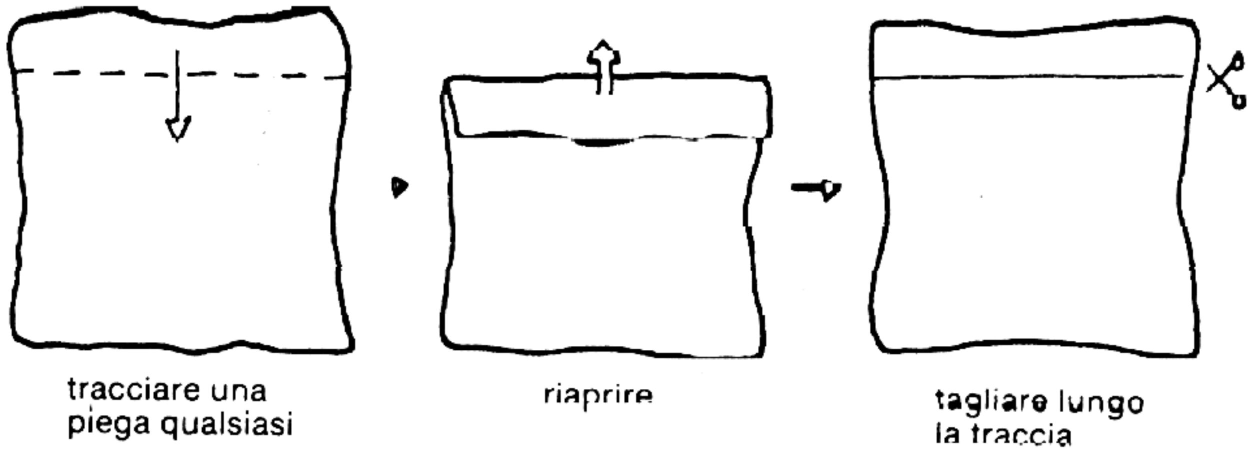
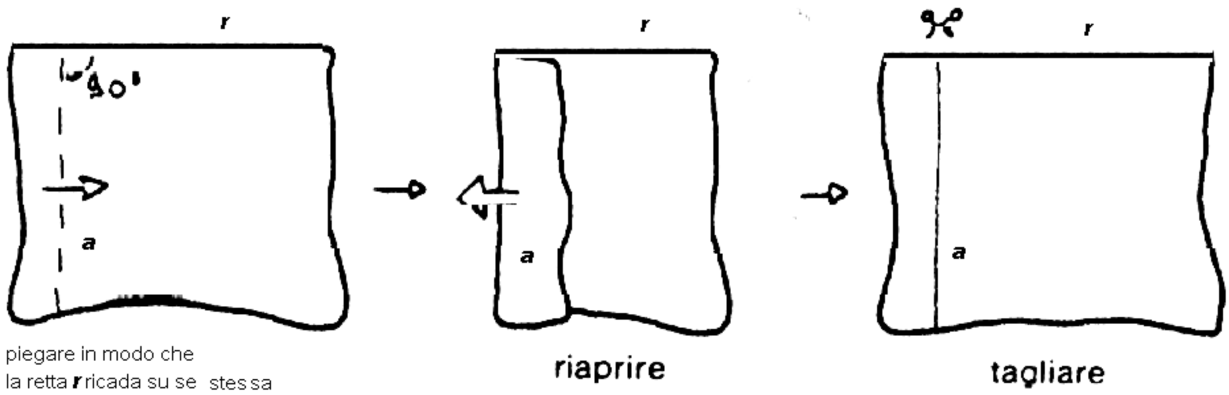
RETTANGOLO

Problema: partendo da un foglio qualsiasi, ottenere un rettangolo.



Ovvio fin qui?
Fino ad un certo punto. Perché piegando il foglio la traccia è rettilinea?
Se accettiamo che una piegatura della carta dia luogo ad una *isometria* (ma perché?) basta osservare che i punti della traccia sono tutti (e soli) i punti uniti dell'isometria, che peraltro muove altri punti: un'isometria non identica che abbia più di un punto unito è una simmetria assiale, e l'insieme dei punti uniti è l'asse della simmetria (quindi una retta).
Di fatto, la piegatura del foglio (e qui la cosa comincia a farsi interessante!) offre molto di più che una traccia rettilinea. Vediamo come da un foglio con un lato rettilineo si passa a un foglio con due lati rettilinei fra loro ortogonali.



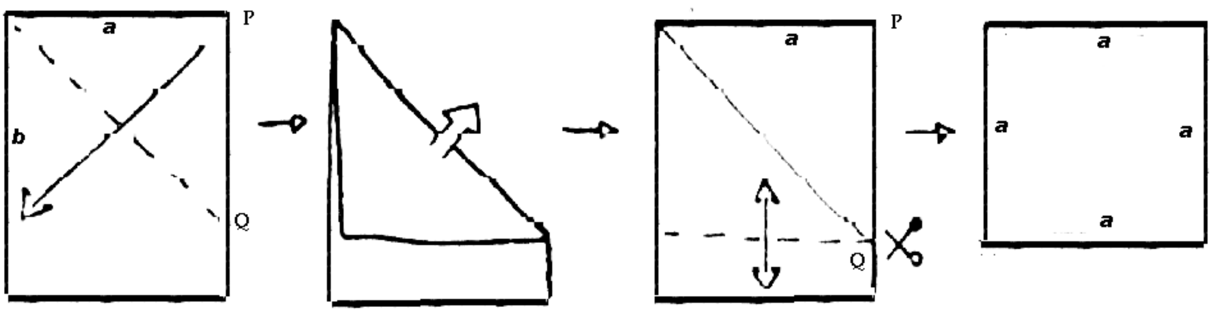
Perché l'angolo ottenuto è un angolo retto?
Perché la piegatura della carta (lasciando come traccia un segmento appartenente alla retta *a*) implementa la simmetria assiale di asse *a*. Due punti del foglio che vengano a combaciare dopo la piegatura si corrispondono nella simmetria assiale di asse *a*.
Noi pieghiamo il foglio in modo che il lato rettilineo già ottenuto, diciamo *r* (vedi figura), venga a combaciare con se stesso; cioè realizziamo una simmetria assiale con asse *a* per la quale la retta *r* viene mutata in sé. Ma ciò significa che le rette *r* e *a* sono ortogonali!

Ripetendo altre due volte il procedimento si ottiene un rettangolo.

(Perché bastano altre due volte, cioè perché l'ultimo angolo viene retto "gratis" ?)

QUADRATO

Problema: partendo da un foglio rettangolare, ottenere un quadrato.



La piegatura, come si è già osservato, realizza una simmetria assiale. Qui sfruttiamo il fatto che ogni simmetria assiale è una isometria, quindi conserva le misure sia dei segmenti sia degli angoli.
La piegatura porta il segmento PQ nel segmento tratteggiato, il quale

(1) è ortogonale al lato b (perché l'angolo retto con vertice in P viene trasformato dalla nostra simmetria assiale in un angolo retto!) e dunque

(2) è parallelo al lato a, e pertanto

(3) divide il rettangolo di partenza in due rettangoli, cosicché

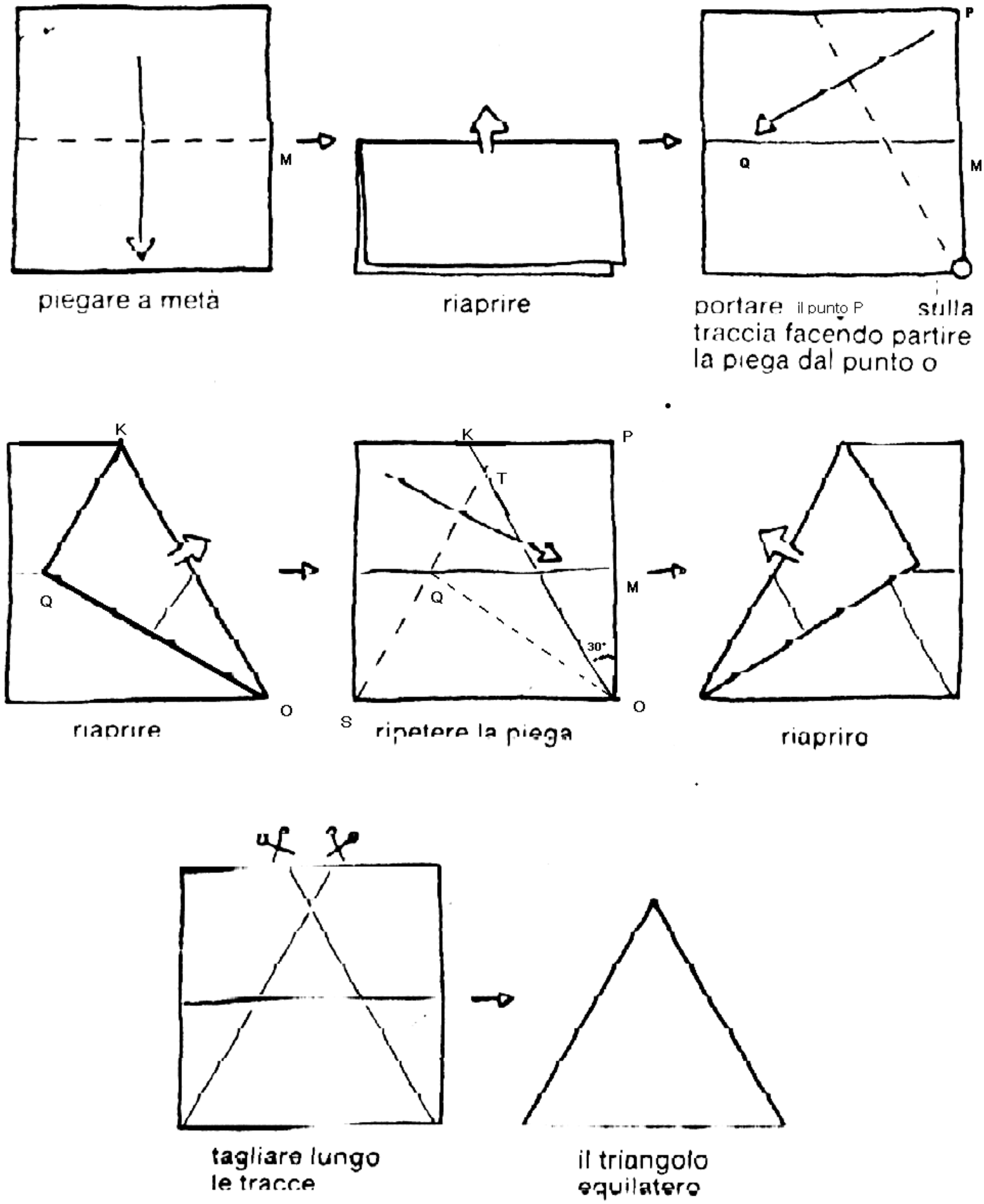
(4) ha la stessa lunghezza del lato *a*. Infatti in un rettangolo lati opposti hanno la stessa lunghezza.

Ma allora PQ, che nella simmetria assiale realizzata dalla piegatura viene trasformato nel segmento tratteggiato, ha anch'esso la stessa lunghezza del lato a. Pertanto il rettangolo superiore ottenuto tagliando lungo il segmento tratteggiato ha due lati consecutivi uguali, e dunque è un quadrato (perché?).

Vale la pena di soffermarsi a notare come si individua in pratica quello che abbiamo chiamato "segmento tratteggiato". Esso è individuato chiaramente al momento della piegatura, ma dopo aver riaperto il foglio resta traccia soltanto del punto Q. Quel che si fa adesso è piegare *nel punto* **Q** in modo da portare il lato opposto al lato *b* a ricadere su se stesso; si realizza cioè una simmetria assiale che muta in se quel lato; l'asse di simmetria pertanto è (la retta passante per Q e) ortogonale a quel lato. Siccome avevamo osservato che il "segmento tratteggiato" (passa per Q ed) è ortogonale al lato b (e quindi al suo opposto), l'asse di questa simmetria individua proprio il "segmento tratteggiato".

TRIANGOLO EQUILATERO

Problema: partendo da un foglio quadrato, ottenere un triangolo equilatero.



Per la simmetria della costruzione, basta far vedere che l'angolo SOT (cioè SOK) è di 60°.
Ossia che l'angolo KOP è di 30°.
Ossia che l'angolo QOP è di 60°: infatti la simmetria assiale realizzata dalla piega per O porta l'angolo POK nell'angolo QOK, cioè OK è la bisettrice dell'angolo QOP.
Dunque basta far vedere che l'angolo QOP, cioè QOM, è di 60°.

Consideriamo il triangolo QOM. Esso è rettangolo perché QM è per costruzione ortogonale a OP. Inoltre l'ipotenusa OQ è uguale al lato del quadrato di partenza, quindi è il doppio (sempre per costruzione di M) del cateto OM. E dunque l'angolo QOM è di 60°.

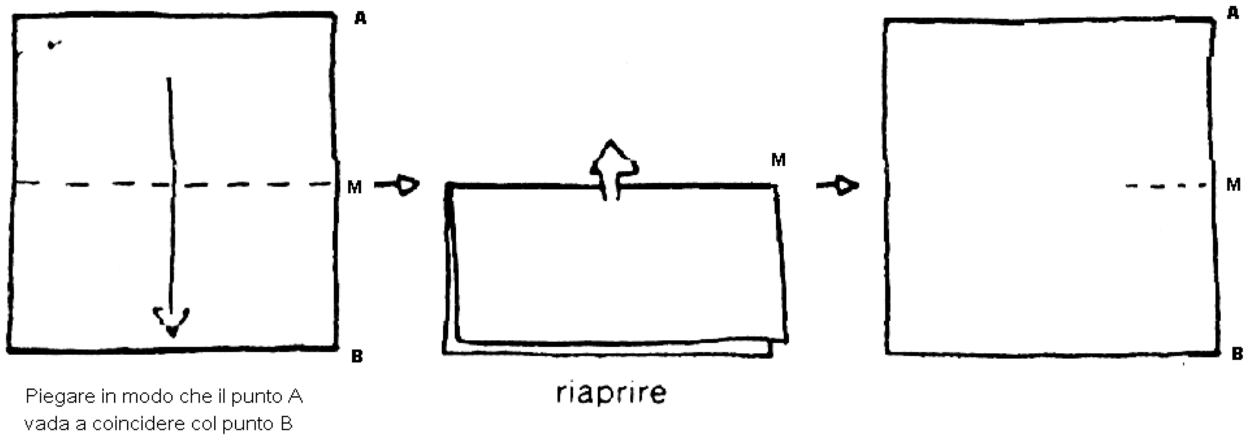
Osservazione: Questa costruzione, vista così, non è soddisfacente. Infatti prima si fanno le pieghe senza capire perché, poi si spiega che tutto funziona.

La stessa osservazione si può fare per la trisezione del generico angolo, che presentiamo nelle prossime pagine.

DIVIDERE UN SEGMENTO IN n PARTI UGUALI

Problema: partendo da un foglio rettangolare, dividere uno dei suoi lati in *n* parti uguali.

Osservazione: sappiamo farlo se $n=2$:



Infatti la piegatura realizza una simmetria assiale, che è una isometria, che porta A in B e lascia fermo M. Dunque AM viene trasformato in MB e quindi i due segmenti sono uguali.

Ma allora sappiamo farlo anche se $n = 4$, se $n = 8$, se *n* è qualsiasi potenza di 2: basta ripetere il procedimento per ciascuno dei sottorettangoli ottenuti.
OSSERVAZIONE IMPORTANTE: le rette che si tracciano con queste piegature sono tutte ortogonali al lato AB, perché sono assi di simmetrie assiali che mutano in sé il lato AB; e dunque sono tutte parallele fra loro.

Supponiamo ora che *n* NON sia una potenza di 2. C'è però certamente una potenza di 2 più grande di *n*. (Perché?)
Sia 2^k questa potenza di 2. Prendiamo il nostro foglio rettangolare, e dividiamo in 2^k parti uguali il lato che NON ci interessa.
Possiamo "tagliar via" (o trascurare in altro modo, ad esempio ripiegando opportunamente il foglio) le parti in eccesso rispetto a *n*, che sono 2^k-*n*. Adesso abbiamo un foglio rettangolare in cui

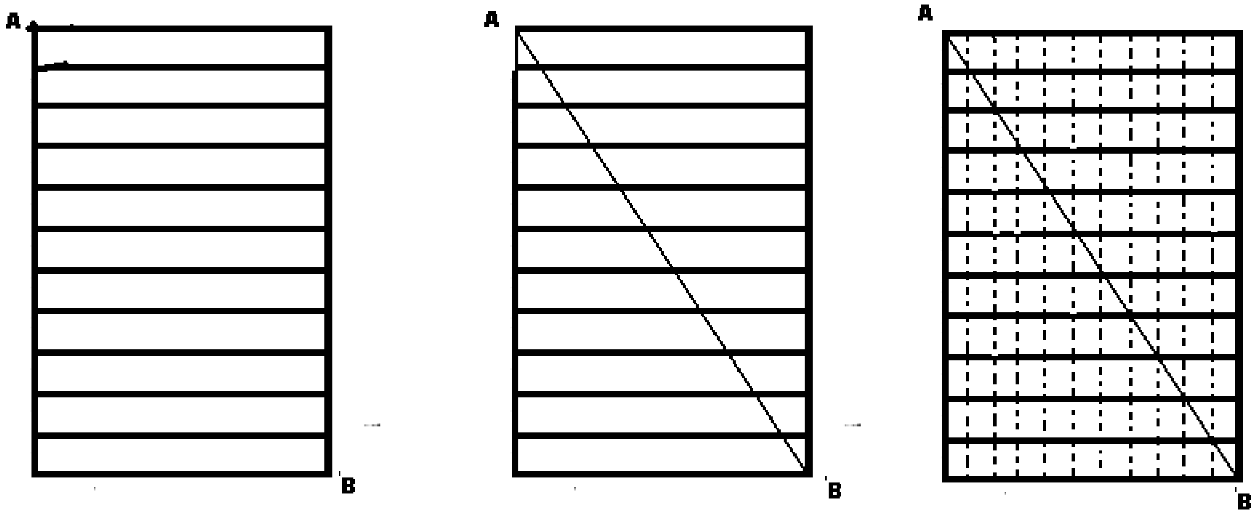
- uno dei lati è quello che vogliamo dividere in n parti uguali

- il lato adiacente è diviso già in n parti uguali

Il nostro foglio rettangolare, per capirsi, è dunque più corto di quello di partenza. Il nostro problema adesso è: come "trasferire" la suddivisione in n parti uguali del lato che NON ci interessa sul lato che invece ci interessa?

Si usa il teorema di Talete.
Pieghiamo il foglio secondo la retta che unisce due vertici opposti (AB nel disegno qua sotto). La traccia della piegatura individua i punti di intersezione con le rette già tracciate, che dividono in *n*

parti uguali il lato NON interessante. Per il teorema di Talete, questi *n*-1 punti dividono anche il segmento AB in *n* parti uguali.
Ora, per ciascuno di questi *n*-1 punti pieghiamo la carta in modo da portare su se stesso il lato che vogliamo dividere: si ottengono le *n*-1 rette tratteggiate che si vedono in figura.



Queste rette "tratteggiate" sono tutte ortogonali al lato che vogliamo dividere, e quindi sono tutte parallele fra loro.
Ancora per il teorema di Talete, il lato che ci interessa viene diviso in *n* parti uguali.

Osservazione: anche questa costruzione viene "offerta", ma mi sembra meno brutale di quella del triangolo equilatero...