La funzione blancmange è continua ma mai derivabile

1. Introduzione

Per la definizione, per molti disegni e per approfondire la conoscenza della funzione blancmange (budino?) b guardate le prime pagine dell'articolo di David Tall dedicatole.

La sua continuità segue dal fatto che b è la somma di una serie totalmente convergente (nella norma del sup) di funzioni continue. Infatti

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |b(x)| \le \sum_{i=1}^{+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2^{i-1}} f_1\big(2^{i-1}x\big) \right| \le \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}} < +\infty.$$

La somma di una serie totalmente convergente è continua per noti teoremi.

2. Un nuovo modo di pensare all'esser derivabile

Per quanto riguarda la non derivabilità un punto cruciale della dimostrazione è il seguente modo di pensare l'essere derivabile introdotto da D. Tall.

Teorema 2.1. *Supponiamo che una funzione f sia definita in un insieme contenente un intervallo $[a-d, a+d]$ e sia derivabile in $x = a$. Allora per ogni scelta dei numeri positivi he w esiste un intervallo $[a-\lambda, a+\lambda]$ tale che il grafico $y = f(x)$ per x in questo intervallo dopo l'operazione di zoom (centrata in $(a, f(a))$ di fattore w/λ giace tra due linee parallele di pendenza $f'(a)$ e separate tra di loro da una distanza verticale $2h$.*

Quindi $2h$ è l'ampiezza verticale della striscia e $2w$ è la dimensione orizzontale dell'intervallo dopo l'operazione di zoom. Il fattore di zoom è tale che un piccolo rettangolo centrato in $(a, f(a)$, con i lati paralleli agli assi coordinati e avente il lato orizzontale lungo 2λ viene trasformato dallo zoom in un rettangolo centrato ancora in $(a, f(a)$ ma avente il lato orizzontale lungo $2w$.

Dimostrazione. Se x, y sono le coordinate iniziali e x', y' indicano le coordinate dopo lo zoom si ha

$$\begin{aligned} x' - a &= \frac{w}{\lambda}(x-a); \\ y' - f(a) &= \frac{w}{\lambda}(y - f(a)). \end{aligned}$$

Se $f_{\text{zoom}}(x')$ indica la funzione espressa nelle coordinate dopo lo zoom il fatto che il suo grafico sia dentro la striscia definita nel teorema equivale a dire che

$$f(a) + f'(a)(x'-a) - h \le f_{\text{zoom}}(x') \le f(a) + f'(a)(x'-a) + h \qquad \forall x' \in [a-w, a+w]. \tag{2.1}$$

E' questa la disuguaglianza che dobbiamo dimostrare. Sia $\epsilon = h/w$. La definizione di derivabilità dice che esiste $\lambda = \lambda(\epsilon) = \lambda(h, w)$ tale che

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \epsilon \qquad \forall x : 0 < |x-a| \le \lambda.$$

Questa disuguaglianza può essere riscritta in modo equivalente come

$$\big|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\big| < \epsilon|x-a| \qquad \forall x : |x-a| \leq \lambda. \tag{2.2}$$

La relazione che intercorre tra $f_{\text{zoom}}(x')$ e $f(x)$ è

$$f_{\text{zoom}}(x') - f(a) = \frac{w}{\lambda}\left(f\left(a + \frac{\lambda}{w}(x'-a)\right) - f(a)\right).$$

Se adesso esprimiamo (2.2) in termini di $f_{\text{zoom}}(x')$ otteniamo

$$\big|f_{\text{zoom}}(x') - f(a) - f'(a)(x'-a)\big| < \epsilon|x'-a| \qquad \forall x' : |x'-a| \leq w. \tag{2.3}$$

Poichè abbiamo scelto $\epsilon = h/w$ la disuguaglianza (2.3) implica (2.1). $\square$

La disuguaglianza del teorema, cioè (2.1), esprime il fatto che f_{zoom} si discosta poco da una funzione lineare. Questo puo' essere reso quantitativo nel seguente modo. Siano z_1, z_2 due elementi arbitrari di $[a-w, a+w]$ e calcoliamo la differenza

$$f_{\text{zoom}}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - \frac{f_{\text{zoom}}(z_1) + f_{\text{zoom}}(z_2)}{2}.$$

Se f_{zoom} fosse lineare tale differenza sarebbe nulla. La condizione (2.1) implica facilmente che tale differenza è piccola, precisamente implica

$$-2h \leq f_{\text{zoom}}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - \frac{f_{\text{zoom}}(z_1) + f_{\text{zoom}}(z_2)}{2} \leq 2h. \tag{2.4}$$

3. Mai derivabile

Ci sono tre proprietà della funzione b che sono cruciali nella dimostrazione della non derivabilità. Tall le spiega nella prima parte del suo articolo. Ci riferiamo al fatto che comunque si scelga $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$b(x) = b_n(x) + \frac{1}{2^n} b(2^n x), \tag{3.1}$$

al fatto che

(3.2) la funzione b_n è lineare in ogni intervallo $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$, dove $m \in \mathbb{Z}$,

e alle uguaglianze

$$b(0) = b(1) = 0 \quad \text{e} \quad b\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Supponiamo adesso che b sia derivabile in $x = a$. Scegliamo $w = 10.5$ (in modo che $2w$ cm. sia l'ampiezza del lato corto di un foglio A4) e

$$h < 10.5/8. \tag{3.4}$$

Sia $[a-\lambda, a+\lambda]$ l'intervallo corrispondente nel teorema precedente a queste due scelte. Sia adesso n il più piccolo naturale tale che esista $m \in \mathbb{N}$ con

$$a - \lambda \leq \frac{m}{2^n} < \frac{m+1}{2^n} \leq a + \lambda$$

Questa disuguaglianza implica $1/2^n \leq 2\lambda$, e il fatto che n sia il più piccolo naturale per cui l'inclusione vale implica che $1/2^{n-1} > \lambda$. Quindi

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\lambda 2^n} \leq 2 \tag{3.5}$$

Nella decomposizione (3.1) chiamiamo per semplicità $g(x) = 1/2^n b(2^n x)$. Il fatto che b sia periodica di periodo 1, che $b(0) = b(1) = 0$ e che $b(1/2) > 1/2$ implicano

$$g\left(\frac{m}{2^n}\right) = g\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = 0, \quad g\left(\frac{m+(m+1)}{2\,2^n}\right) > 1/2.$$

Siano adesso z_1 e z_2 le immagini tramite la dilatazione di fattore $10.5/\lambda$ di $m/2^n$ e $(m+1)/2^n$ rispettivamente. Ovviamente $z_1, z_2 \in [a-w, a+w]$. Calcoliamo adesso la differenza

$$b_{\text{zoom}}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - \frac{b_{\text{zoom}}(z_1) + b_{\text{zoom}}(z_2)}{2}. \tag{3.6}$$

Essa è la somma delle corrispondenti differenze per $(b_n)_{\text{zoom}}$ e g_{zoom}. Poichè $(b_n)_{\text{zoom}}$ è lineare in $[z_1, z_2]$ si ha

$$(b_n)_{\text{zoom}}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - \frac{(b_n)_{\text{zoom}}(z_1) + (b_n)_{\text{zoom}}(z_2)}{2} = 0,$$

mentre, per quanto scritto prima, per (3.5) e per (3.3) si ha

$$\begin{aligned} g_{\text{zoom}}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - \frac{g_{\text{zoom}}(z_1) + g_{\text{zoom}}(z_2)}{2} &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1) - \frac{0+0}{2} \\ &= \frac{10.5}{2\lambda}\left(\frac{m+1}{2^n} - \frac{m}{2^n}\right) \\ &\geq \frac{10.5}{4}. \end{aligned}$$

Allora complessivamente possiamo concludere che la differenza in (3.6) è maggiore di $10.5/4$. Questo fatto contraddice (2.4) e (3.4) e prova che b non è derivabile in $x = a$.

Gabriele Bianchi, 24 Marzo 2018.