Concept Image e *Concept Definition* in matematica con particolare riferimento ai limiti e alla continuità

Pubblicato in *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169, (1981).

David Tall
Centro di ricerca per l'insegnamento della matematica
Università di Warwick

Shlomo Vinner
Centro di insegnamento della scienza
Università ebraica

ABSTRACT la Concept Image consiste di tutta la struttura cognitiva nella mente dell'individuo che è associata a un determinato concetto. Essa potrebbe non essere globalmente coerente e avere aspetti che sono molto diversi dalla definizione del concetto formale. Lo sviluppo dei limiti e della continuità verranno considerati in questo articolo, come insegnato nella scuola secondaria e nell'università. Vengono riportate varie indagini i quali dimostrano che le concept image individuali differiscono dalla teoria formale e contengono fattori che causano conflitti cognitivi.

Rispetto ad altri campi dello sforzo umano, la matematica è generalmente considerata come un argomento di grande precisione in cui i concetti possono essere definiti con precisione per fornire una solida base per la teoria matematica. Le realtà psicologiche sono in qualche modo diverse. Molti concetti che incontriamo in matematica sono stati incontrati in una forma o nell'altra prima che siano definiti formalmente e una struttura cognitiva complessa esista nella mente di ogni individuo, producendo una varietà di immagini mentali personali quando viene evocato un concetto. In questo documento formuliamo una serie di idee generali intese ad essere utili per analizzare questi fenomeni e applicarli ai concetti specifici di continuità e limiti.

1. Concept Image e Concept Definition

Il cervello umano non è un'entità puramente logica. Il modo complesso in cui funziona è spesso in contrasto con la logica della matematica. Non è sempre la pura logica che ci dà intuito, né è il caso che ci fa sbagliare. Per comprendere come avvengono questi processi, sia con successo sia con errori, dobbiamo formulare una distinzione tra i concetti matematici definiti formalmente e i processi cognitivi con cui sono concepiti.

Molti concetti che usiamo felicemente non sono definiti formalmente, impariamo a riconoscerli per esperienza e uso in contesti appropriati. Più tardi questi concetti possono essere raffinati nel loro significato e interpretati con crescente sottigliezza con o senza il lusso di una definizione precisa. Di solito in questo processo al concetto viene dato un simbolo o un nome che gli permette di essere comunicato e aiuta nella sua manipolazione mentale. Ma la struttura cognitiva totale che colora il significato del concetto è molto più grande dell'evocazione di un singolo simbolo. È più di qualsiasi immagine mentale, sia essa pittorica, simbolica o altro. Durante i processi mentali di rievocazione e manipolazione di un concetto, molti processi associati sono messi in gioco, influenzando consapevolmente e inconsciamente il significato e l'uso.

Useremo il termine *Concept Image* per descrivere la struttura cognitiva totale associata al concetto, che include tutte le immagini mentali, le proprietà e i processi associati. Essa si costruisce nel corso degli anni attraverso esperienze di ogni genere, cambiando quando l'individuo incontra nuovi stimoli e matura.

Ad esempio, il concetto di sottrazione viene di solito incontrato per la prima volta come un processo che coinvolge numeri interi positivi. A questo punto i bambini possono osservare che la sottrazione di un numero *riduce* sempre il risultato. Per un bambino questa osservazione è parte della sua Concept Image e potrebbe causare problemi in seguito alla sottrazione di numeri negativi. Per questo motivo tutti gli attributi mentali associati a un concetto, siano essi coscienti o incoscienti, dovrebbero essere inclusi nella Concept Image; essi possono contenere i semi del futuro conflitto.

Man mano che la Concept Image si sviluppa, non è necessario che sia coerente in ogni momento. Il cervello non funziona in questo modo. L'input sensoriale eccita alcuni percorsi neuronali e inibisce gli altri. In questo modo diversi stimoli possono attivare diverse parti della Concept Image, sviluppandole in un modo che non ha bisogno di creare un insieme coerente.

Chiameremo la parte della Concept Image che viene attivata in un momento particolare la "*Concept Image evocata*". In momenti diversi, si possono evocare immagini apparentemente conflittuali. Solo quando gli aspetti conflittuali vengono evocati contemporaneamente è necessario che ci sia un reale senso di conflitto o confusione. I bambini che fanno matematica usano spesso processi diversi in base al contesto, facendo errori diversi a seconda del problema specifico in esame. Ad esempio, la somma di $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ può essere eseguita correttamente, ma quando si confronta con $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ può essere usato un metodo errato. Un bambino non vedrà alcun conflitto nei due diversi metodi, utilizza semplicemente il metodo che considera appropriato in ogni occasione.

La definizione di un concetto (se ne ha una) è piuttosto diversa. Considereremo la *Concept Definition* come una forma di parole usate per specificare quel concetto. Può essere appresa da un individuo in modo meccanico o più significativamente appresa e collegata a un livello più o meno ampio al concetto nel suo complesso. Potrebbe anche essere una ricostruzione personale da parte dello studente di una definizione. È quindi la forma di parole che lo studente usa per la spiegazione personale della propria Concept Image (evocata). A seconda che la *Concept Definition* gli venga data o sia costruita da lui stesso, essa può variare di volta in volta. In questo modo una *Concept Definition* personale può differire da una *Concept Definition* formale, quest'ultima sarà la *Concept Definition* che è accettata dalla comunità matematica in generale.

Per ogni individuo una *Concept Definition* genera la propria *Concept Image* (che potrebbe, in un volo di fantasia, essere chiamata "*Concept Definition Image*"). Questo è, ovviamente, parte della *Concept Image*. In alcuni individui potrebbe essere vuoto o praticamente inesistente. In altri può essere, o no, correlato coerentemente con altre parti della *Concept Image*. Ad esempio, la *Concept Definition* di una funzione matematica potrebbe essere considerata come "una relazione tra due insiemi A e B in cui ogni elemento di A è correlato precisamente con un elemento in B." Ma gli individui che hanno studiato le funzioni possono o non possono ricordare la *Concept Definition* e la *Concept Image* potrebbe includere molti altri aspetti, come l'idea che una funzione è data da una regola o una formula, o forse che diverse formule possono essere usate su diverse parti del dominio A. Ci possono essere altre nozioni, per esempio la funzione può essere pensata come un'azione che mappa $a \in A$ in $f(a) \in B$, o come un grafico, o una tabella di valori. Tutti o nessuno di questi aspetti possono essere nella *Concept Image* di un individuo. Ma un insegnante può dare la definizione formale e lavorare con la nozione generale per un breve periodo prima di passare lunghi periodi in cui tutti gli esempi sono forniti da formule. In tal caso *Concept Image* può svilupparsi in una nozione più ristretta, coinvolgendo solo formule, mentre la *Concept Definition* è ampiamente inattiva nella struttura cognitiva. Inizialmente lo studente in questa posizione può operare abbastanza felicemente con la sua nozione ristretta adeguata nel suo contesto ristretto. Gli può anche essere stato insegnato a rispondere con la definizione formale corretta pur avendo una *Concept Image* inappropriata. Più tardi, quando incontra funzioni definite in un contesto più ampio, potrebbe non essere in grado di farcela. Eppure il programma di insegnamento in sé è stato responsabile di questa situazione infelice.

Come vedremo tra poco, le *Concept Image* di limite e continuità sono molto probabilmente in grado di contenere fattori che sono in conflitto con la definizione formale del concetto. Alcuni di questi sono sottili e potrebbero non essere nemmeno consapevolmente noti dall'individuo, ma possono causare confusione nel trattare con la teoria formale. Quest'ultimo riguarda solo quella parte della *Concept Definition* del concetto che è generalmente riconosciuta reciprocamente dai matematici in generale. Per esempio, la definizione verbale di un limite " $s_n \rightarrow s$ " che dice "possiamo rendere s_n vicino a s come vogliamo, a condizione che prendiamo n sufficientemente grande" induce in molti individui la nozione che s_n non può essere uguale a s (vedi Schwarzenberger e Tall, 1978). In tale individuo questa nozione fa parte della sua *Concept Definition Image*, ma non è riconosciuta dai matematici come parte della teoria formale.

Chiameremo una parte della *Concept Image* o della *Concept Definition* che potrebbe entrare in conflitto con un'altra parte della *Concept Image* o della *Concept Definition*, un "*fattore di conflitto potenziale*". Tali fattori non devono mai essere evocati in circostanze che causano reali conflitti cognitivi, ma se sono così evocati tali fattori saranno quindi chiamati "*fattori di conflitto cognitivo*". Per esempio la definizione di un numero complesso $x+iy$ come una coppia ordinata di numeri reali (x, y) e l'identificazione di $x+i0=(x,0)$ come il numero reale x è un *fattore di conflitto potenziale* nel concetto di numero complesso. Questo perché include un conflitto potenziale con la nozione teorico-insiemistica che l'elemento x sia distinta dalla coppia ordinata (x, 0). Gli studenti in un questionario (Alto, 1977b) spesso NON consideravano un numero reale come $\sqrt{2}$ come un numero complesso ma tuttavia molti di questi definiscono i numeri reali come "numeri complessi con parte immaginaria uguale a zero ." Quindi $\sqrt{2}$ era considerato reale e $\sqrt{2}+i0$ come complesso. Queste sono state considerate convenientemente come entità distinte o uguali, a seconda delle circostanze, senza causare alcun conflitto cognitivo. Diventano quindi *fattori di conflitto cognitivo* solo se evocati simultaneamente.

In determinate circostanze i *fattori di conflitto cognitivo* possono essere evocati inconsciamente con il conflitto manifestandosi solo con un vago senso di disagio. Suggeriamo che questa sia la causa alla base di tali sentimenti nella risoluzione dei problemi o nella ricerca quando l'individuo percepisce qualcosa di sbagliato da qualche parte; può avvenire solo dopo un considerevole lasso di tempo (se non del tutto) che la ragione del conflitto è capita consapevolmente.

Un tipo più serio di *fattore di conflitto potenziale* compare nella *Concept Image,* esso è in contrasto non con un'altra parte della *Concept Image* ma con la definizione formale del concetto stesso. Tali fattori possono seriamente ostacolare l'apprendimento di una teoria formale, poiché non possono diventare effettivi *fattori di conflitto cognitivo* a meno che la *Concept Definition* formale non sviluppi una *Concept Image* che possa produrre un conflitto cognitivo. Gli studenti che hanno un *fattore di conflitto potenziale* nella loro *Concept Image* possono essere sicuri nelle loro stesse interpretazioni delle nozioni in questione e considerano semplicemente la teoria formale come inoperativa e superflua.

Le nozioni finora descritte sono tutte chiaramente manifestate nei vari concetti di limite e continuità. Nel resto dell'articolo descriviamo alcuni dei problemi causati da una *Concept Image* che non si riferisce coerentemente alla *Concept Definition* e ai potenziali conflitti che ne derivano.

2. **Problemi di curriculum pratici**

Ci sono diversi problemi pratici imposti nell'insegnamento dei concetti di limiti e continuità. Se ci limitiamo alle tre nozioni esposte:

1. Limite di una successione $\lim_{n \to \infty} s_n$

2. Limite di una funzione $\lim_{x \leftarrow a} f(x)$

3. Continuità di una funzione $f: D \to \mathbb{R}$

allora scopriremo che nelle scuole Inglesi essi vengono raramente insegnate in un senso logico. Considerazioni pratiche e la necessità di apprendere il calcolo alla prima occasione portano alla nozione di un limite di una funzione prima discusso nella differenziazione come:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

o in qualche altra notazione. Molto presto vengono ricavate le formule standard per le derivate e la notazione generale di limite passa in secondo piano. Quando viene discusso, inizialmente è di solito in una forma dinamica:

> "$f(x) \to c$ quando $x \to a$,"

oppure

> "$f(x)$ tende a c quando x tende ad a,"

Successivamente il limite verrà dato in qualche forma quantificate, come

> "possiamo rendere $f(x)$ vicino quanto vogliamo a c a patto che si prenda x *sufficientemente* vicino ad a."

oppure

> "per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x)-c| < \varepsilon$"

Analogamente, il limite di una successione viene spesso trattato brevemente, quindi viene posta una maggiore attenzione sul limite di una serie, ad esempio sotto forma di una serie geometrica

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \to \frac{1}{1-x} \quad \text{per } |x| < 1$$

o per una serie di Taylor

$$f(x+h) = f(x) + \frac{hf'(x)}{1!} + \frac{h^2 f''(x)}{2!} + \ldots$$

La nozione di continuità viene raramente associata a una definizione formale, ma una *Concept Image* è costituita grazie all'uso informale del termine. Ad esempio, nei testi di livello avanzato del progetto *The School Mathematics Project* (di seguito "SMP") le *Concept Image* di limite e di continuità vengono attentamente elaborate nei due anni del corso con delle *Concept Definition* abbastanza formali che vengono fornite solo alla fine. In questo modo la *Concept Image* è destinata a condurre naturalmente alla *Concept Definition*, ma in pratica si verificano alcuni conflitti potenziali che possono causare conflitti cognitivi per coloro che successivamente studieranno l'analisi formale.

Questi commenti non sono intesi come una critica al curriculum come lo è ora. Hanno lo scopo di dimostrare la realtà della situazione in cui le *Concept Image* sono costruite in modo pratico e informale, quindi viene data una *Concept Definition* iniziale che è un'approssimazione alla definizione formale incontrata dalla piccola percentuale di studenti che continuano a studiare matematica all'università . La nostra intenzione è quella di considerare i tre concetti dati a turno e discutere alcuni dei potenziali fattori di conflitto che possono verificarsi.[1]

3. **Limiti di successioni**

Le successioni vengono solitamente introdotte senza una definizione formale. Ad esempio in SMP, Libro 1, capitolo 2 (pagina 31) dice:

> "Supponiamo che tu voglia calcolare il valore di 2^7 ,come faresti? Probabilmente reciteresti a te stesso la successione di numeri
>
> 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128;
>
> e forse anche tu faresti il conto
>
> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
>
> sulle tue dita allo stesso tempo, il che ti aiuterà a mantenere il conto della successione. Quindi, quando avevi contato le dita, avresti recitato il numero 2^n ."

Si passa poi a spiegare come il processo possa essere condotto su un computer, passando attraverso definizioni induttive, dimostrazioni per induzione e diversi argomenti intermedi prima di definire la nozione di funzione nel capitolo 4. Dopo una breve discussione teorica-insiemistica richiamando dei precedenti lavori sulle relazioni, viene definita la nozione di funzione (SMP, Libro 1, capitolo 4, pagina 83):

> *"Si noterà che la relazione "è il marito di" ha una proprietà speciale, almeno nei paesi cristiani: che ogni uomo sposato ha una sola moglie. Ciò significa che ogni membro del dominio M è associato a uno e solo un membro del codominio. Le relazioni che hanno questa proprietà si verificano molto frequentemente e svolgono un ruolo importante in matematica. Sono conosciuti come "funzioni".*
>
> *Una funzione è una relazione tra gli elementi di due insiemi - il dominio e il codominio - in modo tale che ciascun membro del dominio sia correlato a uno e solo un membro del codominio."*

Una dozzina di pagine più tardi la nozione di "successione" viene richiamata e reinterpretata come parte del concetto di funzione (SMP, Libro 1, capitolo 4, pagina 95):

> *A volte abbiamo guardato stringhe di numeri come*
>
> $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots$
>
> *e abbiamo usato la parola "**successione**" per descriverli. I numeri separati sono chiamati "**termini**" della successione: quindi il primo termine è* 0*, il secondo termine è* $\frac{1}{2}$ *e così via. Vediamo subito che con questa successione è associata una mappatura, descritta dalla tabella:*

1Gli autori sono grati alla Cambridge University Press e al The School Mathematics Project per aver concesso il permesso di citare da Advanced Mathematics (Metric) Books l-4.

posizione del termine		valore del termine
1	$\rightarrow$	0
2	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$
3	$\rightarrow$	$\frac{2}{3}$
4	$\rightarrow$	$\frac{3}{4}$
…	$\rightarrow$	…

È quindi possibile definire una successione come una funzione che ha per dominio l'insieme $\mathbb{N}$ *di numeri naturali* $\{1, 2, 3, 4, ...\}$. † *L'immagine* $f(n)$ *del numero n è descritta come l'ennesimo termine della successione.*
† *La parola successione viene anche usata per funzioni che hanno per dominio l'insieme dei numeri interi non negativi* $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. *Il numero* $f(n)$ *è quindi correttamente descritto come il termine* (n + 1)*-esimo*."

Oltre a dare progressioni aritmetiche e geometriche ($n \rightarrow a+bn$, $n \rightarrow ar^n$ rispettivamente) come esempi di successioni, il testo ritorna poi a un'ulteriore discussione sul concetto di funzione.

In seguito vengono utilizzati vari processi iterativi per approssimare determinati numeri, ad esempio la tecnica di Newton-Raphson per la radice di un'equazione o il metodi passo-passo per risolvere equazioni differenziali. È solo nell'ultimo capitolo del quarto e ultimo libro del corso che la nozione di convergenza di una successione è discussa in ogni senso formale. Per prima cosa c'è una discussione su una procedura "*sfida e risposta*" in un caso particolare (SMP, Libro 4, capitolo 43, pagina 1309):

$$\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , ..., \left(\frac{1}{2}\right)^i , ...$$

Nessun termine di questa successione è zero, ma se programmassimo un computer per valutarli, i termini sarebbero presto stampati come zeri, poiché sarebbero più piccoli del numero più piccolo che la macchina possa gestire. Inoltre, questo sarebbe vero qualsiasi fosse il numero di posti decimali che possano essere stampati. Se fossimo sfidati a produrre un numero N che ci consenta di dire "*tutti i termini dal N-esimo in poi saranno pari a zero per i primi 50 decimali", potremmo sicuramente trovare un tale numero; e possiamo farlo indipendentemente dal numero che mette lo sfidante al posto di 50.* Notate due cose: non ci impegniamo a produrre il numero N più piccolo, ma solo un N adatto; in secondo luogo, non possiamo produrre un solo numero N per tutte le sfide, il che eliminerà la sfida indipendentemente dal numero che viene posto in essere a 50. La nostra risposta dipende dalla sfida con cui ci troviamo di fronte. Formalmente, possiamo esprimere la situazione in questo modo: Dato un qualsiasi numero *p*, si può trovare un numero N tale che

$$\left|\frac{1}{2^i}\right| < 10^{1-p} \quad \text{per tutte le} \quad i > N \ .$$

Quando questo è vero, diciamo che il limite di $\frac{1}{2^i}$ è zero, o che $\frac{1}{2^i}$ converge a zero, poiché i aumenta senza limiti. Questo si scrive così:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{2^i} = 0$$

Non c'è, naturalmente, nessuna virtù particolare nella rappresentazione decimale; dal punto di vista matematico tutto ciò che è necessario dire è questo

Per ogni numero positivo *k*, c'è un numero N tale che $\left|\frac{1}{2^i}\right|$ <k per tutte le i> N.

Vengono forniti ulteriori esempi (in cui le funzioni sono tutte date in modo preciso da formule) sia di successioni convergenti che divergenti fino a che, dopo circa cinque pagine di discussione, raggiungiamo (SMP, Libro 4, capitolo 43, pagina 1312):

Definizione. *Se per ogni numero positivo* k *c'è un numero* N *tale che*

$$i > N \Rightarrow |f(i)-c| < k$$

la successione {f(i)} *ha il limite* c , *e noi scriveremo*

$$f(i) \to c \quad quando \quad i \to \infty \text{ , oppure } \lim_{i\to\infty} f(i) = c$$

In particolare, quindi, troviamo una tecnica a spirale in uso, introducendo il concetto contestualmente in esempi specifici, per poi tornare ad esso in vari momenti in fasi crescenti di sottigliezza fino a quando viene raggiunta una definizione formale e quindi brevemente utilizzata alla fine del corso. Possiamo legittimamente chiedere quale *Concept Image* è prodotta da queste tattiche e se la *Concept Definition* formale è completamente integrata in questa immagine. Fino ad oggi abbiamo raccolto solo i dati raccolti dagli studenti che hanno frequentato un'università inglese dopo aver frequentato una varietà di corsi di "livello avanzato" negli ultimi due anni a scuola. In un questionario per studenti di matematica che arrivano all'Università, agli studenti è stato chiesto se avessero incontrato il concetto del limite di una successione $s_{1,} s_{2,} \ldots, s_n, \ldots$ a scuola, o con una definizione precisa, informalmente o niente affatto. Sono stati poi tutti invitati a trovare i limiti di certe successioni, tra cui

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}\right)$$

Dopo essere stati invitati a scrivere la definizione di limite (se ne conoscevano una), è stato chiesto loro di dire se $0,\overline{9}$ (zero virgola nove periodico) fosse uguale a 1, o semplicemente minore, motivando la loro risposta. I dettagli delle loro risposte sono discussi in Tall (1977a). Un numero conteneva potenziali conflitti. Un matematico potrebbe considerare che il calcolo del limite sopra fosse un problema simile alla domanda di $0,\overline{9}$. Al contrario, quattordici studenti su 36 hanno affermato

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}\right)=2 \quad \text{ma} \quad 0,\overline{9}<1$$

Le risposte all'ultima parte erano spesso espresse in termini "infinitesimali":

"*È meno di uno, perché la differenza tra questo e l'uno è infinitamente piccola.*"

"*Poco meno di uno, perché anche all'infinito il numero anche se vicino a uno non è ancora tecnicamente uno*".

Chiaramente le due domande hanno evocato diverse parti della *Concept Image* del processo di limite. In una prova successiva gli stessi studenti sono stati invitati a scrivere i seguenti decimali in frazioni:

$$0{,}25 \;\; ; \;\; 0{,}05 \;\; ; \;\; 0{,}3 \;\; ; \;\; 0,\overline{3}=0{,}33333\ldots \;\; ; \;\; 0,\overline{9}=0{,}99999\ldots.$$

Tredici dei quattordici che in precedenza hanno detto $0,\overline{9}<1$ ora hanno detto $0,\overline{9}=1$. Diversi hanno ora sperimentato un *reale conflitto cognitivo*, illustrato nelle seguenti risposte relative agli ultimi due decimali nell'elenco:

A $0,\overline{3}=\frac{1}{3}$

$0,\overline{9}=3\cdot 0,\overline{3}=3\cdot\frac{1}{3}$ = “sciocchezze, robaccia, spazzatura”

B $0,\overline{3}=\frac{1}{3}$ non è una frazione [questa risposta è stata cancellata]

C $0,\overline{3}=\frac{1}{3}$

$0,\overline{9}=1$ o (non esiste)

D $0,\overline{3}=\frac{1}{3}$

$0,\overline{9}=0{,}999$

E $0,\overline{3}=\frac{1}{3}$

$0,\overline{9}\approx 1$

Altri possibili fattori di conflitto che si sono verificati sono discussi (sebbene non si usi questa terminologia) in Schwarzenberger & Tall (1978) e Tall (1977b). Uno di grande importanza è che gli studenti spesso formano una *Concept Image* di " $s_n \to s$ " per implicare che s_n si avvicina a s, senza mai raggiungerlo in realtà, come uno studente ha messo:

> " $s_n \to s$ *significa che* s_n *si avvicina a* s *quando* n *diventa grande, ma in realtà non raggiunge* s *fino all'infinito*."

Quindi "zero virgola nove periodico" non è uguale a uno perché il processo di avvicinamento a uno procede per sempre senza mai essere completato.
Nella formazione della *Concept Image* non è d'aiuto quando la maggior parte degli esempi del processo di limitazione consistono in successioni date da formule regolari che non hanno mai effettivamente il limite. Se uno studente ha una *Concept Image* che non consente che s_n sia uguale a s (perché diventa "più vicino" ad s all'ingrandirsi di n), allora congetturiamo che egli non possa assorbire un esempio inventato quando gli viene presentato. Quando a un piccolo gruppo di quattro di questi studenti è stato mostrato l'esempio

$$s_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ odd}) \quad \text{(n dispari)} \\ \dfrac{1}{2n} & (n \text{ even}) \quad \text{(n pari)} \end{cases}$$

hanno insistito sul fatto che non era una successione, ma due. I termini pari tendevano a uno (NON SAREBBE “ZERO”) e i termini dispari erano pari a uno (QUI PURE, “ZERO”). Quindi questo non era un esempio genuino di una successione in cui alcuni termini equivalevano al limite! Quando a uno studente viene data una definizione formale del concetto, la *Concept Definition Image* che forma nella sua struttura cognitiva può essere molto debole. Abbiamo notato, per esempio, che gli studenti hanno grandi difficoltà iniziali con l'uso dei quantificatori "tutti" e "alcuni" e le definizioni standard di limiti e continuità possono presentare problemi allo studente. La sua *Concept Image* rende ovvio per lui che se s_n si avvicina a s allora $\frac{1}{s_n}$ si avvicina a $\frac{1}{s}$ (a condizione che quest'ultimo non sia zero). Ma una scarsa comprensione della *Concept Definition* può rendere molto difficile per lui la dimostrazione formale di questo risultato. Questo è un fenomeno tipico che si verifica con una forte i *Concept Image* e una *Concept Definition Image* debole che permea l'intero studio universitario di analisi, specialmente quando ci sono potenziali fattori di conflitto tra i due.

4. Limiti di Funzioni

I limiti delle funzioni della forma $\lim_{x \to a} f(x) = c$ vengono anche affrontati nella sesta forma in modo intuitivo, con una spiegazione informale, quindi in una fase successiva può essere data una definizione più formale. Spesso il processo limite viene introdotto per la prima volta quando si discute della differenziazione, nel qual caso la *Concept Image* di un limite può includere un'immagine mentale di una corda tendente a una tangente. Altri approcci alla derivata possono influenzare la *Concept Image* tramite un fattore di ingrandimento o velocità istantanea. Come per il limite di una successione, il limite di una funzione è spesso considerato come un processo dinamico, dove x si avvicina ad a, causando l'avvicinamento di f(x) a c. Ancora una volta gli studenti possono considerare f(x)≠c come parte della loro *Concept Image*. D'altra parte la definizione del concetto formale può essere data in una forma imprecisa. Nel testo del libro SMP 4, è discusso l'esempio

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

dove $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ non è definita per x=1. L'implicazione è che non si considera il caso x=1, quindi si deduce che (SMP, Libro 4, capitolo 43, pagina 1325):

> *Per ogni numero positivo* h*, c'è un numero* k*, tale che*
> $|x - 1| < k \Rightarrow |f(x) - 2| < h$

Da ciò deriva la definizione formale di limite (SMP, Libro 4, Capitolo 43, pagina 1325):

Definizione. *Se per ogni numero positivo* h *c'è un numero* k, *tale che*
$|x - a| < k \Rightarrow |f(x) - c| < h$, *allora scriviamo,*
$f(x) \to c$ *quando* $x \to a$, *oppure* $\lim_{x \to a} f(x) = c$

In modo esplicito, la definizione dovrebbe almeno specificare x ≠ a, in modo che si legga:

> *Dato* h>0, *esiste* k>0 *tale che*
> $0 < |x - a| < k \Rightarrow |f(x) - c| < h$.

Implicitamente questo può essere parte della *Concept Image*. Noi congetturiamo che l'approccio intuitivo prima della definizione (se quest'ultima viene fornita) è spesso così forte che il sentimento degli studenti è dinamico:

> *come* x *si avvicina ad* a, *quindi* f(x) *si avvicina* c

con una precisa sensazione di movimento.

Un questionario è stato consegnato agli studenti del primo anno in cui è stato chiesto loro di spiegare cosa si intende per

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Nella pagina successiva del questionario veniva chiesto agli studenti di scrivere una definizione per $\lim_{x \to a} f(x) = c$, se ne conoscevano una.
Settanta studenti hanno risposto (ognuno di loro era uno studente di grado 'A' o 'B' nel corso di

livello-A di matematica). Le risposte fornite alla seconda domanda, la *Concept Definition* per " $\lim_{x \to a} f(x) = c$ ", possono essere classificate come segue:

	corrette	sbagliate
Formali	4	14
Dinamiche	27	4

Solo quattro hanno fornito una definizione formale corretta, di cui una era topologica e tre erano della forma sopra riportata.

I quattordici tentativi errati di definizione formale includevano sette che erano confusi con altre nozioni limite come:

mentre x→a , $c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon$ per ogni $n > n_0$

oppure

$|f(n) - f(n+1)| < \varepsilon$ per ogni n> di un dato N_0

e sette erano incomplete o non accurate, come

$|f(x) - c| < \varepsilon$ per ogni valore positivo di ε con x sufficientemente vicino ad a

tra le definizioni incomplete, in due è stata omessa la condizione $x \neq a$.

Le risposte di tipo dinamico ne comprendevano alcune del tipo

il valore a cui f(x) si avvicina quando il valore di x tende ad a è c.

oppure

quando x tende ad a, il valore di f(x) tende a c.

Risposte dinamiche incorrette comprendevano:

quando x si avvicina sempre di più ad a, il valore della funzione = c.

oppure versioni mescolate con altri processi di limite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

La domanda precedente richiedendo la spiegazione di $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ ha rivelato che la maggior parte degli studenti potrebbe tentare di fare un esempio anche se non erano in grado di dare una *Concept Definition*. Chi non ha fornito una *Concept Definition* ha risposto a questo esempio come segue:

	corrette	sbagliate
Usando un'idea dinamica	11	1
Altro	6	3

Quelle in cui veniva usata un'idea dinamica essenzialmente dicevano che $(x^3 - 1)/(x - 1)$ si avvicina a 3 come x si avvicina a 1, alcuni compivano la divisione e valutavano quindi il limite come $\lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 3$. Gli altri approcci includevano l'idea di continuità ("riempite il punto mancante del grafico"), e la regola di L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$$

E' stato interessante osservare quelli che hanno dato una *Concept Definition* effettivamente hanno utilizzato questa definizione nell'esempio. Tre su quattro, dando una definizione formale corretta, hanno applicato lo stesso metodo nell'esempio, il quarto utilizzando un metodo dinamico. Nel frattempo i 14 che hanno dato definizioni formali errate, divise in: 10 dinamiche (di cui 2 erano ancora errate), e 4 usando la definizione formale sbagliata. Tutti gli studenti che hanno fornito una definizione dinamica hanno utilizzato il metodo dinamico nell'esempio, con diversi livelli di precisione. In totale 54 su 70 hanno utilizzato un approccio dinamico nell'esempio.

Molti di questi hanno usato le parole "approccia", "avvicina", "tende a" che portano alla possibilità che l'ipotesi "f(x)≠c" sia un fattore di conflitto potenziale .

Come follow-up di questo questionario, due anni dopo, quando gli studenti erano nel loro ultimo anno, a ventidue è stato chiesto improvvisamente durante una lezione, se il seguente teorema è vero o falso:

> Supponiamo che quando x → a allora f(x) → b
> e anche che quando y → b allora g(y) → c
> da ciò segue che
> quando x → a, allora g(f(x)) → c.

Agli studenti è stato chiesto di scrivere "vero" o "falso" e hanno risposto a ventuno "vero" e uno "falso". Anche se spronati, quelli che hanno detto "vero" si sono rifiutati di cambiare, affermando che il teorema è vero.

È falso. La *Concept Image* di y=f(x) si avvicina a b e $g(f(x))=g(y)$ si avvicina a c è molto potente. Il teorema sarebbe vero se f(x)≠b per x vicino a. Ma nella definizione formale, che gli studenti avevano gestito per due anni, abbiamo " $\lim_{x\to a} f(x)=b$ " che significa

> per tutte le $\varepsilon>0$, esiste un $\delta>0$ tale che
> $0<|x-a|<\delta$ implica $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Quindi possiamo avere $f(x)=b$ e poi $g(f(x))=g(b)$ non abbiamo bisogno che sia definita, e se lo è possiamo avere $g(b)\neq c$.

ad esempio, se

$$f(x)=0$$

$$g(y)=\begin{cases}0 & (y\neq 0)\\ 1 & (y=0)\end{cases}$$

allora

quando $x\to 0, f(x)\to 0$
quando $y\to 0, g(y)\to 0$
quando $x\to 0, g(f(x))=g(0)\to 1.$

Lo studente che temeva che il Teorema potesse essere falso era preoccupato che $g(b)$ potesse essere NON definita. Il "ricordo" ("la memoria") aveva fatto valere la loro *Concept Image* di limite, e non la *Concept Definition* formale che avevano trattato nel corso degli ultimi due anni.

5. **Funzioni Continue**

Questo argomento è veramente la "*bestia nera*" dell'Analisi. La *Concept Image* deriva inizialmente da una varietà di fonti, ad esempio l'uso colloquiale del termine "continuo" in frasi come

> "la rotaia viene saldata continuamente"
> (il che significa che la pista non ha spazi vuoti)

oppure

> "Ha piovuto continuamente tutto il giorno"
> (il che significa che non ci sono state interruzioni nella pioggia).

L'uso iniziale del termine "funzione continua" implica spesso un'idea simile per cui il grafico della funzione possa essere disegnato "in modo continuo" in modo da non avere spazi vuoti. Una descrizione popolare errata della topologia come geometria del "foglio di gomma", che consente lo stiramento ma non lo strappo, non fa nulla per dissipare questa illusione. (In effetti la topologia consente lo strappo finché i lembi sono incollati di nuovo, ad esempio un quadrato ABCD in cui AD e DC sono incollati insieme è omeomorfo a una superficie formata da un quadrato WXYZ in cui è stata eseguita una doppia torsione prima incollando WX e ZY. Non c'è modo che una di queste superfici possa essere trasformata nell'altra nello spazio tridimensionale senza strappi e rimodellamenti! Quindi l'idea popolare di continuità ha anche un potenziale conflitto nella topologia.)

Nella sesta classe inglese il concetto di continuità viene spesso soppresso o trattato solo di sfuggita. L'argomento più centrale è la differenziazione e, poiché una funzione differenziabile è necessariamente continua, quest'ultimo argomento viene relegato in secondo piano (sebbene sia essenziale in alcune dimostrazioni).

È interessante notare che SMP sottolinea la discontinuità in modo matematicamente non standard nel disegno di curve. (SMP, libro 1, capitolo 5, pagina 133):

> *Comportamento vicino a una discontinuità*. Spesso una *discontinuità* o un'interruzione di un grafico si verifica perché esiste un valore di x che renderebbe il denominatore di una forma razionale zero. Quindi, nell'esempio 4,
> $f: x \to \frac{1}{(x-1)}$ non è definito per $x=1$, e il grafico mostra una discontinuità lì. †

In una nota a piè di pagina questa viene modificata nella definizione standard (SMP, Libro 1, Capitolo 5, pagina 133);

> † È consuetudine, sebbene non strettamente corretta, affermare che la funzione è discontinua in $x=1$: infatti non è né continua né discontinua, perché non è definita. Potremmo definire $f(1)=0$, o qualsiasi altro numero, ma non possiamo scegliere questo numero in modo da rendere $f(x)$ continua.

L'effetto netto sulla *Concept Image*, tuttavia, è, quasi certamente, un rafforzamento dell'idea intuitiva secondo cui il grafico non ha "vuoti" e può essere disegnato liberamente senza sollevare la matita dalla carta.

Ancora una volta la definizione formale in SMP arriva alla fine del corso (SMP, Libro 4, capitolo 43, pagina 1326):

> *Ridefinendo la continuità*. L'esercizio E fornisce un certo numero di esempi di discontinuità e dovrebbe aver chiarito che $\lim_{x \to a} f(x)$ può essere completamente diverso da $f(a)$, e che può esistere indipendentemente dall'altro. Questo, infatti, è

l'essenza di una discontinuità e potremmo ridefinire provvisoriamente la continuità come segue:

Definizione. f si dice continua in a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Questo può essere immediatamente riscritto nella forma "*sfida e risposta*", dalla nostra conoscenza dei limiti:

Teorema. f è continuo in a se e solo se per ogni numero positivo h esiste un numero k tale che
$|x-a|<k \Rightarrow |f(x)-f(a)|<h$.

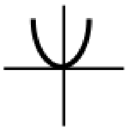
Il teorema segue immediatamente dalla definizione di limite.

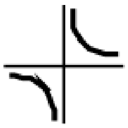
In questo caso il valore $x=a$ non deve essere escluso, per cui $f(x)=f(a)$ e il teorema è vero.

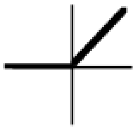
Quali *Concept Image* di continuità hanno gli studenti quando arrivano all'università? Ancora una volta abbiamo solo prove da parte degli studenti con una varietà di background.

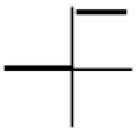
Un questionario è stato somministrato a 41 studenti con un voto A o B in un corso di matematica di livello A. Sono stati chiesti:

"*Quali delle seguenti funzioni sono continue? Se possibile, motiva la tua della tua risposta.*" Sono state date cinque funzioni, come segue:

1. $f_1(x)=x^2$ 

2. $f_2(x) = 1/x \ (x \neq 0)$ 

3. $f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$ 

4. $f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 

5. $f_5(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ rational}) \\ 1 & (x \text{ irrational}) \end{cases}$

(nell'ultimo caso non sono state disegnate immagini)

Le risposte sono state:

	1	2	3	4	5
continuous	41	6	27	1	8
discontinuous	0	35	12	28	26
no answer	0	0	2	2	7

Il primo di questi è da aspettarsi, anche se la risposta "giusta" può essere data per le ragioni “sbagliate” (dove “giusto” e “sbagliato” sono determinati dalla rigorosa formulazione matematica). Ad esempio è stato pronunciato in continuazione “perché è stato dato da una sola formula”. La seconda risposta indica che la maggior parte degli studenti ha una *Concept Image* che non ammette "vuoti" nel grafo. Questo è supportato dai commenti e, tra coloro che ritenevano che f_2 fosse discontinua, abbiamo osservazioni come

> "Il grafico non è in un unico pezzo"
> "La funzione non è definita all'origine"
> "La funzione diventa infinita all'origine".

Anche tra coloro che hanno affermato che f_2 era continuo, troviamo *Concept Image* che non coincidono con la definizione formale accettata:

> "È continuo perché la funzione è data da una singola formula."

La terza funzione era interessante. La maggior parte degli studenti che la pensavano continua e hanno fatto un commento hanno fatto commenti come

> "È tutto in un unico pezzo".

I dodici che l'hanno valutata discontinua hanno dato diversi motivi:

> "Non è dato da una singola formula"
> "C'è un improvviso cambiamento di gradiente."

La quarta funzione era considerata discontinua dalla maggior parte, con diversi tipi di ragionamento:

> "Non è tutto intero"
> "C'è un salto all'origine"
> "Non è una singola formula".

L'ultima funzione ha causato più problemi (sette studenti non hanno risposto). Da molti è stata considerata discontinua perché

> "È impossibile disegnare"

per uno studente era continua perché

> "Ha un modello continuo di definizione".

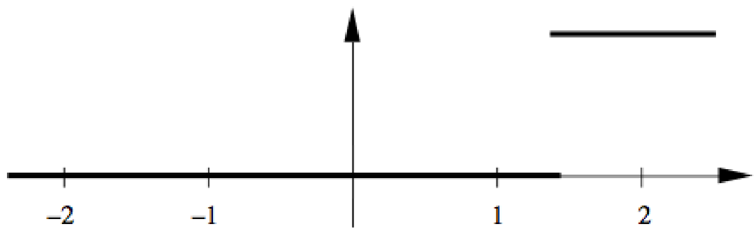
In queste risposte vediamo che la maggior parte degli studenti evocava una *Concept Image* che includeva la "mancanza di vuoti" del grafico, essendo "tutto in un unico pezzo", per un piccolo numero c'è un concetto evocato di "una singola formula" e per una minoranza ci sono altre immagini (come "gradiente che cambia gradualmente"). Tutte queste *Concept Image* appena menzionate hanno *potenziali fattori di conflitto* che sono in conflitto con la definizione formale del concetto. Prendiamo quest'ultimo come esempio, ovvero $f: D \to \mathbb{R}$ è continua in $a \in D$ se

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $x \in D, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Alcuni potenziali conflitti riguardano la natura di D. Il disegno mentale che la maggior parte dei matematici ha della linea reale è "continuo" nel senso colloquiale che non ha lacune. È estremamente difficile formare un'immagine soddisfacente della linea razionale anziché della linea reale. Se consideriamo funzioni definite solo sui razionali, allora potremmo avere funzioni formalmente continue che sono in conflitto con tutte le *Concept Image* sopra menzionate. Per esempio $f:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Q}$ (dove $\mathbb{Q}$ indica il campo dei razionali) dato da

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0 \text{ or } x^2<2) \\ 1 & (x>0 \text{ and } x^2>2) \end{cases}$$

ha come grafico



Questa funzione è continua, ma il suo grafico ha un "salto".

Inoltre, la *Concept Image* è una proprietà *globale*, la nozione di continuità su un *intervallo*, non continuità in un punto. Ci sono animali strani come

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \text{ rational}) \\ 1-x & (x \text{ irrational}) \end{cases}$$

che sono formalmente continue in un singolo punto (in questo caso a $\frac{1}{2}$) eppure in conflitto con tutte e tre le immagini evocate menzionate sopra. (Non è in un pezzo, né dato da una singola formula, né ha un grafico che varia in modo uniforme.)

Se a uno studente viene presentata una di queste creature esotiche e questa causa un *conflitto cognitivo* con la sua *Concept Image*, allora potrebbe trovarsi in difficoltà. Quando l'insegnante è a conoscenza delle possibili *Concept Image*, può essere possibile portare in superficie immagini errate e, attraverso la discussione, razionalizzare il problema. Tuttavia, alcune parti della *Concept Image* possono essere molto forti, specialmente l'idea che il grafico sia tutto in un pezzo su intervalli reali. Quest'ultima immagine mentale è, infatti, corretta. Anche così, può ancora causare problemi nella teoria formale.

In un quadro mentale del **Teorema del valor medio** e del **Teorema del valore estremo**, i risultati sono palesemente ovvi, ma le prove di quei risultati che utilizzano la definizione del concetto sono più sottili. Senza entrare troppo in profondità in un'altra area, ricordiamo brevemente che le attuali indagini stanno rivelando la misura in cui gli studenti hanno problemi con il significato di "tutti" e "alcuni" e la manipolazione dei quantificatori. Ciò significa che molti studenti hanno grandi difficoltà (come è noto) con la manipolazione delle definizioni di limiti e continuità. Sono quindi nella situazione in cui possono avere un forte quadro mentale, ma la *Concept Definition Image* è debole. Comprendono le affermazioni dei teoremi come ovvie, ma non possono seguire le dimostrazioni.

In una tale situazione, gli studenti che riescono diventano molto sospettosi delle idee in analisi. A livelli più avanzati diventa molto più difficile visualizzare i concetti come immagini mentali e non possono mai essere sicuri delle intuizioni suggerite dalla loro *Concept Image* che potrebbe essere ora un misto di forti *Concept Image* con potenziali conflitti con la *Concept Definition*. Ad esempio, come si visualizza una funzione che è continua ovunque ma non è differenziabile da nessuna parte? O quale immagine mentale si può avere di una funzione f la cui derivata f' esiste anche se f' potrebbe non essere continua? Le immagini mentali che hanno servito bene gli studenti in una fase precedente possono ora diventare un impedimento. Bruner ha suggerito che l'elaborazione iconica ha limitato le idee e ha spinto un movimento a livello simbolico. Ma lo studente, con la sua *Concept Image* inadeguata, può trovare difficile raggiungere uno sviluppo del genere. In questi e altri modi, la difficoltà di formare una *Concept Image* appropriata e gli effetti coercitivi di un'inopportuna *Concept Image* con potenziali conflitti, possono seriamente ostacolare lo sviluppo della teoria formale nella mente del singolo studente.

Riferimenti

1. School Mathematics Project: 1967 (revised 1970). Matematica avanzata (sistema metrico), libri 1-4, Cambridge University Press.
2. Schwarzenberger, R. L. E. e Tall, D. O .: 1978. Conflitto nell'apprendimento di numeri reali e limiti, Matematica Insegnamento 82, 44-9.
3. Tall, D. O .: l977a. Conflitto cognitivo e apprendimento della matematica, documento presentato al Gruppo internazionale di psicologia dell'educazione matematica, Utrecht, Olanda.
4. Tall, D. O .: 1977b. Conflitti e catastrofi nell'apprendimento della matematica, Matematica dell'educazione all'insegnamento, 2 4, 2-18.

δ ε

Concept Image

$\rightarrow$