$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti mediante integrazione immediata:

$$\int \sqrt[5]{x+1}dx;$$

$$\int (3\sin x)\, dx;$$

$$\int (\tan x) dx;$$

$$\int (2\sin x\cos x)\, dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo:

$$\int \sqrt[5]{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{5}}\, dx = \frac{5}{6}(x+1)^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{6}\sqrt[5]{(x+1)^6} + c;$$

$$\int (3\sin x)\, dx = -3\cos x + c;$$

$$\int (\tan x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c;$$

$$\int (2\sin x\cos x)\, dx = (\sin x)^2 + c.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti mediante integrazione per scomposizione:

$$\int \left(x^3 + 3\cos x + 7e^x\right) dx;$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx;$$

$$\int \left(\sqrt[7]{2x+1} - 3\cot x\right) dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \left(x^3 + 3\cos x + 7e^x\right) dx &= \int x^3 dx + 3\int \cos x dx + 7\int e^x dx \\ &= \frac{x^4}{4} + 3\sin x + 7e^x + c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 3\arctan x + c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt[7]{2x+1} - 3\cot x\right) dx &= \int \sqrt[7]{2x+1} dx - 3\int \cot x dx \\ &= \int (2x+1)^{\frac{1}{7}} dx - 3\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \frac{7}{16}(2x+1)^{\frac{8}{7}} - 3\ln|\sin x| + c.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti mediante integrazione per parti:

$$\int (x\ln x)\, dx$$

$$\int \left(x^2 e^{3x}\right) dx$$

$$\int \left(x^3 \sin 3x\right) dx$$

$$\int \left(x^2 \cos(-x)\right) dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int (x\ln x)\, dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \int x dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right) + c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2 e^{3x}\right) dx &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx \\
&= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx \\
&= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(x^3 \sin 3x\right) dx &= -\frac{1}{3}x^3\cos 3x + \int \left(x^2\cos 3x\right) dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3\cos 3x + \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{1}{3}\int (2x\sin 3x)\, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3\cos 3x + \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \int \frac{2}{9}\cos 3x dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3\cos 3x + \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + c;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2\cos(-x)\right)dx &= \int (x^2\cos x)dx = x^2\sin x - \int (2x\sin x))dx \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x dx \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (x^n \ln x)\, dx$$

$$\int (x^n e^{\alpha x})\, dx$$

$$\int (x^n \sin \alpha x)\, dx$$

$$\int (x^n \cos \alpha x)\, dx.$$

dove n è un intero positivo e α è un numero reale non nullo.

SOLUZIONE

Una primitiva di x^n è $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, quindi, usando la regola di integrazione per parti, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\int \left(x^n \ln x\right) dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c;
\end{aligned}
$$

per il calcolo del secondo integrale conviene considerare $\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ come primitiva di $e^{\alpha x}$, infatti si ha:

$$
\int \left(x^n e^{\alpha x}\right) dx = \frac{x^n e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \int \left(x^{n-1} e^{\alpha x}\right) dx
$$

l'integrale al secondo membro è dello stesso tipo di quello al primo membro, ponendo:

$$
I_n = \int \left(x^n e^{\alpha x}\right) dx
$$

si ha:

$$
I_n = \frac{x^n e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} I_{n-1}
$$

questa relazione consente di calcolare I_n noto I_0, ed essendo:

$$
I_0 = \int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c
$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{x^n e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \left(\frac{x^{n-1} e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2} \right) \\
&= \frac{x^n e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} e^{\alpha x} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} \left(\frac{x^{n-2} e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha} I_{n-3} \right) \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \frac{x^{n-k}}{\alpha^{k+1}} e^{\alpha x} + c;
\end{aligned}
$$

per il terzo integrale abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\int \left(x^n \sin \alpha x\right) dx &= -\frac{x^n \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} \int \left(x^{n-1} \cos \alpha x\right) dx \\
&= -\frac{x^n \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} \sin \alpha x - \frac{n(n-1)}{\alpha^2} \int \left(x^{n-2} \sin \alpha x\right) dx
\end{aligned}
$$

pertanto dopo aver applicato n volte la regola di integrazione per parti l'integrale è calcolato;
in modo analogo si procede con il quarto integrale:

$$\begin{aligned}\int (x^n \cos \alpha x)\, dx &= \frac{x^n \sin \alpha x}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \int \left(x^{n-1} \sin \alpha x\right) dx \\ &= \frac{x^n \sin \alpha x}{\alpha} + \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} \cos \alpha x - \frac{n(n-1)}{\alpha^2} \int \left(x^{n-2} \cos \alpha x\right) dx.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 5}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (e^x \sin 2x)\, dx$$

$$\int \left(e^{2x} \cos 3x\right) dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Poniamo:

$$I = \int (e^x \sin 2x)\, dx$$

usando il metodo di integrazione per parti due volte otteniamo:

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin 2x - 2 \int (e^x \cos 2x)\, dx \\ &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4 \int (e^x \sin 2x)\, dx \\ &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I \end{aligned}$$

da cui, uguagliando:

$$5I = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x + c$$

quindi.

$$\int (e^x \sin 2x)\, dx = \frac{1}{5} \left(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x + c\right);$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 6}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (e^{\alpha x} \sin \beta x)\, dx$$

$$\int (e^{\alpha x} \cos \beta x)\, dx.$$

dove α, β sono numeri reali non nulli.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

In questi integrali consideriamo $e^{\alpha x}$ come derivata di $\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$, per il primo abbiamo:

$$\begin{aligned}\int (e^{\alpha x} \sin \beta x)\, dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha} \int (e^{\alpha x} \cos \beta x)\, dx \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \cos \beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int (e^{\alpha x} \sin \beta x)\, dx\end{aligned}$$

da cui, portando al primo membro l'integrale al secondo membro, si ha:

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \int (e^{\alpha x} \sin \beta x)\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \cos \beta x + c$$

in particolare:

$$\begin{aligned}\int (e^{\alpha x} \sin \beta x)\, dx &= \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right)} \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \cos \beta x + c\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x - \beta e^{\alpha x} \cos \beta x + c);\end{aligned}$$

analogamente, per il secondo integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned}\int (e^{\alpha x} \cos \beta x)\, dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha} \int (e^{\alpha x} \sin \beta x)\, dx \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int (e^{\alpha x} \cos \beta x)\, dx\end{aligned}$$

da cui, portando al primo membro l'integrale al secondo membro, si ha:

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \int (e^{\alpha x} \cos \beta x)\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin \beta x + c$$

in particolare:

$$\begin{aligned}\int (e^{\alpha x} \cos \beta x)\, dx &= \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right)} \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin \beta x + c\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x + \beta e^{\alpha x} \sin \beta x + c).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 7}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

essendo a un numero reale positivo.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Nel primo integrale conviene porre:

$$x = at$$

in particolare risulta:

$$dx = adt$$

da cui:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int \frac{a}{a\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \arcsin t + c = \arcsin \frac{x}{a} + c; \end{aligned}$$

analogamente si procede con gli altri integrali, per il secondo si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a}{a\sqrt{t^2-1}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \arcsin ht + c = \arcsin h\frac{x}{a} + c; \end{aligned}$$

per il terzo abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx &= \int \frac{a}{a\sqrt{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= \arccos ht + c = \arccos h\frac{x}{a} + c. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 8}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (\sin x)^2 dx;$$

$$\int (\cos x)^2 \, dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Osserviamo che basta calcolare solo uno dei due integrali per ricavare anche l'altro, infatti:

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^2 \, dx &= \int \left(1 - (\sin x)^2\right) dx \\
&= \int dx - \int (\sin x)^2 \, dx \\
&= x - \int (\sin x)^2 \, dx,
\end{aligned}$$

calcoliamo dunque il primo integrale, usiamo la formula di integrazione per parti considerando $\sin x$ come derivata di $-\cos x$:

$$\begin{aligned}
\int (\sin x)^2 dx &= \int (\sin x \sin x) dx = -\cos x \sin x + \int (\cos x)^2 dx \\
&= -\cos x \sin x + \int \left(1 - (\sin x)^2\right) dx \\
&= -\cos x \sin x + x - \int (\sin x)^2 \, dx
\end{aligned}$$

da cui, portando al primo membro l'integrale al secondo, e dividendo per 2, si ha:

$$\int (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2} \left(-\cos x \sin x + x + c\right);$$

in particolare:

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^2 \, dx &= x - \int (\sin x)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\cos x \sin x + x + c\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 9}}$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

essendo a un numero reale positivo.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Ponendo:

$$x = a \sin t, \text{ con } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

abbiamo:

$$dx = a \cos t dt, \; t = \arcsin \frac{x}{a}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \sqrt{1 - (\sin t)^2} \cos t dx = a^2 \int (\cos t)^2 \, dt \\
&= \frac{a^2}{2} (\cos t \sin t + t) + c \\
&= \frac{a^2}{2} \left(\left(\cos \arcsin \frac{x}{a} \right) \frac{x}{a} + \arcsin \frac{x}{a} \right) + c \\
&= \frac{a^2}{2} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \left(\frac{x}{a} \right) + \arcsin \frac{x}{a} \right) + c \\
&= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + c;
\end{aligned}$$

analogamente per il calcolo del secondo integrale poniamo:

$$x = a \sinh t$$

si ha:

$$dx = a \cosh t dt$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2+x^2}dx &= a^2 \int \sqrt{1+(\sinh t)^2}\cosh t dx = a^2 \int (\cosh t)^2 \, dt \\
&= a^2 \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4} dt = \frac{a^2}{2} \int (\cosh 2t + 1)\, dt \\
&= \frac{a^2}{4} \sinh 2t + \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} (\sinh t \cosh t + t) + c \\
&= \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} h \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + c \\
&= \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + c
\end{aligned}$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo usato la seguente identità:

$$\cosh t + \sinh t = e^t$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}
t &= \ln(\cosh t + \sinh t) \\
&= \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \right);
\end{aligned}$$

per il terzo integrale si usa la sostituzione:

$$x = \begin{cases} a \cosh t & \text{se } x \geq a \\ -a \cosh t & \text{se } x \leq -a \end{cases}$$

procedendo in modo analogo al caso precedente si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-a^2}dx &= \pm a^2 \int \sqrt{(\cosh t)^2 - 1} \sinh t dx = \pm a^2 \int (\sinh t)^2 \, dt \\
&= \pm a^2 \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4} dt = \pm \frac{a^2}{2} \int (\cosh 2t - 1)\, dt \\
&= \pm \frac{a^2}{4} \sinh 2t \mp \frac{t}{2} + c = \pm \frac{1}{2} (\sinh t \cosh t - t) + c \\
&= -\frac{a^2}{2} \operatorname{arccos} h \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-a^2} + c \\
&= -\frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-a^2} + c.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 10}}$

Calcolare:

$$\int \frac{1+x}{2+x}dx$$

$$\int \frac{1}{2-x^2}dx$$

$$\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-2x}dx$$

$$\int \frac{1+x}{x^2+3x+4}dx$$

$$\int \frac{x^9}{1-x^{10}}dx$$

$$\int \frac{x}{5+x^3}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$$

$$\int \frac{1}{(2-x^3)}dx$$

$$\int \frac{\sin x+2}{1+\cos x}dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Abbiamo:

$$\int \frac{1+x}{2+x}dx = \int \left(1-\frac{1}{2+x}\right)dx = x - \ln|2+x| + c;$$

per il calcolo del secondo integrale scomponiamo il polinomio al denominatore e determiniamo due numeri reali, A e B tali che:

$$\frac{1}{2-x^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-x} + \frac{B}{\sqrt{2}+x}$$

otteniamo:

$$A(\sqrt{2}+x) + B\left(\sqrt{2}-x\right) = 1$$

da cui, ponendo $x=\sqrt{2}$, si ricava:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

e ponendo $x=-\sqrt{2}$, si ricava:

$$B = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

in particolare:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2-x^2}dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{2}-x}dx + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{2}+x}dx \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}-x\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}+x\right| + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + c;
\end{aligned}$$

per il terzo integrale osserviamo che il numeratore ha grado maggiore del denominatore, eseguendo la divisione di polinomi otteniamo:

$$x^3 - x^2 + 1 = (x^2 - 2x)(x+1) + 2x + 1$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-2x}dx &= \int (x+1)dx + \int \frac{2x+1}{x^2-2x}dx \\
&= \frac{x^2}{2} + x + \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}\right)dx
\end{aligned}$$

ponendo:

$$A(x-2) + Bx = 2x + 1$$

con $x = 2$ si ricava:

$$B = \frac{5}{2}$$

e con $x = 0$ si ottiene:

$$A = -\frac{1}{2}$$

pertanto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-2x}dx &= \frac{x^2}{2} + x + \int \left(-\frac{1}{2x} + \frac{5}{2(x-2)}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|x-2| + c
\end{aligned}$$

per il calcolo del quarto integrale osserviamo che il polinomio al denominatore non ammette radici reali e si può scrivere nel modo seguente:

$$x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{x^2+3x+4}dx &= \int \frac{1+x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{3+2x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+4\right| - \frac{1}{14}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+4\right| - \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c;
\end{aligned}$$

per il calcolo del quinto integrale osserviamo che la derivata del polinomio al denominatore è il numeratore moltiplicato -10, pertanto si ricava:

$$\int \frac{x^9}{1-x^{10}}dx = -\frac{1}{10}\int \frac{-10x^9}{1-x^{10}}dx = -\frac{1}{10}\ln\left|1-x^{10}\right| + c;$$

per il sesto integrale abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{5+x^3}dx &= \int \frac{x}{(\sqrt[3]{5}+x)(x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25})}dx \\
&= \int \frac{A}{\sqrt[3]{5}+x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{5}}dx + \frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\int \frac{x+\sqrt[3]{5}}{x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\ln\left|x+\sqrt[3]{5}\right| + \frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\int \frac{x+\sqrt[3]{5}}{x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\ln\left|x+\sqrt[3]{5}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{5}}\int \frac{2x-\sqrt[3]{5}}{x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}}dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\ln\left|x+\sqrt[3]{5}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{5}}\ln\left|x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}\right| \\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt[3]{25}}{4}}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\ln\left|x+\sqrt[3]{5}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{5}}\ln\left|x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}\right| + \\
&\quad +\frac{2}{3\sqrt[3]{25}}\int \frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}\sqrt[3]{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{5}}\ln\left|x+\sqrt[3]{5}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{5}}\ln\left|x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}\right| + \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{5}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}\sqrt[3]{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c;
\end{aligned}
$$

inoltre abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx &= \int \frac{1}{(x-3)(x-2)}dx = \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{-1}{x-2}dx \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + c;
\end{aligned}
$$

analogamente:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(2-x^3)}dx &= \int \frac{1}{(\sqrt[3]{2}-x)(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}dx \\
&= \int \frac{A}{(\sqrt[3]{2}-x)}dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}dx \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\int \frac{1}{(\sqrt[3]{2}-x)}dx + \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\int \frac{x+2\sqrt[3]{2}}{(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\ln\left|x-\sqrt[3]{2}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{4}}\int \frac{2x+\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}}{(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\ln\left|x-\sqrt[3]{2}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{4}}\ln\left|x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right| + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\int \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\ln\left|x-\sqrt[3]{2}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{4}}\ln\left|x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right| + \\
&\quad + \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\ln\left|x-\sqrt[3]{2}\right| + \frac{1}{6\sqrt[3]{4}}\ln\left|x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right| + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{6}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c;
\end{aligned}
$$

per il calcolo dell'ultimo integrale si può usare la formula di sostituzione scrivendo $\sin x$ e $\cos x$ mediante le formule parametriche in $t = \tan\frac{x}{2}$, precisamente abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

da cui:

$$
\int \frac{\sin x + 2}{1+\cos x}dx = \int \frac{2t+2+2t^2}{1+t^2}dt = 2\tan\frac{x}{2} + \ln\left(1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right)+c.
$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 11}}$

Siano α, β numeri reali non nulli, calcolare:

$$\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx$$

$$\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x)\, dx$$

$$\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x)\, dx.$$

SOLUZIONE

Dalle formule di Werner si ricava:

$$(\sin \alpha x)(\sin \beta x) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\alpha - \beta\right) x - \cos \left(\alpha + \beta\right) x\right)$$

quindi, se $\alpha \neq \pm\beta$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx &= \frac{1}{2} \int \cos\left(\left(\alpha - \beta\right) x\right) dx - \frac{1}{2} \int \cos\left(\left(\alpha + \beta\right) x\right) dx \\
&= \frac{1}{2\left(\alpha - \beta\right)} \sin\left(\left(\alpha - \beta\right) x\right) - \frac{1}{2\left(\alpha + \beta\right)} \sin\left(\left(\alpha + \beta\right) x\right) + c,
\end{aligned}$$

se $\alpha = \beta$ si ha:

$$\begin{aligned}
\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx &= \int (\sin \alpha x)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos\left(2\alpha x\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\alpha} \sin 2\alpha x \right) + c,
\end{aligned}$$

infine, se $\alpha = -\beta$ si ha:

$$\begin{aligned}
\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx &= -\int (\sin \alpha x)^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\alpha} \sin 2\alpha x \right) + c;
\end{aligned}$$

analogamente, dalle formule di Werner si ricava:

$$(\sin \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\alpha - \beta\right) x + \sin \left(\alpha + \beta\right) x\right)$$

quindi, se $\alpha \neq \pm\beta$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x)\, dx &= \frac{1}{2}\int \sin\left((\alpha-\beta)\, x\right) dx + \frac{1}{2}\int \sin\left((\alpha+\beta)\, x\right) dx \\
&= -\frac{1}{2\,(\alpha-\beta)}\cos\left((\alpha-\beta)\, x\right) - \frac{1}{2\,(\alpha+\beta)}\cos\left((\alpha+\beta)\, x\right) + c,
\end{aligned}$$

se $\alpha = \pm\beta$ si ha:

$$\begin{aligned}
\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x)\, dx &= \int (\sin \alpha x)(\cos \alpha x) dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\sin 2\alpha) dx \\
&= -\frac{1}{4\alpha}\cos 2\alpha x + c;
\end{aligned}$$

in modo perfettamente analogo, essendo:

$$(\cos \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2}\cos\left((\alpha-\beta)\, x\right) + \frac{1}{2}\cos\left((\alpha+\beta)\, x\right)$$

si ricava:

$$\begin{aligned}
\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x)\, dx &= \\
&= \begin{cases}
\dfrac{1}{2\,(\alpha-\beta)}\sin\left((\alpha-\beta)\, x\right) + \dfrac{1}{2\,(\alpha+\beta)}\sin\left((\alpha+\beta)\, x\right) + c & \text{se } \alpha \neq \pm\beta \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2\alpha}\sin 2\alpha x\right) + c & \text{se } \alpha = \pm\beta
\end{cases}.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 12

Calcolare:

$$\int (\sin x)\,(\cos 2x)\,(\sin 3x)\, dx$$

$$\int (\sin x)^2\,(\cos 4x) dx$$

$$\int (\cos x)^3\,(\sin x)^2 dx.$$

SOLUZIONE

Usando le formule di Werner abbiamo:

$$\begin{aligned}
(\sin x)(\cos 2x)(\sin 3x) &= \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin(-x))(\sin 3x) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 3x)^2 + \frac{1}{4}(\cos(-4x) - \cos 2x),
\end{aligned}$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned}
\int (\sin x)(\cos 2x)(\sin 3x)\, dx &= \frac{1}{2}\int (\sin 3x)^2 dx + \frac{1}{4}\int (\cos(-4x) - \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 2x + c;
\end{aligned}$$

per il secondo integrale abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int (\sin x)^2 (\cos 4x) dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\cos 4x dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int (\cos 6x + \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 6x - \frac{1}{8}\sin 2x + c;
\end{aligned}$$

infine, per il terzo integrale, possiamo procedere con il metodo di integrazione per parti e abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^3 (\sin x)^2\, dx &= -\frac{1}{4}(\cos x)^4(\sin x) + \frac{1}{4}\int (\cos x)^5 dx \\
&= -\frac{1}{4}(\cos x)^4(\sin x) + \frac{1}{4}\int (\cos x)(1 - (\sin x)^2)^2 dx \\
&= -\frac{1}{4}(\cos x)^4(\sin x) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\int (\cos x) dx - 2\int \cos x(\sin x)^2 dx + \int \cos x(\sin x)^4 dx\right) \\
&= -\frac{1}{4}(\cos x)^4(\sin x) + \frac{1}{4}\left(\sin x - \frac{2}{3}(\sin x)^3 + \frac{1}{5}(\sin x)^5\right) + c.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 13}}$

Siano n e m interi positivi, calcolare:

$$\int (\cos x)^n\, dx$$

$$\int (\sin x)^n\, dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Per gli integrali di questo tipo possiamo procedere in modo ricorsivo usando al regola di integrazione per parti, precisamente per il primo integrale abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^n \, dx &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + \int (n-1)(\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + \int (n-1)(\cos x)^{n-2} (1 - (\cos x)^2) dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \left(\int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n dx \right)
\end{aligned}$$

da ciò si ottiene:

$$\int (\cos x)^n \, dx = \frac{1}{n} \left((\cos x)^{n-1} \sin x \right) + \frac{(n-1)}{n} \int (\cos x)^{n-2} dx$$

se n è pari, proseguendo in modo ricorsivo, si ottiene.

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^n \, dx &= \frac{1}{n} \left((\cos x)^{n-1} \sin x \right) + \\
&\quad + \frac{n-1}{n(n-2)} \left((\cos x)^{n-3} \sin x \right) + ... + \frac{(n-1)(n-3)...1}{n(n-2)...2} \int dx
\end{aligned}$$

se n è dispari si ha invece:

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^n \, dx &= \frac{1}{n} \left((\cos x)^{n-1} \sin x \right) + \\
&\quad + \frac{n-1}{n(n-2)} \left((\cos x)^{n-3} \sin x \right) + ... + \frac{(n-1)(n-3)...2}{n(n-2)...3} \int \cos x dx;
\end{aligned}$$

analogamente si ha:

$$\begin{aligned}
\int (\sin x)^n \, dx &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx \\
&= -\cos x (\sin x)^{n-1} + \int (n-1)(\sin x)^{n-2} (\cos x)^2 dx \\
&= -\cos x (\sin x)^{n-1} + \int (n-1)(\sin x)^{n-2} (1 - (\sin x)^2) dx \\
&= -\cos x (\sin x)^{n-1} + (n-1) \left(\int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n dx \right)
\end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\int (\sin x)^n \, dx = \frac{1}{n}\left(-\cos x(\sin x)^{n-1}\right) + \frac{(n-1)}{n}\int (\sin x)^{n-2} dx.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 14}}$

Siano n e m interi positivi, calcolare:

$$\int (\cos x)^n \, (\sin x)^m dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Usando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^n \, (\sin x)^m dx &= (\cos x)^{n-1} \sin x (\sin x)^m + \\
&\quad - \int \Big(m \, (\cos x)^n \, (\sin x)^m - (n-1) \, (\cos x)^{n-2} \, (\sin x)^{m+2}\Big) \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \, (\sin x)^{m+1} + \\
&\quad - \int \Big(m \, (\cos x)^n \, (\sin x)^m - (n-1) \, (\cos x)^{n-2} \, (\sin x)^m \, (1 - (\cos x)^2)\Big) \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \, (\sin x)^{m+1} + \\
&\quad - \int (m+n-1) \, (\cos x)^n \, (\sin x)^m dx + \int (n-1) \, (\cos x)^{n-2} \, (\sin x)^m \, dx
\end{aligned}$$

da cui, portando il primo integrale del secondo membro al primo membro, si ottiene:

$$\int (\cos x)^n \, (\sin x)^m dx = \frac{(\cos x)^{n-1} \, (\sin x)^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{n+m} \int (\cos x)^{n-2} \, (\sin x)^m dx$$

a questo punto si procede fino a che al secondo membro non compaia:

$$\int (\sin x)^m dx$$

se n è pari, oppure:

$$\int (\sin x)^m \cos x dx$$

se n è dispari, entrambi già noti.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 15}}$

Calcolare:

$$\int (\ln x)^3 dx$$

$$\int x^2 (\ln x)^2 dx$$

$$\int (e^x)(\sin x)(\cos 3x) dx$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$\int \frac{(x^2-3)}{(x-1)(x^2+2x-15)} dx.$$

SOLUZIONE

Usando ripetutamente la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^3 dx &= x(\ln x)^3 - \int 3(\ln x)^2 dx \\
&= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + \int 6 \ln x dx \\
&= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + c;
\end{aligned}$$

analogamente abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int x^2 (\ln x)^2 dx &= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \int \frac{2}{3} x^2 \ln x dx \\
&= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{9} \int x^2 dx \\
&= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 + c;
\end{aligned}$$

per il calcolo del terzo integrale usiamo le formule di Werner, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int (e^x)(\sin x)(\cos 3x) dx &= \frac{1}{2} \int (e^x)(\sin 4x - \sin 2x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int e^x \sin 4x dx - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x dx
\end{aligned}$$

adesso calcoliamo separatamente i due addendi, usando la regola di integrazione per parti, abbiamo:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin 4x dx &= e^x \sin 4x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 4x dx \\ &= e^x \sin 4x - \frac{1}{4}e^x \cos 4x - \frac{1}{16}\int e^x \sin 4x dx\end{aligned}$$

da cui:

$$\int e^x \sin 4x dx = \frac{16}{17}\left(e^x \sin 4x - \frac{1}{4}e^x \cos 4x\right) + c$$

$$\begin{aligned}\int e^x \sin 2x dx &= e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx \\ &= e^x \sin 2x - \frac{1}{2}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx\end{aligned}$$

da cui:

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{4}{5}\left(e^x \sin 2x - \frac{1}{2}e^x \cos 2x\right) + c$$

pertanto:

$$\int (e^x)(\sin x)(\cos 3x) dx = \frac{8}{17}\left(e^x \sin 4x - \frac{1}{4}e^x \cos 4x\right) + \frac{2}{5}\left(e^x \sin 2x - \frac{1}{2}e^x \cos 2x\right) + c;$$

per il calcolo del quarto integrale abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx &= \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x-5)}dx + \int \frac{C}{(x-3)}dx \\ &= \int \frac{1}{2(x-1)}dx - \int \frac{1}{(x-2)}dx + \int \frac{1}{2(x-3)}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + c;\end{aligned}$$

infine per il quinto integrale abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2-3)}{(x-1)(x^2+2x-15)}dx &= \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x+5)}dx + \int \frac{C}{(x-3)}dx \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x-1)}dx + \frac{11}{24}\int \frac{1}{(x+5)}dx + \frac{3}{8}\int \frac{1}{(x-3)}dx \\ &= \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{11}{24}\ln|x+2| + \frac{3}{8}\ln|x-3| + c.\end{aligned}$$