# Numero di Liouville

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Un **numero di Liouville** è un numero reale che può essere approssimato "molto bene" con una successione di numeri razionali.

Formalmente, un numero $x$ è di Liouville se per ogni numero intero positivo $n$ esistono degli interi $p$ e $q$ con $q > 1$ tali che

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Una definizione equivalente è che per ogni $n$ esistono infinite coppie $(p,q)$ di interi che verificano questa proprietà.

Si dimostra facilmente che ogni numero di Liouville è irrazionale. Nel 1844 Joseph Liouville dimostrò che i numeri che oggi portano il suo nome sono non solo irrazionali, ma anche trascendenti.

Si dimostra che i numeri di Liouville nell'intervallo [0,1] sono non numerabili, ma hanno misura 0.[1] Questo implica che non tutti i numeri trascendenti sono di Liouville, e che anzi questa classe di numeri è molto piccola rispetto all'insieme dei numeri trascendenti. Esempi di numeri trascendenti ma non di Liouville sono e e pi greco.

La costante di Liouville, che, come non è difficile dimostrare, è un esempio di numero di Liouville, è il primo numero del quale è stata dimostrata la trascendenza.

## Indice



## Irrazionalità

Supponiamo che sia $x=a/b$, con a e b interi, e sia $n$ tale che $2^{n-1}>b$. Allora per ogni coppia di interi p,q tali che q > 1, p/q ≠ a/b,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{aq-bp}{bq} \right| \geq \frac{1}{bq} \geq \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n}$$

contraddicendo la proprietà usata per definire i numeri di Liouville.

## Trascendenza

Ogni numero di Liouville è trascendente, come fu dimostrato da Liouville nel 1844 (**teorema di Liouville**), sebbene l'inverso non sia sempre vero. La dimostrazione è basata sul lemma seguente.

**Lemma**. Per ogni algebrico irrazionale $\alpha$ di grado $n$ (che risolve cioè un'equazione di grado $n$ a coefficienti interi, ma non equazioni di grado inferiore), esiste una costante A tale che per ogni coppia di interi p, q con q > 0

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}$$

**Dimostrazione del lemma**.

Sia *P(x)* il polinomio minimo di α (cioè monico e di grado minimo tale che $P(\alpha) = 0$ ). Poiché i polinomi sono lipschitziani in un intervallo limitato, esiste $M > 0$ tale che per ogni coppia $a$, $b$ si ha

$$|P(a) - P(b)| < M|a - b|$$

Quindi in particolare

$$M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right|$$
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{M}\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right|$$

Osserviamo ora che $P(p/q) \neq 0$, in quanto altrimenti esisterebbe un altro polinomio a coefficienti razionali di grado minore che ha ancora $\alpha$ come radice, contro le ipotesi. Da ciò segue anche la diseguaglianza $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n}$, perché si possono ridurre tutti i termini di *P(p/q)*, $a_i\frac{p^i}{q^i}$ allo stesso denominatore $q^n$, e ciò dimostra il lemma.

**Dimostrazione della trascendenza dei numeri di Liouville**. Supponiamo ora che il numero di Liouville $\alpha$ sia algebrico di grado $n$, e sia A una costante positiva arbitraria e $r$ tale che $\frac{1}{2^r} < A$. Se $m=r+n$, allora, per la definizione di numero di Liouville, si ha

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m} = \frac{1}{q^n q^r} < \frac{A}{q^n}$$

il che contraddice l'algebricità di $\alpha$, per il lemma precedente e l'arbitrarietà di A.

# La costante di Liouville

Un particolare numero di Liouville è la cosiddetta *costante di Liouville*. Essa è pari a

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,110001000000000000000001000...$$

È facile dimostrare che essa è un numero di Liouville: ponendo infatti

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{n!-k!} = 10^{n!}\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}, \qquad q_n = 10^{n!}$$

(che sono numeri interi) si ottiene

$$\left|c - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} - 10^{n!}\frac{\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}}{10^{n!}} = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} - \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!} < \frac{2}{10^{(n+1)!}} \leq \frac{1}{10^{n \cdot n!}} = \frac{1}{q_n^n}$$

e quindi $c$ verifica la definizione di numero di Liouville, in quanto questa relazione vale per ogni intero positivo $n$.

# Note

1. ^ http://www.math.sc.edu/~filaseta/gradcourses/Math785/Math785Notes5.pdf

# Bibliografia


- Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*, Giusti, Torino 1988, ISBN 8833956849