse x è baricentrico si ha

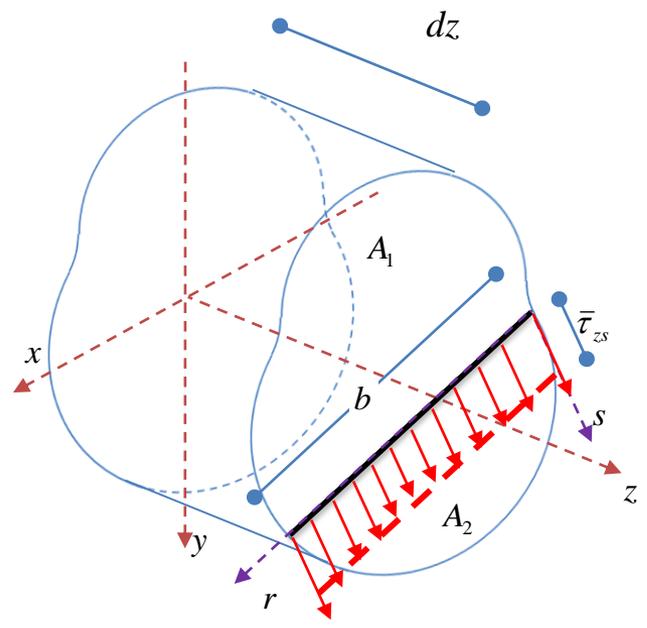
$$S_x = 0 \rightarrow S_x^{(A_1)} + S_x^{(A_2)} = 0 \rightarrow S_x^{(A_2)} = -S_x^{(A_1)}$$

e pertanto la (95) si può scrivere indifferentemente nelle due seguenti forme:

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (96)$$



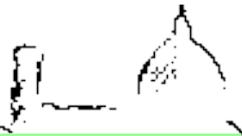
La trattazione di Jourawsky



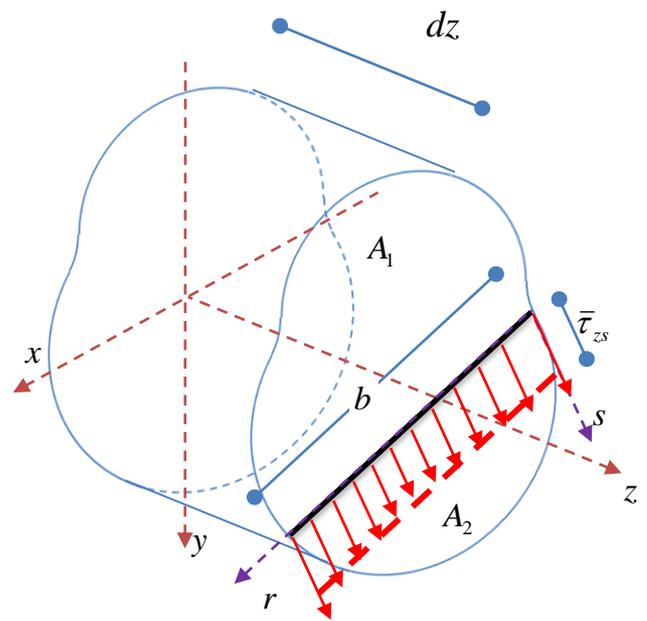
$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (96)$$

La (96) è nota con il nome di "formula di Jourawsky" e permette di determinare il valore medio delle componenti di tensione tangenziale presenti in punti di una sezione trasversale allineati su una generica corda. La direzione della componente di tensione tangenziale determinata attraverso la (96) è quella ortogonale alla corda in esame.

Per come è stata determinata, **se dalla (96) si ottengono valori positivi, allora la tensione tangenziale media è "entrante" nella porzione di sezione trasversale che è stata considerata per il calcolo del momento statico nella formula di Jourawsky.**



La trattazione di Jourawsky



Assumendo per il materiale un comportamento elastico lineare isotropo, dalla (96) è possibile determinare gli scorrimenti angolari medi come segue

$$\bar{\gamma}_{zs} = \frac{1}{G} \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{1}{G} \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (97)$$

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (96)$$



Università degli Studi di Firenze

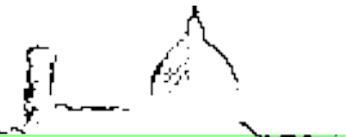
Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni
Docente: Mario Fagone
Argomento: Il solido di de Saint-Venant:
Taglio (e flessione), Jourawsky



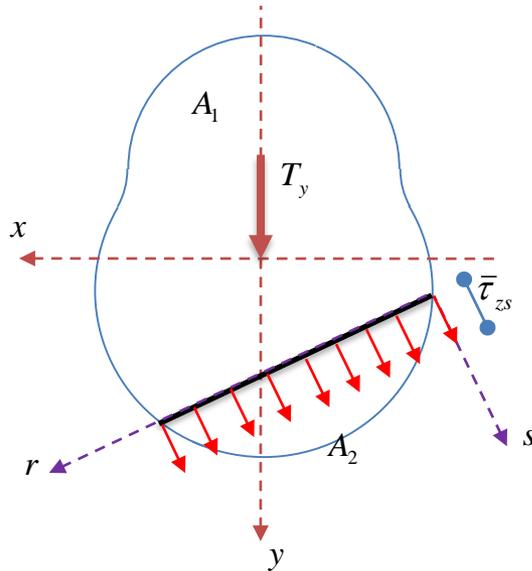
Facoltà di Architettura

Aste sollecitate da taglio (e momento)

Osservazioni sulla trattazione
approssimata di *Jourawsky*



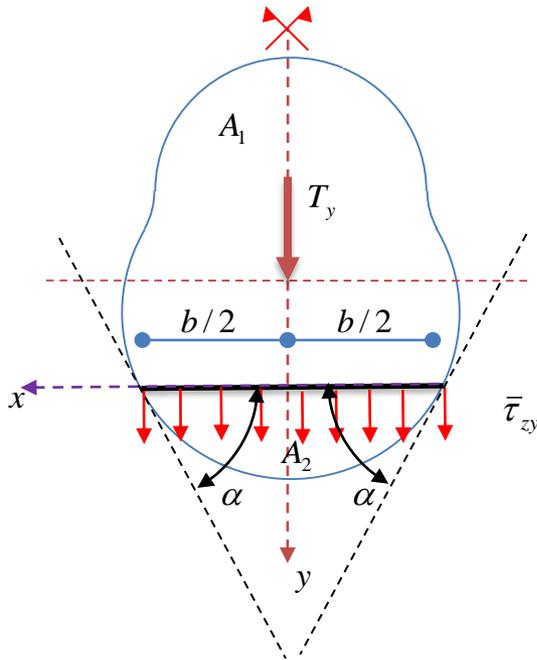
La trattazione di Jourawsky: osservazione 1



Consideriamo una generica sezione trasversale della trave in esame. Le tensioni tangenziali medie calcolate attraverso la formula di Jourawsky palesemente non soddisfano le condizioni di equilibrio sul mantello che impongono che, in corrispondenza del bordo di una sezione, la risultante delle tensioni tangenziali sia tangente al contorno (v. SV3). Assumendo valida allora la soluzione di Jourawsky, in una generica corda possono essere presenti delle tensioni τ_{zr} che devono essere tali da soddisfare l'equazione di equilibrio al contorno (SV3) e le equazioni indefinite di equilibrio (SV1).



La trattazione di Jourawsky: osservazione 1



α = angolo compreso tra la corda e la tangente al contorno nei punti estremi della corda

Consideriamo ad esempio una sezione dotata di un asse di simmetria e caricata da una sollecitazione tagliante parallela a tale asse. La tensione tangenziale media presente su una generica corda ortogonale all'asse di simmetria si calcola attraverso la formula di Jourawsky come segue

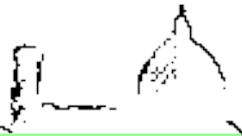
$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x}$$

Affinché sia soddisfatta la condizione di equilibrio al contorno (SV3), in corrispondenza degli estremi della corda in esame deve essere presente una tensione tangenziale τ_{zx} pari a

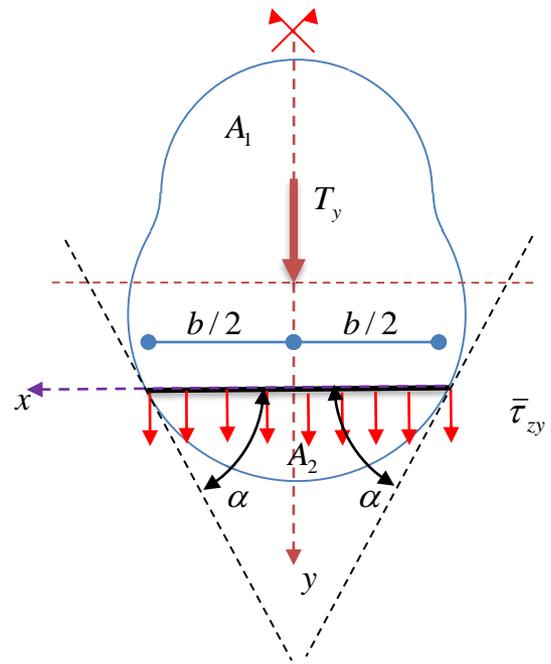
$$\tau_{zx}(b/2, y) = -\bar{\tau}_{zy} / \tan \alpha$$

$$\tau_{zx}(-b/2, y) = \bar{\tau}_{zy} / \tan \alpha$$

(98)



La trattazione di Jourawsky: osservazione 1



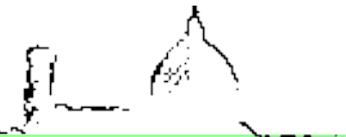
In virtù della formula di Navier (28) e della formula di Jourawsky (96), le tensioni σ_z e τ_{zy} sono indipendenti dalla x e quindi, dalla terza delle (SV1) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} = 0$$

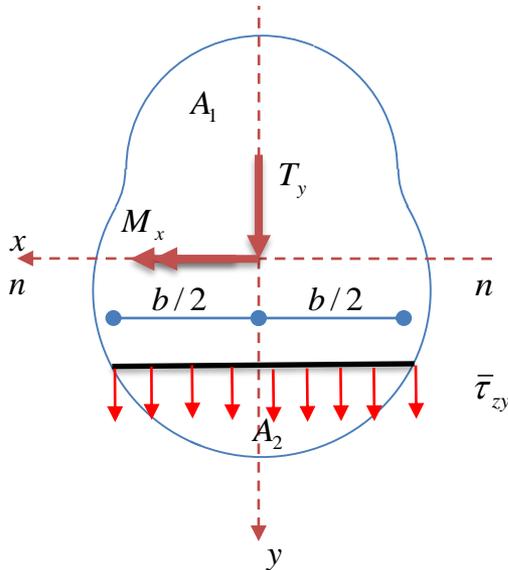
Ne consegue che le tensioni tangenziali τ_{zx} variano linearmente con x sulla corda. Visto che devono soddisfare le (98) la loro espressione è la seguente

$$\tau_{zx} = -\frac{2x}{b \tan \alpha} \bar{\tau}_{zy} \quad (99)$$

Con un procedimento analogo si dimostra che, su una corda comunque inclinata si ha che le componenti di tensione tangenziale parallele alla corda variano con legge parabolica.



La trattazione di Jourawsky: osservazione 2



Consideriamo una trave sollecitata da una azione tagliante T_y parallela ad un asse principale d'inerzia della sezione trasversale come indicato in figura. Ad essa è associata una flessione retta per la quale l'asse neutro coincide con l'asse x (baricentrico). Il valore delle tensioni tangenziali medie $\bar{\tau}_{zy}$ presenti in una corda ortogonale alla direzione del taglio si calcola dalla (96) come segue:

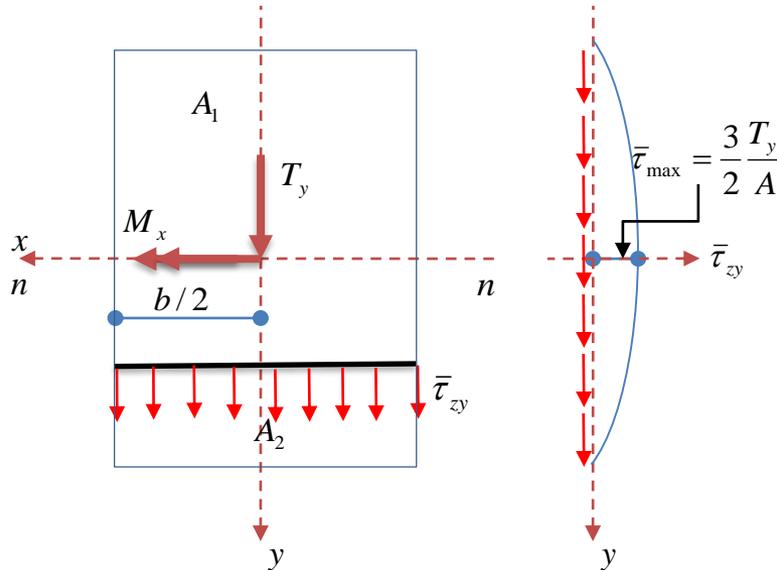
$$\bar{\tau}_{zs}(y) = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}(y)}{b(y) I_x}$$

Tale valore dipende dall'ascissa y della corda in esame attraverso la lunghezza della corda $b(y)$ ed il momento statico. La massima tensione tangenziale si ha in corrispondenza dell'ascissa tale che

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{zs}(y)}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{1}{b(y)} \frac{\partial S_x^{(A_1)}(y)}{\partial y} - \frac{S_x^{(A_1)}(y)}{b(y)^2} \frac{\partial b(y)}{\partial y} = 0$$



La trattazione di Jourawsky: osservazione 2



Per sezioni trasversali aventi larghezza della corda costante, anche a tratti, come ad esempio per le sezioni rettangolari, a "T", a "doppio T", a "C", etc., la precedente relazione si semplifica come segue:

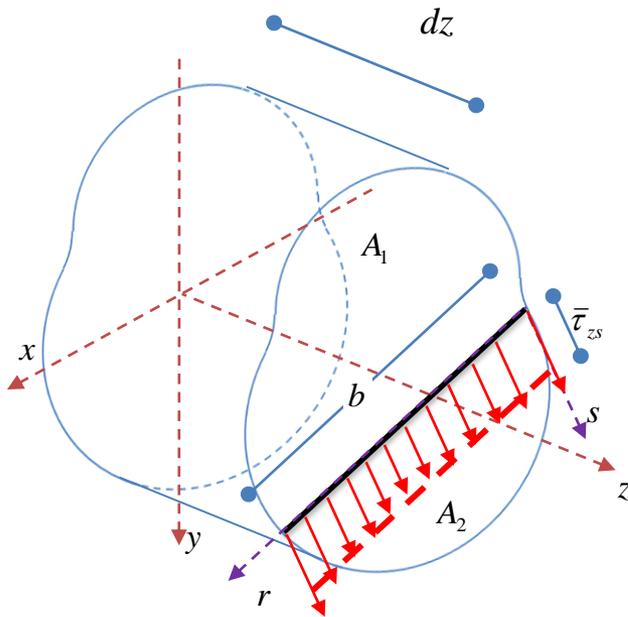
$$\frac{\partial \bar{\tau}_{zs}(y)}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial S_x^{(A_1)}(y)}{\partial y} = 0 \quad (100)$$

e quindi la massima tensione tangenziale si ha in corrispondenza della corda rispetto alla quale risulta massimo il momento statico, ossia la corda baricentrica. Visto che stiamo considerando solo corde parallele all'asse momento, tale corda è quella per cui passa l'asse neutro.

Come si vedrà successivamente, per una sezione rettangolare sollecitata come in figura la tensione $\bar{\tau}_{zy}$ presente in una corda ortogonale alla direzione dell'azione tagliante ha andamento parabolico rispetto a y e presenta il valore massimo in corrispondenza dell'asse neutro, in accordo con la (100).



La trattazione di Jourawsky: osservazione 3



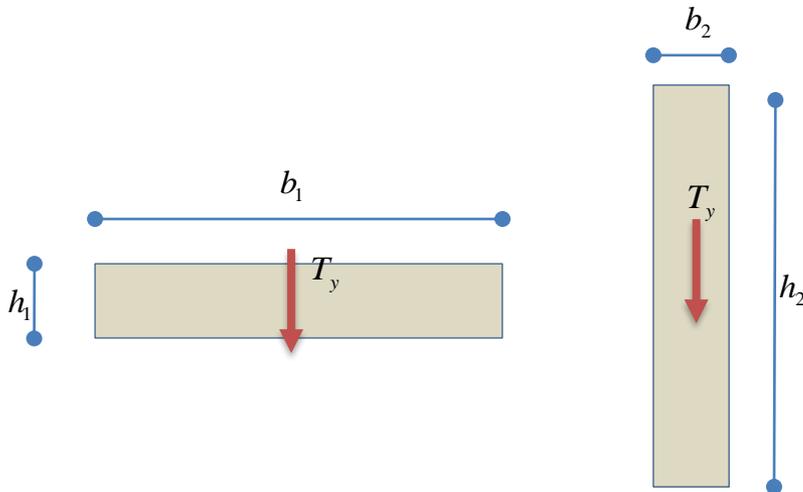
La teoria di Jourawsky si basa esclusivamente su considerazioni di equilibrio. Dalla sua applicazione è possibile ottenere solamente informazioni parziali (ossia valori medi di tensione tangenziale) che sono comunque utili soprattutto nei casi in cui le tensioni tangenziali realmente presenti sui punti appartenenti ad una corda non differiscono troppo dal valore medio.

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (96)$$

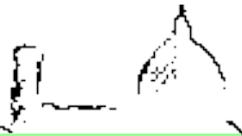
$$\bar{\gamma}_{zs} = \frac{1}{G} \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{1}{G} \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (97)$$



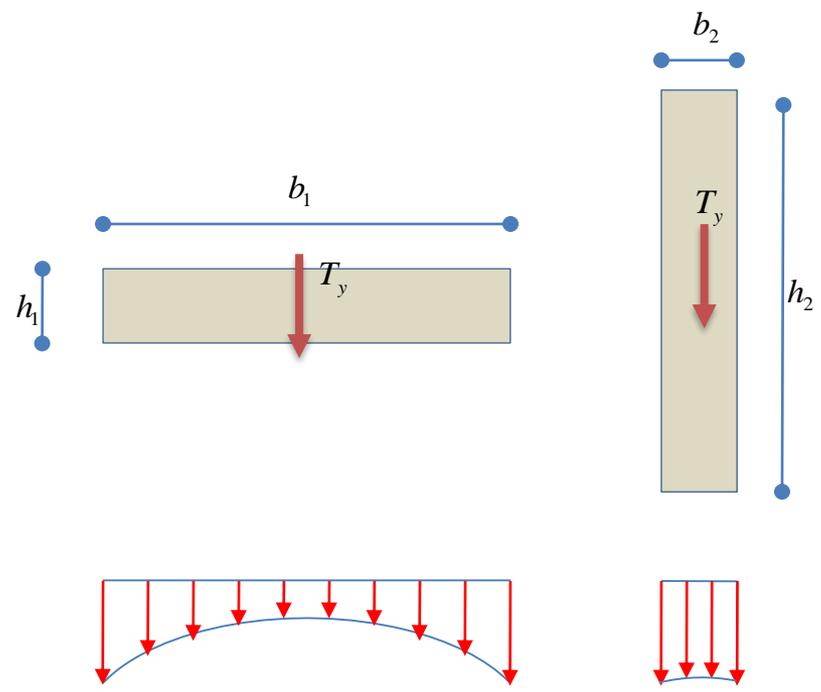
La trattazione di *Jourawsky*: osservazione 3



Consideriamo ad esempio le due sezioni trasversali riportate in figura. Esse presentano un rapporto di forma palesemente differente tra loro.



La trattazione di Jourawsky: osservazione 3



Consideriamo ad esempio le due sezioni trasversali riportate in figura. Esse presentano un rapporto di forma palesemente differente tra loro.

La soluzione esatta del problema elastico fornirebbe, in corrispondenza della corda baricentrica ortogonale alla direzione della sollecitazione tagliante, dei valori di tensione tangenziale del tipo di quelli diagrammati in figura. È evidente quindi che, per una sezione rettangolare, la soluzione di Jourawsky approssima tanto meglio la soluzione esatta quanto maggiore risulta il rapporto h/b . In questo caso, infatti, le tensioni effettive tendono a non discostarsi molto dal loro valore medio.

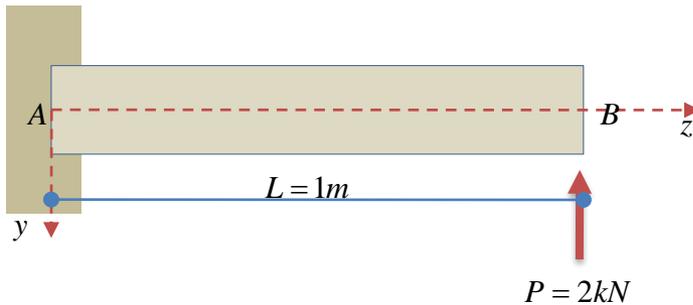


Aste sollecitate da taglio (e momento)

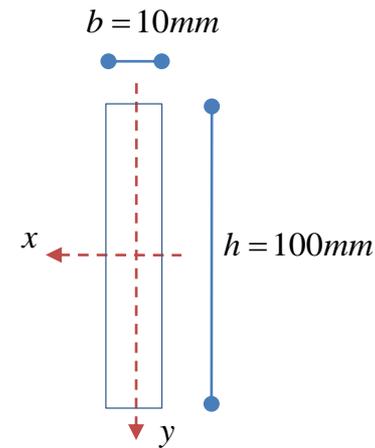
Tensioni tangenziali in una sezione rettangolare



Esercizio: aste a sezione trasversale rettangolare



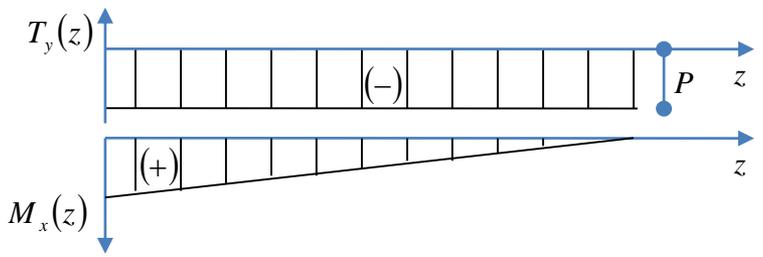
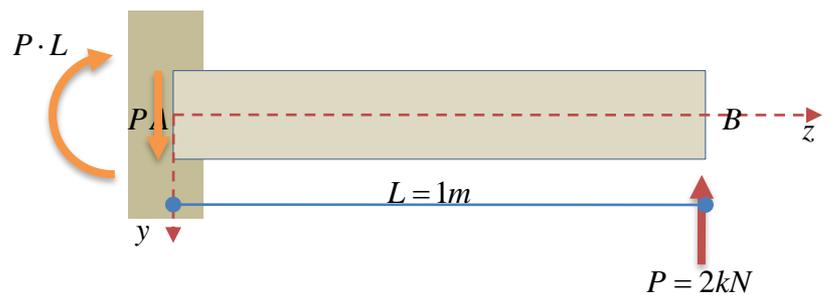
La mensola in acciaio rappresentata in figura ha sezione trasversale rettangolare.



Si determinino le tensioni normali e tangenziali presenti nella sezione maggiormente sollecitata.



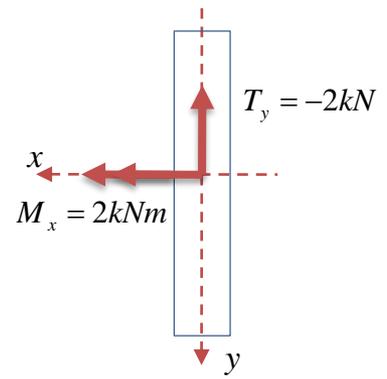
Calcolo delle caratteristiche della sollecitazione

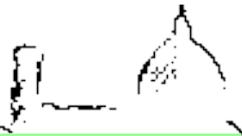


I diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione per la trave in esame sono quelli riportati in figura. È evidente allora che la sezione maggiormente sollecitata è quella d'incastro, nella quale sono presenti le seguenti caratteristiche della sollecitazione:

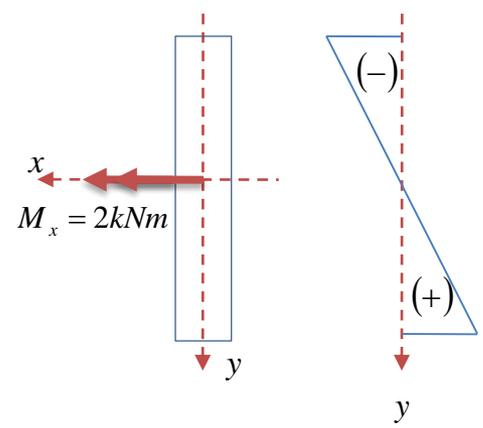
$$T_y = -P = -2kN$$

$$M_x = +P \cdot L = 2kNm$$





Tensioni normali dovute alla flessione retta



$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 = 833333mm^4$$
$$W_{x1} = W_{x2} = \frac{I_x}{h} = 16667mm^3$$
$$\sigma_{zmax} = |\sigma_{zmin}| = \frac{M_x}{W_x} = 120MPa$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti possiamo considerare separatamente, per poi sommarli, gli effetti dovuti al momento flettente ed al taglio.

Come si è visto, il momento flettente produce delle tensioni normali che si determinano attraverso la formula di Navier

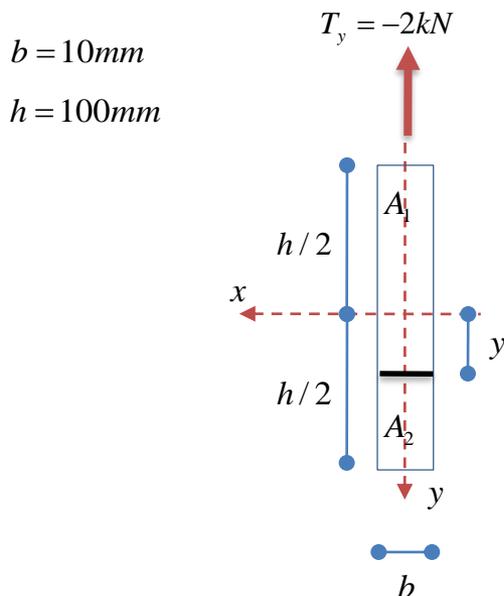
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Il diagramma delle tensioni normali ed i relativi valori massimi sono riportati in figura.

L'asse neutro coincide con l'asse x .



Tensioni tangenziali su una corda ortogonale al carico



Le tensioni tangenziali medie prodotte dalla sollecitazione tagliante si calcolano con la formula di Jourawsky (96)

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x}$$

Consideriamo delle corde ortogonali alla sollecitazione tagliante. Tali corde sono individuate dall'ascissa y (che deve ovviamente essere compresa tra $-h/2$ ed $h/2$) e suddividono la sezione nelle due parti A_1 ed A_2 .

I termini costanti contenuti nella formula di Jourawsky sono i seguenti:

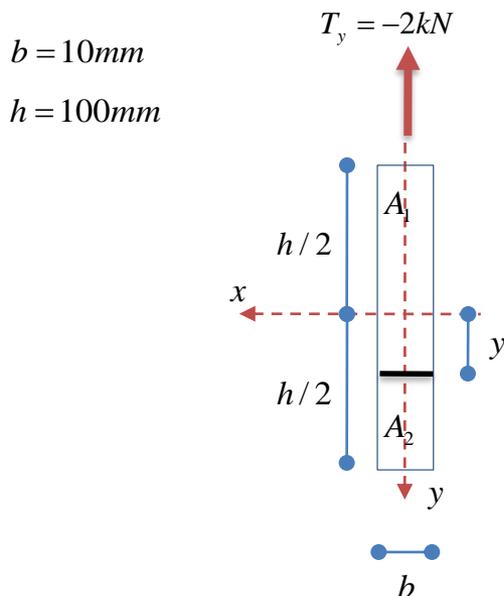
$$T_y = -2000\text{N} \quad b = 10\text{mm} \quad I_x = \frac{1}{12} b h^3 = 833333\text{mm}^4$$

Per l'esempio in esame, l'unico termine variabile è il momento statico che si calcola come segue:

$$S_x^{(A_2)} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{b h^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$



Tensioni tangenziali su una corda ortogonale al carico



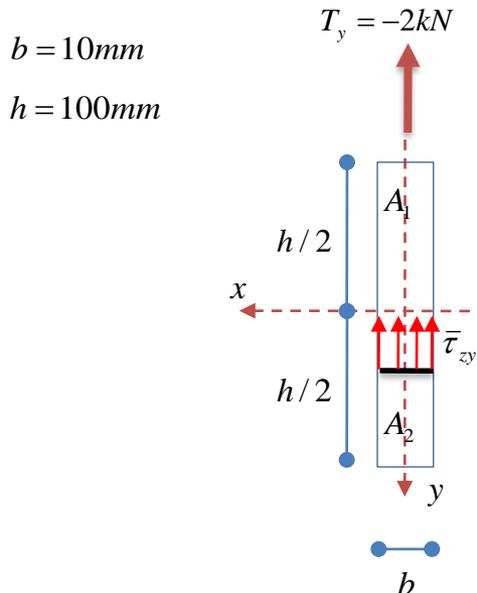
L'espressione delle tensioni tangenziali $\bar{\tau}_{zy}$ assume allora la seguente forma

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = \frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

Nell'ambito di analisi della sezione in figura, ossia per $-h/2 \leq y \leq h/2$, la precedente relazione fornirebbe valori sempre positivi per una sollecitazione tagliante positiva.



Tensioni tangenziali su una corda ortogonale al carico



L'espressione delle tensioni tangenziali $\bar{\tau}_{zy}$ assume allora la seguente forma

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = \frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

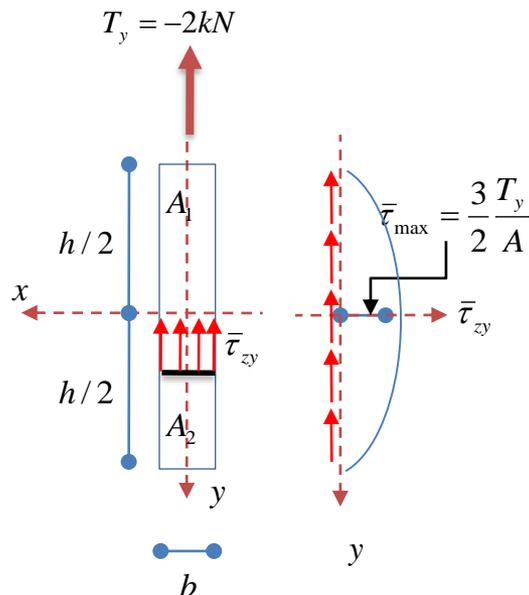
Nell'ambito di analisi della sezione in figura, ossia per $-h/2 \leq y \leq h/2$, la precedente relazione fornirebbe valori sempre positivi per una sollecitazione tagliante positiva. Per il particolare caso in esame però, la sollecitazione tagliante è negativa e quindi dalla precedente relazione si

ottengono valori di tensione tangenziale media negativa e quindi "uscente" dall'area A_2 utilizzata per il calcolo del momento statico.



Tensioni tangenziali su una corda ortogonale al carico

$b = 10\text{mm}$
 $h = 100\text{mm}$



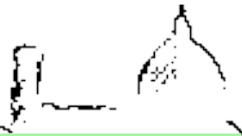
L'espressione delle tensioni tangenziali $\bar{\tau}_{zy}$ assume allora la seguente forma

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = \frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

Nell'ambito di analisi della sezione in figura, ossia per $-h/2 \leq y \leq h/2$, la precedente relazione fornirebbe valori sempre positivi per una sollecitazione tagliante positiva. Per il particolare caso in esame però, la sollecitazione tagliante è negativa e quindi dalla precedente relazione si

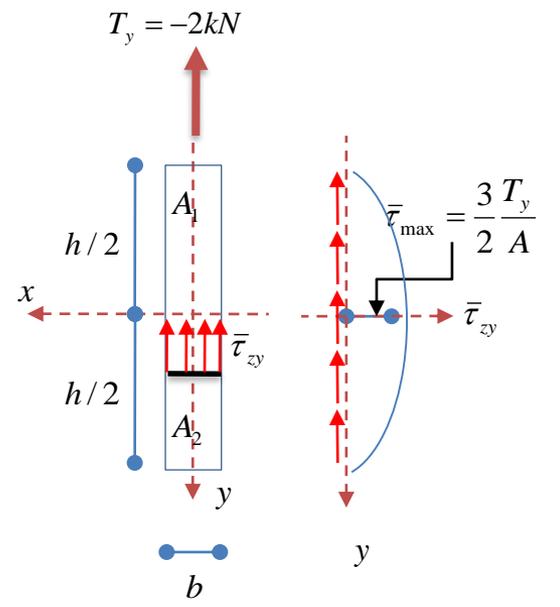
ottengono valori di tensione tangenziale media negativa e quindi "uscente" dall'area A_2 utilizzata per il calcolo del momento statico. L'andamento di tali tensioni è parabolico e presenta valori nulli in corrispondenza dei bordi superiore ed inferiore e valore massimo in corrispondenza della corda baricentrica per la quale passa l'asse neutro relativo alla sollecitazione flessionale associata alla sollecitazione tagliante in esame. Il valore della tensione tangenziale massima è pari a

$$\bar{\tau}_{zy \max} = \frac{3 T_y}{2 A} = 3\text{MPa}$$



Tensioni tangenziali su una corda ortogonale al carico

$b = 10\text{mm}$
 $h = 100\text{mm}$



OSSERVAZIONE:

le componenti di tensione tangenziale nella direzione parallela alla corda esaminata nell'esempio in figura sono identicamente nulle.

Tali componenti di tensione si calcolano attraverso la (99) come segue

$$\tau_{zx} = -\frac{2x}{b \tan \alpha} \bar{\tau}_{zy}$$

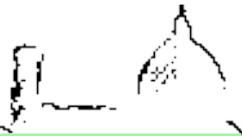
Per ogni corda esaminata si ha $\alpha = \pi/2$ e quindi dalla precedente relazione si ottiene

$$\tau_{zx} = 0$$

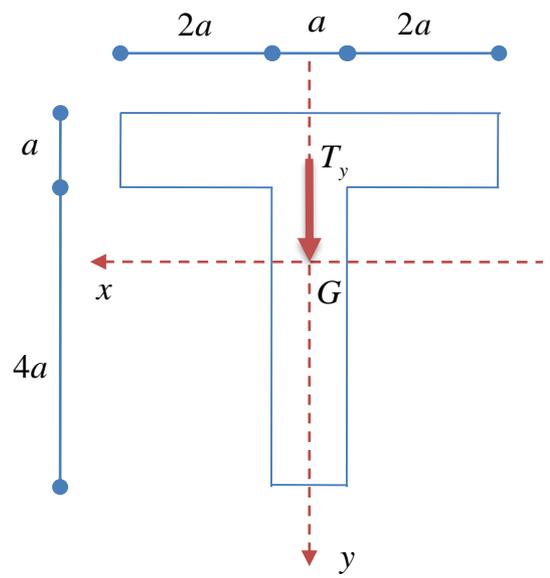


Aste sollecitate da taglio (e momento)

Tensioni tangenziali
in una sezione a “T”



Esercizio proposto: aste a sezione trasversale a "T"



$a = 10mm$
 $T_y = 5kN$

Per la sezione schematizzata in figura si determini l'andamento delle tensioni tangenziali medie presenti in una corda ortogonale alla direzione della sollecitazione tagliante.

Si suggerisce di svolgere il presente esercizio secondo il seguente schema:

1. calcolo della posizione del baricentro della sezione e verifica che gli assi x ed y sono principali d'inerzia;
2. visto che la lunghezza delle corde da considerare è costante a tratti (sull'ala e sull'anima) si calcolino le tensioni tangenziali utilizzando, nei singoli tratti, lo stesso procedimento seguito per la sezione rettangolare.