EMS newsletter September 2014

SOLID FINDINGS:

CONCEPT IMAGES NEL RAGIONAMENTO MATEMATICO DEGLI STUDENTI

Tommy Dreyfus (Università di Tel Aviv, Israele) per conto del Comitato Educazione del EMS

Edwards e Ward (nel 2004) hanno riportato un “pattern” (schema) tipico nel ragionamento degli studenti universitari (“undergraduate”).
Per esempio, Stephanie, una studentessa di un corso introduttivo di analisi reale, era capace di spiegare la seguente definizione di decimale infinito:

> *sia* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *una successione infinita di interi con* $0 \le c_1 \le 9$ *. Il numero* $\sup\{0, c_1 c_2 \ldots c_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *è denotato da* $0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$ *ed è chiamato “decimale infinito”*

In particolare, Stephanie ha dato una spiegazione dettagliata del “sup” come “minimo” upper bound. Inoltre ha eguagliato 0,33333... a 1/3. Nonostante ciò , era inflessibile sul fatto che 0,9999... fosse minore di 1. Lei si giustificava dicendo che 0,33333... è uguale a 1/3 poiché si può dividere 1 per 3 e ottenere 0,333... , mentre dividendo 1 per uno non si può mai ottenere 0,9999... . Per Stephanie, 0,9999 (con un numero finito di “9”) era il minimo upper bound poiché si può sempre ottenere un numero più elevato “aggiungendo un altro 9”.

Similmente Jesse forniva una definizione accettabile di continuità ma nondimeno affermava che la funzione “valore assoluto” non era continua in $x=0$. Lui era consapevole che, secondo la definizione, la funzione sarebbe dovuta essere continua ma invece non lo era.

Di nuovo, similmente, gli studenti in un corso introduttivo di algebra non facevano uso della definizione quando gli veniva chiesto di moltiplicare “cosets” ma piuttosto facevano uso di un inappropriata nozione che avevano acquisito in precedenza, come ad esempio l'unione di “sets” (insiemi).

Molti autori hanno riportato, nel corso dei passati 35 anni, simili “patterns” (schemi) nel ragionamento degli studenti in altri rami della matematica. Vinner e Hershkowitz (1980) sono stati i primi a osservare che il pensiero geometrico degli studenti è frequentemente basato su “prototipi” piuttosto che su definizioni.

Essi hanno mostrato, per esempio, che studenti “junior high school” tendono a pensare che l'altezza di un triangolo è l'altezza sulla base e una base deve essere disegnata orizzontalmente. Ad esempio parallelamente al bordo del foglio o della lavagna. Inoltre, gli studenti tendono a pensare che l'altezza debba raggiungere la base (piuttosto che la sua estensione). Quindi disegnano l'altezza dentro al triangolo anche quando il triangolo ha un angolo ottuso alla base. Il “prototipo” di altezza degli studenti si trova all'interno del triangolo e in verticale, perpendicolare alla base orizzontale. Ciò si basa sull'esperienza degli studenti: hanno visto molti triangoli nei quali l'altezza si trova dentro al triangolo verticalmente , e molto pochi in cui non si trova in questo modo. Gli studenti potrebbero considerare questi pochi casi come delle eccezioni (Lakatos potrebbe dire “mostri”). Ciò avviene anche se gli studenti conoscono e sono in grado di ripetere la definizione (generale) di altezza di un triangolo.

Una situazione simile si presenta con le successioni. Un “prototipo” di successione è una successione del tipo $1-\frac{1}{n}$, dove i termini “approcciano” al limite monotonamente. La maggior parte delle successioni incontrate dagli studenti sono di questo tipo o, nel peggiore dei casi,

oscillano e convergono con ogni termine che si avvicina al limite più del precedente.
Gli studenti si comportano come se tutte le successioni siano monotonamente crescenti o monotonamente decrescenti anche se sanno e sono in grado di recitare la definizione di "successione convergente". Essi tendono ad agire in accordo con gli esempi che hanno in mente piuttosto che in accordo con la definizione formale. Questi esempi sono molto più accessibili rispetto alla definizione per loro.

Gli studenti della scuola elementare tendono a pensare che la moltiplicazione "ingrandisca". Molti studenti del "high school" rifiuteranno funzioni come quella di Dirichlet poiché essa non combacia con l'immagine di una tipica funzione con è loro familiare. Questo vale anche per gli studenti talentuosi del "high school" e quelli del college che non hanno problemi a recitare e spiegare il significato della definizione di funzione come "la mappatura da un insieme ad un altro" (e.g. Vinner & Dreyfus, 1989). Similmente, "high school students" tendono a credere che i "*punti di flesso*" hanno tangenti orizzontali e che gli integrali definiti debbano essere positivi poiché rappresentano un'area.

I matematici spesso cercano caratteristiche o strutture comuni in situazioni differenti; è così che nozioni come quella di "gruppo" o la "topologia" sono emerse e hanno permesso una visione unificata di molte situazioni apparentemente sconnesse. Un "Educatore Matematico" osserva le cose in comune nel ragionamento degli studenti al fine di vedere un "disegno più grande" in schemi di ragionamento degli studenti che sono apparentemente sconnessi. Nei casi descritti precedentemente i punti in comune sono che gli studenti non sembrano basare il loro ragionamento sulla definizione del concetto che stanno considerando (nonostante gli studenti siano al corrente delle definizioni e possano recitarle e spiegarle) ma piuttosto si basano si **qualcos'altro**. Vinner, Hersshkowitz e Tall hanno proposto il termine "*concept image*" per questo **qualcos'altro.** Essi lo hanno descritto, per la geometria, come "l'insieme di tutte le figure che sono mai state associate con il concetto nella mente dello studente" (Vinner & Hershkowitz, 1980, pag. 177) e poi lo hanno esteso oltre alla geometria come "la struttura cognitiva totale che è associata con il concetto, che include tutte le immagini mentali, le proprietà associate e o processi. Essa si costruisce nel cosrso degli anni attraverso esperienze di ogni genere, cambiando mentre l'individuo matura e incontra nuovi stimoli" (Tall & Vinner, 1981, pag.152). Essi hanno notato che questa struttura può non essere globalmente coerente e può avere aspetti che sono in disaccordo con la "concept definition" formale. Quindi, nell'educazione matematica, ***il processo cognitivo attraverso il quale i concetti sono concepiti deve essere distinto da come vengono formalmente definiti i concetti matematici.***

La nozione di "concept image" conta per il ruolo complesso giocato dalle immagini nel ragionamento matematico degli studenti. Questa complessità può essere espressa da due differenti punti di vista. Da un lato risulta impossibile introdurre un concetto senza fornirne alcuni esempi; in geometria ad esempio si disegnano figure o si mostrano modelli. D'altro canto i casi particolari di un concetto non sono mai sufficienti a determinarlo completamente. Come conseguenza, elementi specifici degli esempi, anche se non sono pertinenti alla definizione matematica del concetto, diventano per lo studente gli elementi chiave che caratterizzano il concetto. Ad esempio, l'altezza di un triangolo deve essere verticale nel senso che abbiamo visto in precedenza. Da ciò segue che le immagini possono influenzare profondamente la formazione di un concetto.

Quindi, una concept image è personale. La concept image di uno specifico studente di un particolare concetto è influenzata da tutte le esperienze associate con questo concetto. Queste includono esempi, problemi che lo studente ha risolto, prototipi che lo studente può aver incontrato sostanzialmente più spesso rispetto a esempi non-prototipi, e differenti rappresentazioni del concetto incluse quelle visuali, algebriche e numeriche. In particolare, esperienze con software digitali possono far si che in uno studente le concept image relative a funzioni, limiti o tangenti abbiano aspetti dinamici. I quali sono potenzialmente più ricchi degli aspetti statici, ma questi aspetti dinamici, proprio come quelli statici, possono adattarsi alla concept definition formale in maniera completa o solo parzialmente. Investigare il potenziale dell'uso interattivo di software digitali come quelli di geometria dinamica, al fine di supportare la formazione di concetti negli studenti è un "focus" della ricerca in "mathematics education".

Può risultare di particolare interesse alla lettura di questa newsletter che gli studenti hanno tipicamente anche una concept image delle dimostrazioni. Moore (1994), ad esempio, ha scoperto che gli studenti universitari laureandi in matematica o in “mathematics education” hanno “*una concept image delle dimostrazioni. La concept image di alcuni studenti è una procedura, una sequenza di passi che devono essere compiuti. Non è chiaro in che misura gli studenti vedono le dimostrazioni come un pezzo di conoscenza matematica, un oggetto … essi hanno alcune nozioni limitate sullo scopo della dimostrazione, ma probabilmente non sono pronti a usare una dimostrazione e il ragionamento deduttivo come uno strumento per risolvere problemi matematici e sviluppare una conoscenza matematica.*” (pag. 264)

“A solid findings” della ricerca in “mathematics education”, supportato da dozine di studi con studenti dalle scuole elementari all'università, è che “*il ragionamento matematico degli studenti è frequentemente basato sulle loro concept images, piuttosto che su una concept definition matematica.*” Questa ha senso per gli studenti dal momento che una definizione è raramente un oggetto esplicito di istruzione e gli studenti non sperimentano la necessità di una definizione esatta.

La ricerca che si basa sulla nozione di “concept image” è attivamente continuata e sviluppata. Questa ricerca ha recentemente assunto direzioni aggiuntive, oltre all'identificazione delle concept image solo parzialmente adeguate degli studenti relativamente a nozioni matematiche specifiche. Una di queste direzioni include la progettazione e la sperimentazione di attività che aiutano gli studenti a migliorare le loro concept images e di comprendere, a un “micro-level”, i processi di costruzione della conoscenza che avvengono durante queste attività di apprendimento; in un esempio di tale tipo di ricerca, Kidron (2008) ha investigato i cambiamenti nella concept image di alcuni studenti relativamente agli asintoti orizzontali. Un altro sviluppo recente è rappresentato da uno studio che mostra che le concept images di studenti universitari (“undergraduate”) in calolo (“in calculus”) non sono necessariamente personali e cognitive ma mostrano variazioni a seconda dell'appartenenza di uno studente a uno specifico dipartimento.[1] Specificamente, Bingolbali e Monaghan (2009) hanno scoperto che gli studenti di ingegneria meccanica hanno una concept image di derivata sviluppata nella direzione nel senso di “rapporto di cambio”[2] mentre gli studenti di matematica hanno una concept image della derivata sviluppata nel senso di “tangenza”. Possiamo quindi aspettarci che la ricerca basata sull'idea di concept image continui a contribuire al miglioramento della *mathematics education* a tutti i livelli, inclusi gli studi universitari.

Paternità

Anche se certi autori hanno preso la paternità di qualche articolo di questa serie, tutte le pubblicazioni della serie sono pubblicate dal “Education Commitee of the Europe Mathematical Society”. I membri di questo comitato sono Tommy Dreyfus, Qetndrin Gashi, Ghislaine Gueudet, Bernard Hodgson, Celia Hoyes, Boris Koichu, Konrad Krainer, Maria Alessandra Mariotti, Mogens Niss, Juha Oikonnen, Nuria Planas, Despina Potari, Alexei Sossinsky, Ewa Swobida, Gunter Torner e Lieven Verschaffel.

References

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111, 411–424.

Kidron, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 695–717.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249–266.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177–184). Berkeley, CA: PME.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the notion of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356–366.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

1 quindi cambiano in base all'ambiente geografico di apprendimento.

2 Forse qua la traduzione corretta di “rate of change” sarebbe “rapporto incrementale”.