Un dialogo sulla necessità del sistema dei numeri reali.

Come ogni studente di matematica sa, nella gerarchia dei sistemi numerici che vanno $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, (cioè interi positivi, interi, razionali, reali, numeri complessi) il salto più grande nella sofisticazione è quello tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Per comprendere correttamente i numeri reali, sei costretto a pensare ai limiti, mentre gli altri salti (compreso quello da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$) implicano solo manipolazioni algebriche finite. Perché ci preoccupiamo di fare questo sforzo? In ogni caso, come sono "reali" i numeri reali? La maggior parte del dialogo che segue è tra tre personaggi immaginati:
M, un matematico che dà per scontati i numeri reali,
S, uno scettico che non è disposto a conoscere nulla senza essere assolutamente convinto che sia necessario, e
U, uno studente universitario chi ha recentemente imparato l'analisi di base.
Verso la fine, un logico,
L, cerca di risolvere alcuni dei problemi. (Le mie scuse se, nella mia ignoranza, ho messo delle parole nella bocca del logico che nessun logico che si rispetti avrebbe pronunciato.)

Parte I.

La necessità di numeri reali specifici.

S. Stavo guardando un libro di matematica oggi e ho visto un sacco di cose complicate su campi ordinati, tagli di Dedekind, sequenze di Cauchy - qualunque cosa potessero essere. Sicuramente non ho bisogno di imparare tutto questo solo per capire “numeri semplici”?

M. Bene, i numeri reali non sono così semplici come sembrano.

S. Questo era chiaro dal libro che ho visto, ma perché preoccuparsi di loro?

M. Quale sarebbe l'alternativa? I greci pensavano di potevano cavarsela con i numeri razionali e poi scoprirono che la radice quadrata di due non era razionale. In altre parole, se metti tutti i punti razionali su una linea, scoprirai di aver lasciato degli spazi vuoti.

S. Certo che non ne avrò bisogno.

M. Sì, ne avrai bisogno - ad esempio, non avrai incluso la seconda radice.

S. Questo non è certo un buco. È solo un singolo numero perso.

M. OK, per "gap" non intendevo un intero intervallo senza numeri razionali. Volevo solo dire che avresti perso alcuni numeri come la radice di 2 e molti altri.

S. E cosa ti rende così sicuro che quei numeri effettivamente esistano? Parli come se i greci scoprissero un oggetto oggettivamente esistente, la radice quadrata di due, che non era razionale. Ma in che senso l'hanno scoperto? Hanno costruito un quadrato esatto e misurato la sua diagonale? Certo che no: la precisione infinita è impossibile. Non ha senso dire che la lunghezza di un oggetto fisico reale è irrazionale. Forse Platone credeva in un regno spirituale pieno di oggetti geometrici perfetti, ma io no.

M. Neppure io, e sono d'accordo con molto di quello che dici. In effetti, in pratica non è solo la precisione infinita che è impossibile: non possiamo misurare nulla a più di circa 15 cifre significative. E quando i computer modellano le situazioni fisiche, si accontentano di numeri razionali, ottenuti da troncamenti. Ma penso che tu stia fraintendendo la relazione tra matematica e fisica. Non introduciamo i numeri reali perché alcuni oggetti fisici hanno effettivamente lunghezze irrazionali. Piuttosto, lo facciamo perché sono un modello eccezionalmente buono per la lunghezza fisica. Con i reali tutto funziona perfettamente - e si può contrastare con una simulazione al computer, dove vengono fatte complesse approssimazioni per tutto il tempo.

S. Quindi quello che stai dicendo è che anche se la radice quadrata di due non ha un'esistenza fisica diretta, essa è comunque un costrutto matematico molto conveniente che ci permette di parlare di lunghezze di diagonali in modo economico?

M. Sì.

S. Bene, sono d'accordo, ma non penso che sia una giustificazione per l'intero sistema dei numeri reali. Non puoi semplicemente prendere i razionali più alcuni altri numeri importanti come le radici quadrate di due, tre, cinque e così via?

M. Dipende da cosa intendi per "e così via".

S. Va bene, prenderò tutte le possibili radici di tutti i numeri razionali.

M. Questo non basterà, perché per esempio la radice quadrata di due più la radice quadrata di tre non è di per sé una radice di qualcosa.

S. Bene, metti anche quello, e tutte le somme e i prodotti delle radici dei numeri.

M. E cosa mi dici delle radici delle cose che trovi in questo modo? Ad esempio, qualcosa di simile $\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

S. Sì, aggiungi anche quelle. In effetti, inserisci qualsiasi numero che puoi ottenere da numeri razionali usando addizione, moltiplicazione e le loro radici.

M. E pensi di poter vivere con questo come sistema numerico?

S. Non vedo perché no.

M. Bene, per cominciare non puoi nemmeno risolvere tutte le equazioni polinomiali in quel sistema. Non è affatto ovvio che non si possa, ma in realtà ci sono polinomi di grado cinque con coefficienti interi che non hanno soluzioni che possono essere costruite con numeri razionali usando solo addizioni, moltiplicazioni e radici.

S. Non è qualcosa che ha a che fare con Galois?

M. Sì. L'insolubilità dei polinomi di quinto grado era stata dimostrata in realtà da Abel, ma Galois estese notevolmente la scoperta di Abel in modo che si potessero analizzare i singoli polinomi in modo completamente sistematico.

U. Ciao. Sto interrompendo?

M. Assolutamente no. Sto cercando di convincere S qui dell'utilità dei numeri reali. Penso che stia per concedere che si ha bisogno almeno di quelli algebrici.

S. Quali sono quelli algebrici?

M. Sono tutte soluzioni di equazioni polinomiali in cui i polinomi hanno coefficienti interi.

S. Sì, sono felice con quelli, anche se mi viene in mente una domanda. Se ci sono dei polinomi di grado 5 che non puoi risolvere in modo ovvio, perché sei così sicuro di avere delle soluzioni?

M. Forse U può rispondere a questa domanda per noi.

U. In effetti posso davvero, come abbiamo fatto di recente a lezione. Considera il polinomio di grado 5

$$P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

Senza perdita di generalità consideriamo il coefficiente "a" positivo, quindi non è difficile dimostrare che quando x è grande e positivo lo è anche P(x), e quando x è grande e negativo, lo è anche P(x). Quindi, per il teorema del valore intermedio, da qualche parte nel mezzo ci deve essere qualche x dove P(x)=0.

S. Mi stai lasciando indietro. Qual è il teorema del valore intermedio?

M. Non ti darò un enunciato preciso per ora, ma penso di poterti convincere in questo caso. Basti pensare al grafico del polinomio di cui stiamo parlando. È continuo, nel senso che non fa salti improvvisi. Se per alcuni valori è al di sotto dell'asse x e per altri è sopra, allora in mezzo deve attraversare l'asse da qualche parte, perché non salta, e dove attraversa quest'asse hai una soluzione di P(x)=0.

S. Sembra abbastanza convincente. Quindi includiamo tutti i numeri algebrici. In effetti, sarei stato felice di concedertelo anche prima. È tutto questo strano trattamento teorico di numeri reali che non fa per me (non ne vedo il motivo).

M. Potrei, suppongo, sottolineare che "e" e "π" non sono algebrici, ma vorrei prima provare a spiegare perché è necessario un approccio più astratto e teorico ai numeri. Risultati come il teorema del valore intermedio non sono veri per i numeri razionali - per esempio, il grafico di x^2-2 non attraversa l'asse x in un punto razionale - e quando inizi a cercare di giustificare la tua intuizione che questa cosa è vera, ti ritrovi a inventare il numeri reali.

Parte II.

La necessità di una teoria generale dei numeri reali.

S. Sembra interessante, anche se un po' difficile da immaginare.

U. Mi interessa anche quello. Stai dicendo che la definizione del sistema dei numeri reali è in qualche modo forzata?

M. Sì. Voglio dire, anche un concetto di base come la continuità non ha senso senza i numeri reali.

U. Perché no?

M. Bene, prendi la funzione f definita sui numeri razionali $\mathbb{Q}$ di $f(x)=1$ se $x^2<2$ e $f(x)=0$ altrimenti. Questa funzione ha chiaramente dei salti a $+\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ (non che io stia dicendo che quelli sono numeri razionali) e tuttavia, secondo la definizione di continuità, f è una funzione continua.

U. Hmm, vediamo. Se x è un numero razionale, x non è uguale alla radice due, quindi x è contenuto in un piccolo intervallo in cui f è costante. Quindi f è continuo in x. Ciò è vero per tutti i razionali x, quindi f è continua.

S. Di che diavolo stai parlando? La funzione che hai definito ha due grandi salti e stai dicendo che è continua?

M. All'inizio sembra strano, ma il punto è che la continuità è definita come una proprietà locale. Intuitivamente, una funzione f è continua in x se f(y) è vicino a f(x) ogni volta che y è vicino a x. Quindi diciamo che è continuo se è continuo in ogni x.

S. Bene, dovrei pensarci su, ma tutto quello che posso dire è che se la tua definizione di continuità rende la funzione che hai definito prima continua, allora non è una definizione molto buona.

M. Questo è quello che potresti pensare, ma in realtà si rivela essere un'ottima definizione. Non coincide abbastanza con la nostra idea intuitiva di cosa dovrebbe essere una funzione continua - qualcosa come una funzione il cui grafico è possibile disegnare senza sollevare la matita dal foglio - ma fa un buon lavoro in quella direzione, e oltre un centinaio anni hanno dimostrato che è in effetti la formalizzazione "corretta" di quell'idea.

U. Aspetta, ci penso. S ha un ragione in questo caso. La definizione di continuità è impostata per i numeri reali, quindi difficilmente conta come un'obiezione ai numeri razionali che dà risultati strani. Come fai a sapere che non esiste una definizione formale che funzioni meglio per i razionali?

M. Come cosa?

U. Bene, il problema che abbiamo avuto con il salto alla radice di due era che non c'era permesso di dire quello che tutti sapevamo essere il caso - che la funzione ha un salto alla radice due. Possiamo guardare un grafico e questo salto risalta agli occhi. Non si può identificare questo salto dicendo che da un lato la funzione è grande e dall'altro lato è “improvvisamente” piccola?

M. E cosa intendi con “improvvisamente”?

U. Qualcosa del genere: “per ogni d>0 c'è una coppia x , y tale che $[y-x|<d$, e tuttavia f(x)=1 e f(y)=0.” Quindi x e y sono vicini, mentre f(x) e f(y) non sono vicini.

S. Volevo dire qualcosa del genere. Puoi ancora fare un salto anche se in realtà non esiste un punto razionale dove si verifica il salto.

M. Quindi qual è esattamente la tua definizione?

U. Sembra che ci siano molte possibilità. Se cerchiamo di evitare di focalizzarci su un singolo punto (perché il punto che vogliamo guardare potrebbe essere irrazionale) potremmo semplicemente dire che f è continua se per ogni e>0 esiste d>0 tale che $\lceil f(x) - f(y) \rceil < e$ ogni volta $\lceil xy \rceil < d$.

M. Quella che hai dato è in effetti una definizione rigorosa, ma è quella di continuità uniforme, che è sottilmente ma allo stesso tempo fortemente più rigida della continuità stessa.

U. Quindi stai dicendo che ci sono funzioni continue che non risulterebbero continue con quella definizione?

M. Sì, ce ne sono molte. Ad esempio x^2 definito su tutti i razionali.

U. Oh si. Va bene, ecco un'altra definizione che usa le successioni. Si vorrebbe dire che f è continua se $f(x_n)$ tende a $f(x)$ ogni volta che x_n tende a x, ma ciò porta allo stesso problema che la x in questione potrebbe non essere razionale. Ma non possiamo semplicemente parlare di successioni che dovrebbero essere "convergenti" senza parlare dei loro limiti? Il nostro docente ci ha detto un buon modo per farlo l'altro giorno - parla delle successioni di Cauchy. Questo sembra dare una buona definizione di una successione di razionali che è "convergente ma non necessariamente razionale". Quindi, cose ne pensi di dire che “f è continua se mappa sequenze di Cauchy in sequenze di Cauchy”?

M. Non funziona molto bene. Ad esempio, sia f(x) definito come $\frac{1}{x}$ sull'insieme di tutti i razionali strettamente positivi. Questa risulta continua, ma la successione di Cauchy $\left(\frac{1}{n}\right)$ mappa la successione (n), che non è di Cauchy.

U. Sì, ma non funziona almeno per le funzioni definite su tutti i razionali? Supponiamo che f sia la restrizione a $\mathbb{Q}$ di una funzione continua definita su $\mathbb{R}$. Quindi mappa successioni convergenti in successioni convergenti. Ma convergente è equivalente a “di Cauchy” in modo da mappare le successioni di Cauchy nelle successioni di Cauchy. Viceversa, se f mappa da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$ (o anche da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$) e prende successioni di Cauchy in successioni di Cauchy, allora possiamo estendere la definizione a $\mathbb{R}$ come segue. “Dato un numero reale x, prendi una successione x_n di razionali che converge in x e quindi mappa x fino al limite di $f(x_n)$. Questo esiste perché è una successione di Cauchy - che a sua volta deriva dal fatto che (x_n) è di Cauchy. Anche quel valore di f(x) è ben definiti o saremmo in grado di mettere insieme due successioni e contraddire la proprietà che stiamo assumendo di f.

M. Quello che dici è giusto, e funziona per ogni funzione definita su un qualsiasi intervallo chiuso di numeri razionali. Ma non mi piace molto perché in pratica stai introducendo di nascosto i numeri reali attraverso la porta sul retro. Dopo tutto, cos'è è un numero reale se non una sequenza di razionali di Cauchy? Tornando alla funzione che ha un salto nella radice due, stai suggerendo di identificare la cosiddetta "discontinuità" costruendo una sequenza di razionali che converge in radice due e forse si alterna tra essere più grande di radice due e più piccola, in modo che f di quella successione si alterni tra 0 e 1. Quindi fai finta che la radice di due non esista e ti limiti ad affermare che la tua sequenza è di Cauchy. Questo mi sembra proprio un modo artificiale per non dire cosa sta realmente accadendo.

S. Bene, penso che quando hai detto che f era continua per il fatto che non ti era permesso parlare del luogo in cui compiva un salto, stavi artificialmente non dicendo quello che stava succedendo.

U. Ecco un'altra definizione. Data una successione nidificata (decrescente, caso 2) I_n di intervalli chiusi di numeri razionali con lunghezze tendenti a zero, guarda le loro immagini $f(I_n)$. Affinché f sia continua si vorrebbe che l'intersezione degli $f(I_n)$ sia vuota o un singoletto.

NOTA:

Una "successione nidificata" è una successione ⟨Sk⟩ di insiemi (intervalli) tali che vale:

1) ∀k∈N:Sk⊆Sk+1

oppure vale

2) ∀k∈N:Sk⊇Sk+1

M. Non mi piace per la stessa ragione. Stai solo identificando un numero reale - l'intersezione di I_n - senza ammetterlo.

S. Se posso dirlo, c'è qualcosa di molto strano nella tua posizione. Prendi lo "step", altamente artificiale e non canonico, di definire un numero reale come una classe di equivalenza delle successioni di Cauchy sui razionali, o di particolari successioni di intervalli annidati, e poi ci accusi di essere artificiali quando non ci eccitiamo con la tua definizione . Quale è più artificiale? Dare una semplice definizione di continuità in termini di successioni di Cauchy o essere così trasportati da iniziare a credere che le sequenze di Cauchy siano numeri reali?

U. Comunque, che ne dici di tornare alla prima cosa che ho detto? Ho appena ricordato che tutte le funzioni continue sono uniformemente continue quando le si limita a un intervallo chiuso e limitato. Quindi, perché non definire "una funzione f da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$ è continua se la sua limitazione a qualsiasi intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua"? Quello che ho detto prima va bene finché guardi i pezzi finiti di Q. E ora non vedo dove io stia parlando implicitamente di numeri reali.

M. Hmm. Penso che tu abbia ragione. OK, come definiresti la differenziabilità?

U. Bene, diamo un'occhiata a una funzione che è, tecnicamente parlando, differenziabile, ma che "non dovrebbe" esserlo. Che ne dici di $f(x)=max\{x^2-2,0\}$? Voglio dire che questa funzione f non è realmente differenziabile perché non è approssimativamente lineare attorno alla radice due. Per dimostrarlo, potrei facilmente costruire una coppia di successioni razionali (a_n) e (b_n) che tendono a radice di due rispettivamente dal basso e dall'alto, in modo che $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{(b_n-a_n)}$ non converga. Ma probabilmente mi dirai che sto parlando implicitamente dei reali quando introduco queste successioni.

M. Sì, certo. E se provi a copiare l'idea della continuità uniforme, ti imbatterai nella difficoltà che non tutte le funzioni differenziabili sono uniformemente differenziabili, anche in un intervallo limitato.

U. Che cosa significa "uniformemente differenziabile"?

M. Differenziabile in x vuol dire che per ogni e>0 esiste una d>0 tale che per tutti gli y tali che $[y-x]<d$ abbiamo $f(y)=f(x)+(y-x)f'(x)+c$, dove "c" è al massimo $e[y-x]$. Quindi per renderlo uniforme, possiamo chiedere a "d" di non dipendere da x. Cioè, per tutti gli e>0 esiste una d>0 tale che per tutti gli x, y abbiamo la diseguaglianza $[f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)]<e[y-x]$ ogni volta $[y-x]<d$. Ma questa non è una grande

definizione perché equivale a dire che $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}$ tende a f '(x) uniformemente come h tende a zero. Ma se f è differenziabile allora le funzioni $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}$ sono continue, quindi f ' è continua, e vediamo che le funzioni uniformemente differenziabili sono automaticamente continuamente differenziabili.

U. Non mi piace questa definizione perché richiede che tu sappia in anticipo quale sia la derivata f'(x).

M. In tal caso, potresti dire qualcosa del genere. "Differenziabile" significa "localmente approssimativamente lineare". Cosa significa? Bene, se f(x)=u e f(y)=v e z=ax+by per a,b>0 con a+b=1 allora f(z) dovrebbe essere vicino a au+bv, il valore che assumerebbe se f fosse esattamente lineare. Quindi affermare che f è uniformemente differenziabile significa che "per ogni e>0 esiste un d>0 tale che ogni volta | y-x |<d e z=ax+by è una combinazione convessa di x e y abbiamo $[f(z)-af(x)-bf(y)]<e[z-x]$.

U. Questo è molto più bello. Allora, qual è il tuo esempio di una funzione che è differenziabile ma non uniformemente differenziabile?

M. Qualsiasi vecchia sen(1 / x) lo sarà. Prendiamo il vecchio preferito $f(x)=x^2\sin(1/x)$ lontano da 0 e f (0)=0. Che si muove (ondeggia/oscilla) così tanto vicino all'origine che fallisce facilmente entrambe le definizioni di cui sopra.

U. Quindi stai suggerendo che abbiamo bisogno della teoria dei numeri reali per poter parlare della differenziabilità di funzioni sciocche come $x^2\sin(1/x)$? Perché non parlare invece di una differenziabilità uniforme o continua?

M. La mia sensazione è che dovresti rinunciare a numerose (funzioni ??) se tutte le tue funzioni differenziabili dovessero essere continuamente differenziabili. Ma piuttosto che esplorare quella domanda preferirei tornare al teorema del valore intermedio, che a mio avviso fornisce una giustificazione molto più convincente per i numeri reali.

Parte III.

Il Teorema del valor medio

M. Esaminiamo un po '. Siamo tutti d'accordo sul fatto che i razionali da soli sono un po' restrittivi perché ci sono molti numeri utili come radice di due, "e" e pi-greco che sono irrazionali?

U. e S. Sì.

M. Va bene. Ora, se esaminiamo il motivo per cui crediamo in questi numeri, scopriremo che ci sono alcuni metodi che ci piace usare per creare nuovi numeri, e se poi facciamo l'asserzione apparentemente innocente che questi metodi sono effettivamente validi, noi scopriremo che siamo "inciampati" nell'intero sistema dei numeri reali.

S. Come ho detto prima, sembra interessante, ma ci crederò quando lo vedrò.

M. Beh, è molto semplice. Ad esempio, prendiamo la radice quadrata di due. Che cos'è? È il numero (positivo) che elevato alla seconda è pari a due. E perché siamo sicuri che ci sia un tale numero? A causa di un teorema molto utile noto come teorema del valore intermedio.

S. Continui a menzionarlo. Adesso mi dirai cosa dice? M. Forse U. vorrebbe farlo per noi.

U. Va bene. Dice che se f è una funzione continua, a<b sono numeri reali e f(a)=u, f(b)=v, quindi per ogni w compreso tra u e v ci deve essere qualche c tra a e b tale che f(c)=w. In altre parole, se una funzione continua f prende due valori, allora deve prendere tutti i valori "intermedi" tra loro. Più liberamente, se si disegna il grafico di una funzione continua e una parte di essa è al di sotto di una linea orizzontale e un'altra parte sopra di essa, allora da qualche parte il grafico attraversa effettivamente la linea.

M. Grazie. E un buon esempio di ciò è la funzione $f(x)=x^2$. Dato che f(1)=1 e f(2)=4 devono esserci alcune x tra 1 e 2 tali che f(x)=2.

S. Sembra ragionevole, ma perché il teorema del valore medio è vero?

M. Mi interessa che tu lo chieda. Molte persone pensano che sia troppo ovvio per aver bisogno di una prova.

S. Sono d'accordo sul fatto che non è possibile passare da un lato all'altro di una linea senza attraversarla, ma mi sembra un grande passo "passare" da questa affermazione fisica a quella relativa al regno astratto dei numeri. E ciò che mi preoccupa è che il tuo argomento si rivelerà essere circolare. Se il teorema del valor intermedio è vero solo per i numeri reali e non per i sistemi numerici più piccoli, come si può usare per giustificare i numeri reali? Hai bisogno dei numeri reali per giustificarlo.

M. Mi dichiaro felicemente colpevole di ciò. Stai confondendo due tipi di giustificazione. Per dimostrare il teorema del valore intermedio hai bisogno dei numeri reali. Nell'altra direzione, sto usando il teorema del valore intermedio per giustificare i numeri reali in un senso diverso: è un teorema estremamente utile di cui dovremmo fare a meno se facessimo a meno dei numeri reali.

S. Forse hai ragione. Ma è una giustificazione teoricamente deludente. Speravo in qualcosa di più diretto.

M. Questo perché non ho ancora "fissato" un altro punto importante, cioè che il teorema del valor intermedio è solo un travestimento nel linguaggio di fantasia di un'idea che è molto diretta e naturale. Ecco un altro approccio all'esistenza della radice quadrata di due. Basta costruire l'espansione decimale 1.4142135… , prendendo in ogni posto il maggior numero tra 0 e 9 che non rende il quadrato più grande di 2. Questo definisce un decimale infinito e quel numero è definito come la radice quadrata di Due. È interessante notare che questa semplice costruzione è molto simile all'esecuzione di una delle dimostrazioni del teorema del valore intermedio e quando si tenta di giustificare l'affermazione che il numero risultante è pari a due, si scopre che si sta facendo affidamento sulla continuità di x^2 ed efficacemente dimostrando il teorema del valor medio per questo caso speciale. Questo punto è discusso più ampiamente di seguito:
- Esistenza della radice quadrata di due.
- Cosa c'è di sbagliato nel considerare i numeri reali infiniti come i decimali?

S. Supponiamo che lo accetti. Mi impegna davvero sull'intero sistema di numeri reali, come hai detto prima, o solo su alcuni numeri extra speciali come radice di due, "e" e pi-greco?

M. A tutti loro: se t è un numero reale, allora trova una funzione continua che ha un unico zero in t e ti impegna a t.

S. E perché puoi farlo?

M. È banale: basterà prendere la funzione $f(x)=x-t$, per esempio.

S. Non posso credere che tu l'abbia appena detto. Stai seriamente usando la funzione $f(x)=x-t$ per giustificare l'esistenza del numero t?

M. Va bene, punto preso. Ero un po' frettoloso. Torniamo alla discussione di radice di due. Il modo "ingenuo" di costruirlo è produrre la sua espansione decimale. Quando parli dei numeri reali in modo più formale, astrai da questa procedura un principio generale, noto come assioma delle sequenze monotone. Esso ci dice che se (x_n) è una successione crescente di numeri reali ed esiste una z che è più grande di ogni x_n, allora la sequenza converge in un limite x. Non lo definirò con precisione, ma puoi vederlo accadere con la sequenza 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ecc., Che converge alla radice quadrata di due. Questo principio generale è anche molto naturale e più basilare del teorema del valore intermedio. Ti impegna piuttosto al sistema dei numeri reali, perché può essere provato che qualsiasi campo ordinato per cui vale questo assioma deve essere isomorfo al campo dei numeri reali.

S. Mi stai accecando un poco con la scienza, ma se ti capisco bene, possiamo concentrare la nostra attenzione interamente sulla questione se dobbiamo accettare l'assioma delle sequenze monotone.

M. Sì, perché quell'assioma implica tutto il resto dei reali.

S. Mi sento ancora a disagio. Supponiamo ora di prendere un decimale infinito e provare a "giustificarlo". Prendiamo il pi-greco come esempio. Mi dispiace se sembro maleducato, ma sembra che ciò che stai suggerendo sia la seguente assurda giustificazione: considera la sequenza 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, ... e, bingo, questa giustifica pi-greco. Bene, posso vedere che abbiamo una procedura che può essere applicata a qualsiasi decimale infinito, ma difficilmente conta come giustificazione per il pi-greco. Per giustificare il pi-greco vorrei dire che è fondamentale per la trigonometria, che esiste una meravigliosa formula $e^{i\pi}=-1$, e così via.

M. È importante distinguere tra giustificazione di numeri individuali e giustificazione di un sistema numerico. Sono felice di ammettere che la stragrande maggioranza dei numeri reali sono assolutamente inutili. Ma insieme forniscono un sistema numerico abbastanza generoso da contenere tutti i numeri utili. In secondo luogo, e soprattutto, forniscono un contesto in cui gli argomenti che usiamo naturalmente per giustificare l'esistenza di quei numeri utili sono validi. Quindi, se vogliamo definire un nuovo numero con uno di questi argomenti, possiamo farlo. Non dobbiamo cercare di prevedere in anticipo quali numeri saranno utili.

Parte IV.

Cos'è una successione arbitraria?

U. Posso dire una cosa? Capisco quello che stai dicendo, e sono più o meno convinto, ma posso vedere possibili motivi di obiezione. Quello che stai dicendo è all'incirca questo: che quando definiamo un numero irrazionale dobbiamo fare un po 'di analisi - per esempio, mostrare una sequenza di razionali che convergono ad essa, o una funzione continua che ha come radice univoca, oppure un integrale definito che ha esso come come valore. Si scopre che il primo di questi metodi è sempre sufficiente e può anche essere fatto con sequenze monotone. E ora improvvisamente dici che dovremmo permettere che tutte le successioni monotone limitate ("bounded") abbiano limite. Ma forse c'è un assioma più restrittivo che ci darebbe un numero di numeri molto più piccolo, ma ci darebbe comunque tutti quelli utili. Penso che ci sia una certa forza dietro l'obiezione di S. alla giustificazione "sciocca" del pi-greco. Per un numero reale tipico, generico, completamente non specifico, non è facile pensare a una giustificazione ragionevole. Non si potrebbe dire qualcosa del genere in cui convergono tutte le successioni monotone sensate e limitate?

M. Puoi provare, ma prevedo che non lo troverai facile.

U. Non sono sicuro di quello che sto dicendo, ma sono preoccupato che il vero sistema numerico non sia veramente definito correttamente. L'immagine che hai cercato di presentarci è che iniziamo con i razionali, scopriamo che sono inadeguati, introduciamo nuovi numeri, vediamo come lo abbiamo fatto e poi diciamo che questi metodi producono l'intero sistema dei numeri reali.

M. Questo è un ragionevole riassunto.

U. Per dirla in modo più formale, hai un'operazione infinita, $f(x_{1,} x_2 x_{3,} \dots) = \lim x_n$, definita per tutte le successioni monotono limitate, e stai dicendo che i numeri reali sono il sistema più piccolo possibile che contiene i razionali ed è chiuso sotto questa operazione.

M. Esattamente.

U. Va bene, se siamo soddisfatti della nozione di una sequenza monotona limitata.

M. Trovi qualcosa di confuso su questa nozione?

U. Sì, in un certo senso. Non so come articolare ciò che sto dicendo, ma lasciami provare. Supponiamo che x sia un numero reale e pensiamolo come tipico, il che significa ad esempio che è indefinibile. Quindi x determina per noi una sequenza monotona limitata: basta prendere la sua espansione decimale e osservare troncamenti più lunghi e più lunghi. Viceversa, quella sequenza monotona limitata determina x - poiché x è il suo limite. Ma tutto ciò che sembra dirmi è che x e la sequenza monotona limitata sono co-dipendenti - dato uno, ho l'altro. Ma non mi dà idea di quali coppie (x, sequenza convergenti in x) esistano.

M. Stai suggerendo che esistono coppie che non esistono? Se è così, allora non so cosa significano la parola "esistono"!

U. Come ho detto prima, non so come spiegarmi molto bene. Sembra solo che per definire l'operazione di chiusura, si debba parlare di una successione monotona limitata e arbitraria, e tale nozione è virtualmente equivalente alla nozione di un numero reale. Quindi finisci con un'apparente circolarità. E l'effetto di tale circolarità è che non è molto chiaro in che senso esiste la grande maggioranza dei numeri reali. Quando dici "ogni successione monotona limitata" voglio chiedere quali successioni monotone limitate ci sono. Perché dovrei accettare la nozione di una successione monotona limitata arbitraria? In realtà, non credo davvero che tu abbia giustificato i numeri reali - oltre a quelli che possono essere definiti in un modo esplicito.

S. Grazie. Questo è quello che stavo cercando di dire prima.

M. Stiamo entrando in acque torbide qui. C'è qualcosa di misterioso nell'idea di una successione infinita e arbitraria - anche quando è semplicemente costituita da zero e uno. Eppure, una teoria praticabile di numeri reali sembra richiedere che accettiamo che alcuni di essi sono indefinibili, per la semplice ragione che esistono solo una quantità numerabile di definizioni ma una quantità non-numerabile di numeri reali. Questa osservazione esclude quella che potrebbe essere altrimenti un'idea interessante: limitare l'attenzione solo ai numeri reali definibili.

U. Sono un po 'confuso dall'idea che ci siano al più una quantità numerabile di numeri reali definibili. Cosa succede se li metti in una lista in base all'ordine alfabetico delle loro definizioni e poi applichi un argomento ("ordinamento") diagonale? Questo non dà un numero nuovo e definito?

M. Ti ho detto che stavamo entrando in acque torbide. Guarda qui per una discussione dettagliata di questa domanda. Ma la risposta breve è che devi rendere preciso ciò che intendi con una definizione. Se lo fai, allora trovi che il numero diagonale che costruisci non è definibile nel modo in cui erano definiti i numeri nella lista. È più come meta-definibile.

U. Ma in quel caso, non vedo perché non riesco solo a fissare una nozione decente di definizione e limitare l'attenzione a numeri reali definibili. Se poi cerchi di persuadermi che ci sono dei numeri che ho lasciato fuori, ti chiederò di definirne uno per me, e non sarai in grado di farlo. Sarai in grado di definirne uno, ma allora? Perché dovrei preoccuparmi di questo?

M. Perché il tuo insieme sarà numerabile e tutti i teoremi di analisi diventeranno falsi.

U. Ma sarà un problema? I "teoremi di analisi" a cui fai riferimento riguardano oggetti che non mi piacciono e che non hanno un uso ovvio, come le successioni "arbitrarie". Sarei ancora in grado di fare tutte le cose utili, vero? Ad esempio, il teorema del valore intermedio sarebbe vero per le funzioni continue definibili e non sono troppo preoccupato per gli altri. In effetti, potrei finire per parlare esattamente la tua stessa lingua, ma intendere qualcosa di leggermente diverso dalla frase "per tutti le x", che per me significherebbe "per tutte le x definibili", qualunque cosa possa essere l'oggetto x. In effetti, potrei anche dire che i numeri reali non erano non-numerabili! Ciò che intendo con questo nei vostri termini è che non esiste una biezione definibile tra $\mathbb{N}$ e i numeri reali definibili, tale biezione non esiste perché potrei applicare un argomento diagonale e definire un nuovo reale non sta nell'immagine.

M. Sono convinto che il tuo ragionamento abbia una falla da qualche parte, ma non sono ancora del tutto sicuro di dove sia.

L. Mi dispiace di averlo fatto, ma non ho potuto fare a meno di ascoltare alcune delle vostre conversazioni, e penso di poter essere in grado di rispondere ad alcune delle tue domande.

M. Oh si?

L. Bene, la cosa più ovvia da dire è che U. sta per riscoprire la cosiddetta teoria degli insiemi costruibili. I dettagli sono più complicati di quanto U. li sta facendo, ma il pensiero di base suona così: "quando parliamo dell'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme infinito, non è chiaro cosa intendiamo". La maggior parte dei matematici non si preoccupa di ciò e accetta la nozione di "successione arbitraria, qualunque cosa possa rivelarsi". Ma una teoria degli insiemi perfettamente coerente (almeno se la teoria normale degli insiemi è coerente) produce una teoria se si interpreta l'operazione di "power set" ("potenza di un insieme") che ci fornisce tutti i sottoinsiemi definibili di un dato insieme.

U. In che modo ciò è diverso da quello che stavo dicendo?

L. La differenza è che sei troppo resistente a ciò che hai definito meta-definizione. Almeno come Godel ha impostato la teoria degli insiemi costruibili, tu costruisci gli insiemi un livello alla volta. Hai una collezione di formule che puoi usare, e in esse puoi mettere tutti gli insieme che hai definito finora per definirne di nuovi. Usando la numerazione di Godel, puoi persino fare diagonalizzazioni, ma se applichi un argomento diagonale a una serie di insiemi al livello n, ottieni un insieme al livello n+1. E che n non deve essere un numero intero positivo: va avanti fino agli ordinali. Se continui a costruire livelli fino al primo ordinale non numerabile, finalmente arrivi a dimostrare che ci sono innumerevoli ("non-numerabili") sottoinsiemi di numeri naturali.

U. Se ti è permesso un concetto così flessibile di "costruibile", allora chi ti può dire che non hai costruito tutti i sottoinsiemi dei numeri naturali?

L. Non è una domanda facile a cui rispondere. L'assioma V = L, che afferma che ogni insieme è costruibile, è coerente con ZFC. E questo non è particolarmente sorprendente, dato che non puoi costruire un controesempio!

S. Quindi una morale che potresti trarre è che quando molti matematici parlano dei numeri reali, non sanno di cosa stanno parlando.

L. Questo è un modo piuttosto schietto di metterlo. Preferirei dire che lasciano non specificato cosa intendono con l'idea di un sottoinsieme arbitrario di un insieme, perché non devono preoccuparsene. Hanno gli assiomi per un campo ordinato completo e se credete nella realtà esterna degli oggetti matematici, dovrete dire che quegli assiomi sono ambigui, perché l'assioma di completezza si basa sulla nozione di una successione arbitraria, che non è completamente spiegata. Ma se tutto ciò che vuoi dai tuoi assiomi è un insieme di regole per quando ti è permesso dedurre una frase matematica da un'altra, allora gli assiomi per un campo ordinato completo te lo danno.

S. Quindi la teoria dei numeri reali è solo una raccolta di manipolazioni formali prive di significato?

L. No, non sono prive di significato. Anche se non dici esattamente a quali oggetti si applicano i teoremi di analisi, come il teorema del valore intermedio, almeno sai che si applicano a oggetti semplici come la funzione $f(x)=x^2$. Se vuoi provare a fare numeri reali in un modo "minimale", provando esattamente quello che ti serve per la matematica "ordinaria" e non di più, allora rendi la vita inutilmente complicata perché devi preoccuparti di ciò che è definibile e così via. È molto più sensato per la maggior parte dei matematici lasciare la nozione di un sottoinsieme arbitrario un po' vago e ragionato in modo formale. Potresti aver provato più del necessario, ma perché no se è effettivamente più semplice?

M. Quindi, finalmente, arriviamo alla seguente giustificazione per numeri reali.

1. Dobbiamo andare oltre i soli razionali.
2. Quando lo facciamo, introduciamo alcune procedure che ci danno nuovi numeri.
3. Formalizzandoli, "finiamo" ("end un"= "ci imbattiamo") nell'assioma delle successioni monotone, o qualcosa di equivalente ad esso.
4. Questo assioma non è preciso come sembra, dal momento che la nozione di una successione monotona arbitraria, anche di razionali, non è precisa.
5. Non c'è bisogno di renderlo preciso, perché sappiamo come ragionare in termini di successioni arbitrarie.
6. Questo ci consente di definire i numeri reali di cui abbiamo bisogno, anche se ci dà un sacco di spazzatura.
7. In realtà, non sappiamo veramente quale spazzatura ci possa dare, e non è nemmeno chiaro che abbia senso chiedere.