1) LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \sin x = x+o(x)\ ,\ \text{ per } x\to 0 \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}, \quad \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\ ,\ \text{ per } x\to 0 \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \quad e^x = 1+x+o(x)\ ,\ \text{ per } x\to 0 \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=1, \quad \log(x+1) = x+o(x)\ ,\ \text{ per } x\to 0 \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^\alpha-1}{x}=\alpha, \quad , \quad (x+1)^\alpha = 1+\alpha x+o(x)\ ,\ \text{ per } x\to 0 \tag{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{6}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=+\infty \quad (\text{se } a>1) \tag{8}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0 \quad (\text{se } \alpha>0) \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha \log x=0 \quad (\text{se } \alpha>0) \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0 \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty \tag{13}$$

2) DERIVATE

2a) REGOLE DI DERIVAZIONE

$$(f+g)'=f'+g', \tag{14}$$

$$(\alpha f)'=\alpha f'\ , \quad (\text{se } \alpha\in\mathbb{R}) \tag{15}$$

$$(fg)'=f'g+fg' \tag{16}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{17}$$

$$Df(g(x)) = f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right) \tag{18}$$

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}, \quad \text{con } y_0 = f(x_0),\ f'\left(x_0\right) \neq 0,\ (f^{-1} \text{ è la funzione inversa di } f) \tag{19}$$

2b) TABELLA DELLE DERIVATE

f	f'
1	0
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x, \ \frac{1}{\cos^2 x}$
$\log \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

2c) Formule di McLaurin

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right). \tag{20}$$

$$\ln\left(1+x\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(-1\right)^{k-1} x^k}{k} + o\left(x^n\right). \tag{21}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1\right)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \tag{22}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1\right)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right). \tag{23}$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \tag{24}$$

$$\left(1+x\right)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^2 ... + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-\left(n-1\right)\right)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \tag{25}$$

3) INTEGRALI

3a) TABELLA DELLE PRIMITIVE

f	primitive di f
0	C
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{settcosh} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{settsenh} x + C$

3b) FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

3c) FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\left(\int f(x)\, dx\right)_{|x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

4) EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

4i) EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

4i-a) EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Siano a e f due funzioni continue nell'intervallo J. Consideriamo equazione nell'incognita $u \in C^1(J)$

$$u'(x) = a(x)\,u(x) + f(x), \quad \text{per ogni } x \in J. \tag{26}$$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$. Tutte le soluzioni di (26)

$$u(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} f(x)\,dx, \quad \text{in } J. \tag{27}$$

In particolare se $f \equiv 0$, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$u' = a(x)\,u, \quad \text{in } J$$

sono date da

$$u(x) = Ce^{A(x)}, \quad x \in J \tag{28}$$

dove C è una costante arbitraria.

La formula (27) si può anche scrivere

$$u(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int_{x_0}^{x} f(t) \exp\left\{\int_t^x a(s)\,ds\right\} dt, \quad x \in J, \tag{29}$$

dove C è una costante arbitraria e $x_0 \in J$

4i-b) EQUAZIONI DEL DEL TIPO $u' = f(u)$

PROPOSIZIONE 1

Sia J_0 un intervallo aperto e sia $f \in C^0(J_0)$ tale che $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in J_0$. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\eta_0 \in J_0$ e sia $\Phi : J_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi(q) = \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \quad q \in J_0.$$

Allora Φ è strettamente monotona, $\Phi \in C^1(J_0)$ e, posto $I_0 = x_0 + \Phi(J_0)$ (I_0 è un intervallo), si ha che la funzione $u : I_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = \Phi^{-1}(x - x_0), \quad \text{per } x \in I_0 \tag{30}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u), \text{ in } I_0 \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}. \tag{31}$$

4i-c) EQUAZIONI DEL DEL TIPO $u' = h(x) f(u)$

PROPOSIZIONE 2

Siano J, J_0 intervalli aperti e siano $h \in C^0(J)$ $f \in C^0(J_0)$ con f tale che $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in J_0$. Siano $x_0 \in J$ e $\eta_0 \in J_0$ e $\Phi : J_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi(q) = \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \quad q \in J_0.$$

Allora Φ è strettamente monotona, $\Phi \in C^1(J_0)$. Inoltre, per un opportuno intervallo I contenente x_0, risulta che la funzione

$$u(x) = \Phi^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} h(t)\, dt\right),$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = h(x) f(u), \text{ in } I \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}.$$

4i-d) EQUAZIONE DI BERNOULLI

Siano J un intervallo, $a, b \in C^0(J)$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Un'equazione di Bernoulli è un'equazione differenziale del tipo

$$u' = a(x) u + b(x) u^{\alpha}. \tag{32}$$

Le equazioni del tipo (32) si possono trattare mediante la sostituzione

$$v = u^{1-\alpha}.$$

Infatti osserviamo che la (32) si può scrivere

$$\frac{1}{1-\alpha} v' = a(x) v + b(x)$$

che è un'equazione lineare.

4ii) EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

TEOREMA

Sia $f \in C^0(J)$ con J intervallo e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione

$$u'' + au' + bu = f(x), \quad \text{in } J. \tag{33}$$

Poniamo

$$P(\xi) = \xi^2 + a\xi + b$$

e $\Delta = a^2 - 4b$. Siano ξ_1, ξ_2 le due radici reali o complesse coniugate di

$$P(\xi) = 0. \tag{34}$$

Sia $x_0 \in J$.
(a) Se $\Delta > 0$, allora tutte le soluzioni di (33) sono date da

$$u(x) = C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{\xi_1 (x-t)} - e^{\xi_2 (x-t)}}{\xi_1 - \xi_2} \right) f(t)dt, \tag{35}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.
(b) Se $\Delta = 0$, allora tutte le soluzioni della (33) sono date da

$$u(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\xi_1 x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, e^{\xi_1 (x-t)} f(t)dt, \tag{36}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.
(c) Se $\Delta < 0$, siano $\xi_1 = \alpha + i\beta$, $\xi_2 = \alpha - i\beta$ le radici complesse coniugate di (34), allora tutte le soluzioni della (33) sono date da

$$u\,(x) = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)\, e^{\alpha x} + \frac{1}{\beta} \int_{x_0}^{x} \left(e^{\alpha (x-t)} \sin\beta\,(x-t) \right) f(t)dt, \tag{37}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(**N.B. In particolare** se $f \equiv 0$ allora tutte le soluzioni di $u'' + au' + bu = 0$ sono date da:

Nel caso (a), $C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x}$; nel caso (b), $(C_1 + C_2 x)\, e^{\xi_1 x}$; nel caso (c), $(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)\, e^{\alpha x}$, con C_1 e C_2 costanti arbitrarie reali).

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: Se u_1, u_2 sono soluzioni, rispettivamente di $u'' + au' + bu = f_1\,(x)$ e di $u'' + au' + bu = f_2\,(x)$ e λ_1, λ_2 sono due numeri allora $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ è soluzione di $u'' + au' + bu = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

METODI AD HOC

1) Supponiamo che $f\,(x) = p_m\,(x)$ con p_m **polinomio di grado** m. Se 0 è una radice di molteplicità s dell'equazione $P\,(\xi) = 0$ allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = p_m\,(x)$$

del tipo $\widetilde{u} = x^s Q_m\,(x)$ dove $Q_m\,(x)$ è un polinomio di grado m. **N.B.** se $b \neq 0$ allora $s = 0$; se $b = 0$ e $a \neq 0$ allora $s = 1$; se $b = 0$ e $a = 0$ allora $s = 2$.

2) Supponiamo che $f\,(x) = e^{\gamma x} p_m\,(x)$ con p_m **polinomio di grado** m **e** $\gamma \in \mathbb{R}$. Se γ è soluzione di $P\,(\xi) = 0$ di molteplicità s allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = e^{\gamma x} p_m\,(x)$$

del tipo $\widetilde{u} = e^{\gamma x} x^s Q_m\,(x)$ dove $Q_m\,(x)$ è un polinomio di grado m.

N.B. Se γ **non è** soluzione di $P\,(\xi) = 0$ allora $s = 0$; se γ **è** soluzione di $P\,(\xi) = 0$ ma $\Delta \neq 0$, allora $s = 1$; se γ **è** soluzione di $P\,(\xi) = 0$, ma $\Delta = 0$, allora $s = 2$.

3) Supponiamo che $f(x) = p_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$ oppure $f(x) = p_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$ con p_m **polinomio di grado** m **e** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq 0$. Se $\alpha + i\beta$ è soluzione di $P(\xi) = 0$ di molteplicità s allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = p_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$$

oppure di

$$u'' + au' + bu = p_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

del tipo $\widetilde{u} = x^s e^{\alpha x} \left(Q_m(x) \cos \beta x + Q_m^*(x) \sin \beta x \right)$ dove $Q_m(x)$ e $Q_m^*(x)$ sono polinomi di grado m.

N.B. Se $\alpha + i\beta$ **non è** soluzione di $P(\xi) = 0$ allora $s = 0$; se $\alpha + i\beta$ **è** soluzione di $P(\xi) = 0$, allora $s = 1$.

5) SERIE NUMERICHE

5i) La serie *serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \tag{38}$$

è convergente se e solo se $|r| < 1$. Per $r \geq 1$ è divergente. Per $r \leq -1$ è indeterminata.

Se $|r| < 1$, la somma della serie (38) è $\frac{1}{1-r}$.

5ii) La *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

6) INTEGRALI IMPROPRI.

6i) L'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

6ii) L'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

è convergente se e solo se $\alpha > 1$.